

Développements pour l'agrégation de Mathématiques

LE MANACH Florian

Années 2013/2014

Notes

Ce document recense les développements que j'ai préparés lors de la préparation à l'agrégation de mathématiques à l'ENS Rennes en 2013/2014. J'ai choisi de rédiger les développements que je considère comme originaux, intéressants ou les développements que je ne trouvais pas assez détaillés dans les livres. Les démonstrations sont donc volontairement très détaillés.

Pour chaque développement j'ai listé les leçons dans lesquelles il peut être inclus. Si le numéro de la leçon est entre parenthèse, cela signifie soit que le développement ne rentre pas très bien dans la leçon ou soit que j'ai un doute sur la pertinence du développement dans la leçon.

A la fin du document j'ai listé les leçons avec leur titre (en 2014) ainsi que les couplages que j'ai effectués. Ces couplages servent essentiellement à donner des idées mais l'ensemble n'est sûrement pas optimal (il y a beaucoup trop d'impasses).

Je voudrais aussi par avance m'excuser pour les éventuelles fautes d'orthographe et coquilles.

Pour une navigation plus pratique ce document contient des liens donc n'hésitez pas à cliquer sur les numéros des leçons ou les titres des développements pour y accéder.

Table des matières

1	Développements d'analyse	4
1.1	Le théorème de Stone-Weierstrass	4
1.2	L'espace de Sobolev $H^1(I)$	8
1.3	Densité de l'ensemble des fonctions continues partout et dérivables nulle part . .	11
1.4	Théorème de Montel	14
1.5	Théorème de Riesz-Fischer	16
1.6	Théorème de Sarkovskii	19
1.7	Théorème d'Abel et contre-exemples	22
1.8	Formule sommatoire de Poisson	26
1.9	Méthode de calcul d'une transformée de Fourier	30
1.10	Valeur principal de $\frac{1}{x}$	32
2	Développements d'algèbre	37
2.1	Les théorèmes de Sylow	37
2.2	Classification des groupes d'ordre inférieur à 11	39
2.3	Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$	41
2.4	Détermination des sous-groupes distingués à partir de la table de caractères . . .	43
2.5	Codiagonalisation des sous-algèbres réduites de $M_n(\mathbb{C})$	46
2.6	Sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$	48
3	Développements non rédigés	50
3.1	Analyse	50
3.2	Algèbre	52
4	Couplages	54
4.1	Algèbre	54
4.2	Analyse	59

Chapitre 1

Développements d'analyse

1.1 Le théorème de Stone-Weirestrass

- **Leçons concernées :** 201 ; 202 ; 203 ; (209) ; (228) ; 241 ; (246)
- **Référence :** *Topologie et analyse 3^e année*, Georges SKANDALIS (pages 150-155)
- **Remarque :** Ce développement, assez original, est une utilisation astucieuse de concepts élémentaires. De plus il possède de nombreuses applications.

Théorème 1 Soit X un espace compact et $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur X à valeurs réelles. Si \mathcal{A} est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, qui contient les fonctions constantes de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ et qui sépare les points de X , c'est à dire qui vérifie

$$\forall (x, y) \in X^2, x \neq y \implies \exists g \in \mathcal{A}, g(x) \neq g(y),$$

alors \mathcal{A} est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ muni de la norme infini.

Démonstration :

On démontre ce théorème en 5 étapes : les trois premières étapes consistent en la démonstration de lemmes qui seront utilisés pour démontrer le cœur du théorème qui réside en les deux dernières étapes. On aura pour objectif de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, il existe $g \in \overline{\mathcal{A}}$ vérifiant $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. On remarque que $\overline{\mathcal{A}}$ vérifie aussi les hypothèses du théorème.

Étape 1 :

Montrons qu'il existe une suite de polynômes $(P_n) \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers la racine carré sur l'intervalle $[0, 1]$.

Posons $P_0 = 0$ et pour $n \geq 0$, $P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(X - P_n^2)$.

On a tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $P_n(t) \in [0, \sqrt{t}]$.

En effet raisonnons par récurrence : pour $n = 0$ on a le résultat et si pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\forall t \in [0, 1]$, $P_n(t) \in [0, \sqrt{t}]$ alors

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n(t)^2) \geq 0,$$

$$P_{n+1}(t) - \sqrt{t} = (P_n(t) - \sqrt{t}) \left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + P_n(t))\right) \leq 0.$$

D'où $P_{n+1}(t) \in [0, \sqrt{t}]$, ce qui conclut la récurrence.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$, on a $P_{n+1}(t) - P_n(t) = \frac{1}{2}(t - P_n(t)^2) \geq 0$. La suite $(P_n(t))$ est

donc croissante est majorée ainsi elle converge vers l qui vérifie $l = l + \frac{1}{2}(t - l^2)$. Donc la suite (P_n) converge simplement vers la racine carré sur le compact $[0, 1]$. De plus elle est croissante donc d'après le théorème de Dini¹, (P_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la racine carré.

On remarque aussi que pour tout entier n on a $P_n(0) = 0$. Ceci sera utile pour la deuxième étape.

Étape 2 :

Montrons que si f et g sont dans $\overline{\mathcal{A}}$ alors $\min(f, g) \in \overline{\mathcal{A}}$ et $\max(f, g) \in \overline{\mathcal{A}}$.

On remarque tout d'abord que

$$\min(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2} \quad \text{et} \quad \max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}.$$

Ainsi il suffit de démontrer que si $h \in \overline{\mathcal{A}}$ alors $|h| \in \overline{\mathcal{A}}$.

Si $h = 0$ le résultat est évident.

Supposons maintenant que $h \neq 0$ et posons $\tilde{h} = \frac{h}{\|h\|_\infty}$ ce qui a un sens car X est compact.

Ainsi on a que \tilde{h}^2 est à valeur dans $[0, 1]$ donc la suite de fonctions $(P_n \circ \tilde{h}^2)$ converge uniformément vers la fonction $|\tilde{h}|$. De plus comme pour tout entier n on a $P_n(0) = 0$, il vient alors que $P_n \circ \tilde{h}^2$ est un élément de $\overline{\mathcal{A}}$ car $\overline{\mathcal{A}}$ est une algèbre.

Ainsi $|h| = \|h\|_\infty \tilde{h}$ appartient à $\overline{\mathcal{A}}$ en tant que limite uniforme d'éléments de $\overline{\mathcal{A}}$.

Étape 3 :

Montrons que pour tout $(x, y) \in X^2$ vérifiant $x \neq y$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, il existe $f \in \mathcal{A}$ tel que $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$.

\mathcal{A} sépare les points de X donc $\exists g \in \mathcal{A}$ tel que $g(x) \neq g(y)$. De plus \mathcal{A} contient les fonctions constantes. Ainsi il suffit de poser la fonction f comme suit et de voir qu'elle vérifie la propriété :

$$f = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{g(y) - g(x)} (g - g(x)).$$

Étape 4 :

Nous allons maintenant rentrer dans le cœur de la démonstration du théorème.

Soit $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Montrons que pour tout $x \in X$, il existe $g_x \in \overline{\mathcal{A}}$ vérifiant $g_x(x) = f(x)$ et pour tout $y \in X$, $g_x(y) \leq f(y) + \varepsilon$.

Soit $x \in X$. Pour tout $z \in X$ il existe $h_z \in \mathcal{A}$ tel que $h_z(x) = f(x)$ et $h_z(z) = f(z)$. En effet si $z = x$ alors il suffit pour h_z de prendre la fonction constante égale à $f(x)$ et si $z \neq x$ on utilise la troisième étape.

De plus, comme $h_z - f$ est continue et s'annule en z , il existe V_z un voisinage ouvert de z tel que pour tout $y \in V_z$, $h_z(y) \leq f(y) + \varepsilon$.

Ainsi on a $X = \bigcup_{z \in X} V_z$.

Or X est compact donc il existe un ensemble fini I tel que $X = \bigcup_{i \in I} V_{z_i}$ avec $z_i \in X$.

1. théorème démontré à la fin de la section

Posons $g_x = \min(h_{z_i}, i \in I)$. D'après la deuxième étape, $g_x \in \overline{\mathcal{A}}$. De plus on a $g_x(x) = f(x)$ et pour $y \in X$ il existe $i \in I$ tel que $y \in V_{z_i}$, donc $g_x(y) \leq h_{z_i}(y) \leq f(y) + \varepsilon$.

Étape 5 :

Montrons finalement qu'il existe $g \in \overline{\mathcal{A}}$ vérifiant $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$.

En reprenant les notation de l'étape 4 on a que la fonction $g_x - f$ est continue et s'annule en x , donc il existe W_x un voisinage ouvert de x tel quel pour tout $y \in W_x$, $g_x(y) \geq f(y) - \varepsilon$. De plus X est compact et $X = \bigcup_{x \in X} W_x$ donc il existe un ensemble fini J vérifiant $X = \bigcup_{j \in J} W_{x_j}$ avec $x_j \in X$.

Posons $g = \max(g_{x_j}, j \in J)$ et soit $x \in X$. Toujours d'après l'étape 2 on a que $g \in \overline{\mathcal{A}}$. De plus il existe $j \in J$ tel que $x \in W_{x_j}$. Donc on a $f(x) - \varepsilon \leq g_{x_j}(x) \leq g(x)$. Mais on a aussi qu'il existe $k \in J$ tel que $g(x) = g_{x_k}(x) \leq f(x) + \varepsilon$ d'après l'étape 4.

On vient donc d'établir que pour tout $x \in X$, $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$, ce qui conclut la preuve. \square

Avant de démontrer le théorème de Dini voici quelques remarques :

- Tout d'abord une remarque d'ordre pratique. Dans un plan de leçon, dans laquelle on décide de prendre ce développement, on peut tout à fait faire une sous partie consacrée à ce théorème. On pourra commencer par énoncer le théorème de Dini puis mettre en exemple la suite de polynôme de l'étape 1. Comme ce développement est un peu long cela permettra d'admettre l'étape 1 en s'appuyant sur le plan. Ensuite on énonce le théorème de Stone-Weirestrass dans le cas réel (le développement) et en corollaire on peut énoncer le théorème de densité des polynômes dans l'ensemble des fonctions continues sur un compact. Pour finir on énonce le théorème de Stone-Weirestrass dans le cas complexe suivi en corollaire par le théorème de densité des polynômes trigonométriques dans l'ensemble des fonctions continues périodique (voire parler de Fourier). On pourra par exemple utiliser comme référence *Topologie générale et espaces normés* de Nawfal EL HAGE HASSAN.
- On peut affaiblir un peu les hypothèses du théorème. A la place de « \mathcal{A} contient les fonctions constantes » on peut supposer que « pour tout $x \in X$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq 0$ » mais cela complexifie un peu la démonstration.
- Dans le cas complexe (i.e si on remplace $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ par $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$) il faut rajouter l'hypothèse « pour tout $f \in \mathcal{A}$, $\bar{f} \in \mathcal{A}$ ». Pour démontrer le cas complexe du théorème, il suffit de remarque que pour $f \in \mathcal{A}$, on a $\operatorname{Re}(f) = \frac{f + \bar{f}}{2} \in \mathcal{A}$ ainsi que $\operatorname{Im}(f) = \frac{f - \bar{f}}{2i} \in \mathcal{A}$. Puis on applique le cas réel du théorème aux partie réelle et imaginaire de f pour conclure. Sans cette hypothèse, le théorème est faux. En effet l'application $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas limite uniforme sur le disque unité d'une suite de polynôme.

Théorème 2 (de Dini)

Soit X un espace compact et (f_n) une suite croissante de fonctions continues sur X (i.e pour tout $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$). Si la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f continue alors (f_n) converge uniformément vers f .

Démonstration :

On pose $g_n = f - f_n$. Soit $\varepsilon > 0$, posons pour tout entier n ,

$$V_n(\varepsilon) = \{x \in X, g_n(x) < \varepsilon\}.$$

Comme g_n est continue on a que $V_n(\varepsilon)$ est ouvert et comme (g_n) converge simplement vers la fonction nulle on a $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n(\varepsilon)$. Comme X est compact il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $X = \bigcup_{n \leq N} V_n(\varepsilon)$ et comme (g_n) est décroissante, la suite $(V_n(\varepsilon))$ est croissante donc pour tout $m > N$, $X = V_m(\varepsilon)$. Ceci montre que (g_n) converge uniformément vers la fonction nulle, d'où le résultat. \square

1.2 L'espace de Sobolev $H^1(I)$

- **Leçons concernées :** 201 ; (203) ; 205 ; 208 ; 213 ; 234 ; 254 ; 255
- **Référence :** *Analyse fonctionnelle*, Haïm BREZIS (pages 121-123 et 129)
- **Remarque :** Les espaces de Sobolev ont été introduits pour la résolution d'équations aux dérivées partielles (comme par exemple l'équation de la chaleur). Cependant pour l'agrégation il n'est pas nécessaire d'être un spécialiste de ces EDP pour faire ce développement. De plus pour rester le plus élémentaire possible on ne parlera pas de distributions dans ce développement.

Définition 3 Soit I un intervalle ouvert et non vide de \mathbb{R} . On note $L^2(I)$ l'ensemble des fonctions définies sur I , à valeurs réelles et de carré intégrable sur I . On définit

$$H^1(I) = \{u \in L^2(I), \exists g \in L^2(I), \forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi\}.$$

Pour chaque fonction $u \in H^1(I)$, la fonction g associé est unique et on la note u' . Avec le langage des distributions, $H^1(I)$ est l'ensemble des fonctions dans $L^2(I)$ de dérivé (au sens des distribution) dans $L^2(I)$.

On munit $H^1(I)$ du produit scalaire

$$\langle u|v \rangle = \int_I u v + \int_I u' v'.$$

Théorème 4 Soit I un intervalle ouvert et non vide de \mathbb{R} . On a alors

- (i) $H^1(I)$ est un espace de Hilbert ;
- (ii) $H^1(I)$ s'injecte de façon continue dans $L^2(I)$;
- (iii) Si I est borné alors $H^1(I)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathcal{C}(\bar{I})$.

Démonstration :

(i) : Soit (u_n) une suite de Cauchy de $H^1(I)$.

Comme pour $u \in H^1(I)$ on a $\|u\|^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2$, il vient que les suites (u_n) et (u'_n) sont de Cauchy dans $L^2(I)$. Or $L^2(I)$ est complet donc il existe u et v dans $L^2(I)$ tel que

$$u_n \xrightarrow{L^2} u \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow{L^2} v.$$

De plus pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, on a $\int_I u_n \varphi' = - \int_I u'_n \varphi$, donc par passage à la limite² quand n tend vers $+\infty$ on obtient $\int_I u \varphi' = - \int_I v \varphi$.

Ainsi $u \in H^1(I)$ et $u' = v$. Donc (u_n) converge dans $H^1(I)$ vers $u \in H^1(I)$. Ceci démontre bien que $H^1(I)$ est un espace de Hilbert.

(ii) : L'application

$$\begin{array}{ccc} H^1(I) & \longrightarrow & L^2(I) \\ u & \longmapsto & u \end{array}$$

est une application linéaire injective. De plus elle est continue car pour tout $u \in H^1(I)$ on a $\|u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2 = \|u\|^2$.

2. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a $|\int_I (u_n - u) \varphi| \leq \|u_n - u\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2}$. De même avec u'_n et v . Ceci justifie le passage à la limite.

(iii) : On rappelle que l'on suppose ici I borné. Dans un premier temps nous allons construire une application linéaire injective de $H^1(I)$ dans $\mathcal{C}(\bar{I})$.

Pour cela supposons que $I =]a, b[$ et définissons pour $u \in H^1(I)$, l'application \tilde{u} définie sur \bar{I} par

$$\tilde{u} : x \mapsto \int_a^x u'.$$

Cette application est bien définie car $u' \in L^1(I)$ vu que I est borné et donc que $L^2(I) \subset L^1(I)$. De plus elle est continue sur \bar{I} . En effet pour $x \in \bar{I}$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in \bar{I}$ on a

$$|\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x)| \leq \left| \int_x^{x+h} |u'| \right| \leq \sqrt{h} \|u'\|_{L^2}.$$

Mais l'application $u \mapsto \tilde{u}$ n'est pas injectif car on a $\tilde{1} = \tilde{0}$.

Essayons de la rendre injective. On a pour $\varphi \in \mathcal{D}(I)$

$$\begin{aligned} \int_I \tilde{u} \varphi' &= \int_a^b \int_a^x u'(t) dt \varphi'(x) dx \\ &= \int_a^b \int_a^b u'(t) \varphi'(x) \chi_{[a,x]}(t) dt dx \\ &= \int_a^b \int_a^b u'(t) \varphi'(x) \chi_{[t,b]}(x) dx dt \\ &= \int_a^b \int_t^b \varphi'(x) dx u'(t) dt \\ &= - \int_I u' \varphi \\ &= \int_I u \varphi. \end{aligned}$$

On utilise à la troisième ligne le théorème de Fubini et à l'avant dernière ligne on utilise le fait que φ est à support compact dans I donc s'annule au voisinage de b . Ainsi pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ on a $\int_I (\tilde{u} - u) \varphi = 0$. Ainsi on en déduit³ qu'il existe $C_u \in \mathbb{R}$ tel que $u = \tilde{u} + C_u$ presque partout sur I . Posons alors

$$T : \begin{array}{ccc} H^1(I) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\bar{I}) \\ u & \longmapsto & \tilde{u} + C_u \end{array}.$$

L'application T est bien définie car $\tilde{u} + C_u$ est continue sur \bar{I} . De plus elle est linéaire et injective car pour $u \in H^1(I)$ on a $T(u) = u$ presque partout. Il reste donc à montrer que T est un opérateur compact⁴. Pour cela appliquons le théorème d'Ascoli à $T(\mathcal{B})$ avec \mathcal{B} la boule unité fermé de $H^1(I)$.

Tout d'abord $T(\mathcal{B}) \subset \mathcal{C}(\bar{I})$ et \bar{I} est compact. Ensuite $T(\mathcal{B})$ est borné dans $\mathcal{C}(\bar{I})$.

En effet pour $u \in \mathcal{B}$ et $x \in \bar{I}$ on a

$$|\tilde{u}(x)| = \left| \int_a^x u' \right| \leq \sqrt{x-a} \|u'\|_{L^2} \leq \sqrt{|I|} \|u\| \leq \sqrt{|I|}.$$

Or $\|u\| \leq 1$ donc $\|u\|_{L^2} = \|T(u)\|_{L^2} \leq 1$. Ainsi

$$1 \geq \|\tilde{u} + C_u\|_{L^2} \geq \|C_u\|_{L^2} - \|\tilde{u}\|_{L^2} \geq |C_u| \sqrt{|I|} - \|\tilde{u}\|_{\infty} \sqrt{|I|} \geq (|C_u| - \sqrt{|I|}) \sqrt{|I|}.$$

3. voir dans *Analyse fonctionnelle* de BREZIS le Lemme VIII.1 (page 122) et le lemme IV.2 (page 61)

4. il n'est pas nécessaire de vérifier que T est continue

Donc $|C_u| \leq \frac{1}{\sqrt{|I|}} + \sqrt{|I|}$ et il vient que $\|T(u)\|_\infty \leq \|\tilde{u}\|_\infty + |C_u| \leq 2\sqrt{|I|} + \frac{1}{\sqrt{|I|}}$.

Pour finir on vérifie que $T(\mathcal{B})$ est équicontinue. Soit $u \in \mathcal{B}$ et $(x, y) \in \bar{I}^2$, on a

$$|T(u)(x) - T(u)(y)| = |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq \left| \int_y^x |u'| \right| \leq \sqrt{|x-y|} \|u'\|_{L^2} \leq \sqrt{|x-y|}.$$

Ainsi par le théorème d'Ascoli l'ensemble $T(\mathcal{B})$ est relativement compact et T est bien un opérateur compact. \square

1.3 Densité de l'ensemble des fonctions continues partout et dérivables nulle part

- **Leçons concernées :** 201 ; 202 ; (205) ; 228 ; (241)
- **Référence :** *Analyse pour l'agrégation*, Claude ZUILY, Hervé QUEFFÉLEC (pages 270-272)
- **Remarque :** Le point clef de cette démonstration est l'utilisation du théorème de Baire. Ce développement démontre également l'existence d'une fonction continue sur $[0, 1]$ et dérivable en aucun point de $[0, 1]$. Cependant il ne donne pas d'exemple explicite d'une telle fonction (car l'axiome du choix se cache dans le théorème de Baire).

Proposition 5 Soit A l'ensemble des fonctions f continues sur $[0, 1]$, à valeurs réelles telles que pour tout $x \in [0, 1]$, f ne soit pas dérivable en x .

L'ensemble A est dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$ muni de la norme infini.

Démonstration :

Posons $B = \mathcal{C}([0, 1]) \setminus A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]), \exists x \in [0, 1], \forall y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq n|x - y|\}.$$

Dans le but d'utiliser le théorème de Baire, nous allons démontrer ces trois étapes :

- Étape 1 : on a l'inclusion $B \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$;
- Étape 2 : pour tout entier n , F_n est fermé dans $\mathcal{C}([0, 1])$;
- Étape 3 : pour tout entier n , $\overset{\circ}{F}_n = \emptyset$.

Étape 1 : Soit $f \in B$. Il existe $x \in [0, 1]$ tel que f soit dérivable en x car $f \notin A$.

Ainsi l'application

$$y \longmapsto \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

est bornée sur $[0, 1] \setminus \{x\}$.

Il existe donc $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $y \in [0, 1]$, $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$.

Ainsi $f \in F_M$ et on obtient que $B \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Étape 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et (f_k) une suite de F_n qui converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{C}([0, 1])$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $x_k \in [0, 1]$ tel que pour tout $y \in [0, 1]$ on ait $|f_k(x_k) - f_k(y)| \leq n|x_k - y|$.

Or $[0, 1]$ est compact donc il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et $x \in [0, 1]$ tels que $x_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x$.

Donc pour tout $y \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)})| + |f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)}) - f_{\varphi(k)}(y)| + |f_{\varphi(k)}(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f(x_{\varphi(k)})| + |f(x_{\varphi(k)}) - f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)})| + n|x_{\varphi(k)} - y| + \|f_{\varphi(k)} - f\|_{\infty} \\ &\leq |f(x) - f(x_{\varphi(k)})| + 2\|f_{\varphi(k)} - f\|_{\infty} + n|x_{\varphi(k)} - y| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} n|x - y|. \end{aligned}$$

Ainsi $f \in F_n$ et on obtient que l'ensemble F_n est fermé dans $\mathcal{C}([0, 1])$.

Étape 3 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in F_n$. Montrons que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists g \in \mathcal{C}([0, 1]) \setminus F_n, \|f - g\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

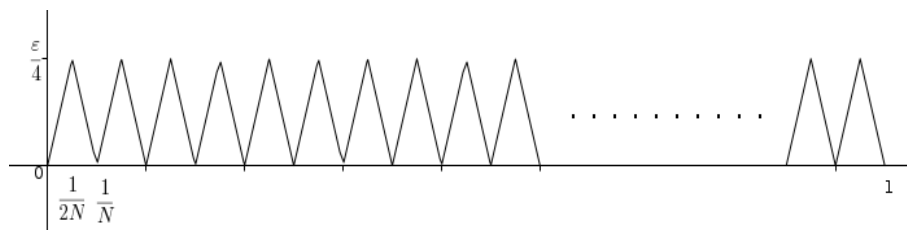
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\|f - P\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons alors $M = \|P'\|_\infty$ et $N \geq 2 \frac{M+n+1}{\varepsilon}$.

Considérons maintenant l'application g_0 , $\frac{1}{N}$ -périodique, définie sur $[0, 1]$ par

$$g_0 : x \mapsto \begin{cases} \frac{\varepsilon N}{2} x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2N}\right] \\ \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon N}{2} x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2N}, \frac{1}{N}\right] \end{cases} .$$

Voici le graphe de la fonction g_0



Il est facile de voir que $\|g_0\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{4}$.

Posons $g = P + g_0$ et vérifions que cette fonction est bien celle que l'on cherche.

On a d'une part que

$$\|f - g\|_\infty \leq \|f - P\|_\infty + \|g_0\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \leq \varepsilon.$$

D'autre part montrons que $g \notin F_n$ c'est-à-dire que

$$\forall x \in [0, 1], \exists y \in [0, 1], |g(x) - g(y)| > n|x - y|.$$

Tout d'abord pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$ on a $|g(x) - g(y)| \geq |g_0(x) - g_0(y)| - |P(x) - P(y)|$.

De plus on a par le théorème des accroissements finis que $|P(x) - P(y)| \leq M|x - y|$.

Fixons maintenant $x \in [0, 1]$. Il existe $y \in [0, 1]$ différent de x tel que x et y soit dans un même intervalle de la forme $\left[\frac{k}{2N}, \frac{k+1}{2N}\right]$ avec $k \in \llbracket 0, 2N - 1 \rrbracket$.

Ainsi on peut appliquer le théorème des accroissements finis à g_0 qui est dérivable sur l'intervalle $[\min(x, y), \max(x, y)]$. Il existe donc $z \in [\min(x, y), \max(x, y)]$ tel que

$$\begin{aligned} |g_0(x) - g_0(y)| &= |g_0'(z)| |x - y| \\ &= \frac{\varepsilon N}{2} |x - y| \\ &\geq (M + n + 1) |x - y|. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient finalement que

$$|g(x) - g(y)| \geq |g_0(x) - g_0(y)| - |P(x) - P(y)| \geq (n + 1) |x - y| > n|x - y|$$

ce qui conclut cette étape car on vient de montrer que F_n ne contient aucune boule de rayon ε ceci pour tout $\varepsilon > 0$. Donc F_n° est vide.

Ainsi toutes les hypothèses du théorème de Baire sont réunies et on a

$$\overset{\circ}{B} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{F_n} = \emptyset.$$

Donc $\bar{A} = \mathcal{C}([0, 1]) \setminus \overset{\circ}{B} = \mathcal{C}([0, 1])$. □

Théorème 6 (de Baire)

Soit (E, d) un espace métrique complet. On a

- (i) Si (O_n) est une suite d'ouverts denses de E alors $\bigcap_n O_n$ est dense ;
- (ii) Si (F_n) est une suite de fermés de E d'intérieurs vides alors $\bigcup_n F_n$ est d'intérieur vide.

Démonstration :

(i) : Pour montrer ce résultat nous allons utiliser la caractérisation suivante de densité

$$A \text{ est dense dans } E \iff \forall O \text{ ouvert de } E, A \cap O \neq \emptyset.$$

Soit (O_n) est une suite (dénombrable) d'ouverts denses de E et O un ouvert de E .

Montrons que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \cap O \neq \emptyset$ en « construisant » une suite de Cauchy (x_k) convergeant vers $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \cap O$.

Contrairement à ce que laisse penser la plupart des références, la construction de la suite (x_k) n'est pas une construction par récurrence dans le sens où elle n'utilise pas l'axiome de récurrence⁵.

Pour monter l'existence d'une telle suite (x_k) nous allons utiliser l'axiome du choix dépendant. Cet axiome dit que si X est un ensemble non vide et si \mathcal{R} est une relation binaire sur X vérifiant

$$\forall x \in X, \exists y \in X, x \mathcal{R} y$$

alors il existe une suite $(x_k) \in X^{\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier k , $x_k \mathcal{R} x_{k+1}$.

Posons $X = \{(B(x, r), k), x \in E, k \in \mathbb{N}, 0 < r < 2^{-k}\}$ avec $B(x, r) = \{y \in E, d(x, y) < r\}$ et définissons \mathcal{R} sur X^2 par

$$(B(x, r), k) \mathcal{R} (B(y, s), l) \iff l = k + 1 \text{ et } B(y, s) \subset B\left(x, \frac{r}{2}\right) \cap \left(\bigcap_{n \leq k} O_n\right) \cap O$$

Soit $(B(x, r), k) \in X$.

En tant qu'intersection finie d'ouverts denses, l'ensemble $B\left(x, \frac{r}{2}\right) \cap \left(\bigcap_{n \leq k} O_n\right) \cap O$ est ouvert et dense. Ainsi il existe $y \in E$ et $s \in]0, \frac{r}{2}[$ tel que $B(y, s) \subset B\left(x, \frac{r}{2}\right) \cap \left(\bigcap_{n \leq k} O_n\right) \cap O$.

On a donc $(B(y, s), k + 1) \in X$ et

$$(B(x, r), k) \mathcal{R} (B(y, s), k + 1).$$

D'après l'axiome du choix dépendant il existe $(x_k) \in E^{\mathbb{N}}$ et $(r_k) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ tels que⁶

$$\forall k \in \mathbb{N}, B(x_{k+1}, r_{k+1}) \subset B\left(x_k, \frac{r_k}{2}\right) \cap \left(\bigcap_{n \leq k} O_n\right) \cap O.$$

De plus la suite (r_k) tend vers 0 par définition de X et comme pour tout entier k , $\overline{B(x_{k+1}, \frac{r_{k+1}}{2})} \subset B(x_{k+1}, r_{k+1}) \subset B(x_k, \frac{r_k}{2})$ on a par le théorème des fermés emboîtés⁷

$$\emptyset \neq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{B\left(x_k, \frac{r_k}{2}\right)} \subset \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n\right) \cap O.$$

D'où le résultat. Le (ii) se déduit de la propriété $\overline{E \setminus A} = E \setminus \overset{\circ}{A}$. □

5. Cet axiome dit qu'étant donné X un ensemble non vide, $a \in X$ et h une application définie sur $\mathbb{N} \times X$ et à valeurs dans X , il existe une unique suite $(x_k) \in X^{\mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = a$ et pour tout entier k , $x_{k+1} = h(k, x_k)$.

6. En fait on devrait considérer également une suite d'entier (n_k) mais vu que cette suite serait strictement croissante et vérifierait $k < n_k$, le résultat reste vrai.

7. Ce qui revient à dire que (x_k) est de Cauchy donc converge vers $x \in \overline{B(x_n, \frac{r_n}{2})}$ pour tout entier n .

1.4 Théorème de Montel

- **Leçons concernées** : 201 ; 203 ; 241 ; 245
- **Référence** : *Analyse réelle et complexe*, Walter RUDIN (page 329 voir familles normales)
- **Remarque** : Ce théorème permet de caractériser les parties compactes de l'ensemble des fonctions holomorphes sur un ouvert. Ce sont les parties fermées et bornées. Bien sûr tout ceci n'a un sens que si on définit une distance mais on préférera ici éviter de parler de cela dans le développement. Le point clef de ce développement est l'utilisation du théorème de Montel et le procédé d'extraction diagonal.

Théorème 7 (de Montel)

Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{C} . On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω .

Soit $(f_k) \in \mathcal{H}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout compact K de Ω ,

$$\exists M > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \forall z \in K, |f_k(z)| \leq M.$$

Alors il existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tel que (f_k) admette une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de Ω vers f .

Démonstration :

Commençons par construire (K_n) une suite exhaustive de compacts pour Ω , c'est-à-dire une suite (K_n) qui vérifie

- (i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_n est un compact de Ω ;
- (ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$;
- (iii) $\Omega = \bigcup_{n \geq 0} K_n$.

Il suffit de prendre $K_n = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq n \text{ et } d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq 2^{-n}\}$.

On va ensuite utiliser le théorème d'Ascoli appliqué à la suite (f_k) sur le compact K_n .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est continue (car holomorphe) sur le compact K_n et pour tout $x \in K_n$, l'ensemble $\{f_k(x), k \in \mathbb{N}\}$ est bornée car (f_k) est uniformément bornée sur K_n .

Montrons que la suite (f_k) est équicontinue sur K_n .

Soit $x \in K_n$, il existe δ tel que $B(x, \delta) \subset K_{n+1}$ car $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$. De plus d'après l'hypothèse du théorème il existe $C > 0$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall z \in K_{n+1}, |f_k(z)| \leq C$.

Soit $\varepsilon > 0$, posons $\alpha = \min\left(\frac{\delta\varepsilon}{2C}, \frac{\delta}{2}\right) > 0$.

Pour tout $y \in B(x, \alpha)$ et $k \in \mathbb{N}$ on a par la formule de Cauchy pour le lacet $\gamma : t \mapsto x + \delta e^{2i\pi t}$ que

$$\begin{aligned} |f_k(x) - f_k(y)| &= \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f_k(\xi)}{\xi - x} - \frac{f_k(\xi)}{\xi - y} d\xi \right| \\ &= \left| \frac{x - y}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f_k(\xi)}{(\xi - x)(\xi - y)} d\xi \right| \\ &\leq \frac{|x - y|}{2\pi} \frac{2\pi\delta C}{\frac{\delta^2}{2}} \\ &\leq \frac{2C}{\delta} \alpha \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

- En effet on a pour $t \in [0, 1]$, on a
- $|f_k(\gamma(t))| \leq C$;
 - $|\gamma(t) - x| = \delta$;
 - $|x - y| \leq \alpha \leq \frac{\delta}{2}$;
 - $|\gamma(t) - y| \geq |\delta e^{2i\pi t}| - |x - y| \geq \frac{\delta}{2}$.

Ainsi on a

$$\forall x \in K_n, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall y \in B(x, \alpha) \cap K_n, \forall k \in \mathbb{N}, |f_k(x) - f_k(y)| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite (f_k) est équicontinue sur K_n .

On en déduit d'après le théorème d'Ascoli qu'il existe $\varphi_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f_{\varphi_n(k)})_k$ converge uniformément sur K_n .

On va maintenant utiliser le procédé diagonal pour extraire une suite de (f_k) qui converge uniformément sur tous les K_n . Pour cela on construit⁸ une suite de fonctions strictement croissantes (ψ_n) qui vérifie $\psi_0 = \varphi_0$ et pour $n > 0$, ψ_n telle que $(f_{\psi_0 \circ \dots \circ \psi_{n-1} \circ \psi_n(k)})_k$ converge uniformément sur K_n (l'existence de ψ_n vient de ce qui précède).

Maintenant si on pose $\psi(k) = \psi_0 \circ \dots \circ \psi_k(k)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f_{\psi(k)})$ est une sous suite de $(f_{\psi_0 \circ \dots \circ \psi_{n-1} \circ \psi_n(k)})_k$ qui converge uniformément sur K_n . Ainsi $(f_{\psi(k)})$ converge uniformément sur tout les K_n . On notera f sa limite simple sur Ω . La fonction f est holomorphe sur Ω par le théorème de Weierstrass.

Pour finir la démonstration prenons K un compact quelconque de Ω , on a $d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$ car $K \subset \Omega$ et Ω est ouvert. Ainsi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 2^{-n}$ et donc $K \subset K_n$.

De plus $(f_{\psi(k)})$ converge uniformément vers f sur K_n donc sur K . D'où le résultat. \square

Nous allons maintenant traduire le théorème de Montel d'un point de vu topologique. Pour cela définissons tout d'abord une distance sur $\mathcal{H}(\Omega)$.

Définition 8 Soit (K_n) suite exhaustive de compacts pour Ω comme défini au début de la démonstration du théorème de Montel. Pour f et g dans $\mathcal{H}(\Omega)$, posons

$$d(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, \|f - g\|_{K_n})$$

avec $\|f - g\|_{K_n} = \sup(\{|f(x) - g(x)|, x \in K_n\})$.

Ainsi d définit une distance sur $\mathcal{H}(\Omega)$ et quelque soit la suite exhaustive de compacts (K_n) , cette distance d définit une même topologie. On appelle cette topologie, la topologie de la convergence uniforme sur tout compact car pour $(f_n) \in \mathcal{H}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$,

$$(f_n) \text{ converge uniformément sur tout compact de } \Omega \text{ vers } f \iff d(f_n, f) \longrightarrow 0.$$

Proposition 9 L'espace $(\mathcal{H}(\Omega), d)$ est complet.

Voici maintenant la version topologique du théorème de Montel.

Théorème 10 (de Montel)

On munit $\mathcal{H}(\Omega)$ de la topologie de la convergence sur tout compact.

Une partie A de $\mathcal{H}(\Omega)$ est compacte si et seulement si A est fermée et bornée.

8. Toujours grâce l'axiome du choix dépendant et non par récurrence

1.5 Théorème de Riesz-Fischer

- **Leçons concernées :** 201 ; 205 ; 208 ; 234 ; 235 ; 241
- **Référence :** *Analyse fonctionnelle*, Haïm BREZIS (page 57)
- **Remarque :** Ce théorème est assez standard mais présente quelques subtilités souvent passées sous silence dans les livres.

Définition 11 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, \infty]$.

Si $p \in [1, \infty[$, on note $\mathcal{L}^p(\Omega)$ l'ensemble des fonctions f définies sur Ω , à valeurs complexes et telles que f^p soit intégrable sur Ω .

On note $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables f définies sur Ω , à valeurs complexes telles qu'il existe $M > 0$ et $E \in \mathcal{T}$ vérifiant $\mu(E) = 0$ et $\forall x \in \Omega \setminus E, |f(x)| \leq M$.

On pose \sim la relation d'équivalence définie sur $\mathcal{L}^p(\Omega)$ par

$$f \sim g \iff \exists E \in \mathcal{T} \text{ vérifiant } \mu(E) = 0 \text{ et } \forall x \in \Omega \setminus E, f(x) = g(x).$$

Finalement on définit pour $p \in [1, \infty]$ l'espace quotient $L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega)/\sim$.

Pour $p \in [1, \infty[$, on définit sur $L^p(\Omega)$ la norme $\|\cdot\|_p$ par

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On définit sur $L^\infty(\Omega)$ la norme $\|\cdot\|_\infty$ par

$$\|f\|_\infty = \inf(\{M > 0, \exists E \in \mathcal{T} \text{ vérifiant } \mu(E) = 0 \text{ et } \forall x \in \Omega \setminus E, |f(x)| \leq M\}).$$

Théorème 12 Pour tout $p \in [1, \infty]$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

De plus de toute suite de $L^p(\Omega)$ qui converge dans $L^p(\Omega)$ vers une fonction $f \in L^p(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge μ -presque partout vers f .

Démonstration :

On a tout d'abord que $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel normé⁹. Montrons que $L^p(\Omega)$ est complet. Pour cela on va prendre une suite de Cauchy (f_n) dans $L^p(\Omega)$. On va montrer qu'elle converge μ -presque partout vers une fonction f . Ensuite on montrera que $f \in L^p(\Omega)$. Pour finir on établira la convergence de (f_n) vers f dans $L^p(\Omega)$.

Intéressons-nous dans un premier temps au cas où $p = \infty$.

Soit (f_n) une suite de Cauchy de $L^\infty(\Omega)$. On a donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k > 0, \forall n, m \geq N_k, \|f_n - f_m\|_\infty \leq \frac{1}{k}.$$

Par définition de la norme infini on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall n, m \geq N_k, \exists E_{k,n,m} \in \mathcal{T}, \mu(E_{k,n,m}) = 0 \text{ et } \forall x \in \Omega \setminus E_{k,n,m}, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k}.$$

Posons $E = \bigcup_{k,n,m} E_{k,n,m}$. L'ensemble E est négligeable¹⁰ en tant qu'union dénombrable d'ensembles négligeables.

9. Résultat admis

10. On dira qu'un ensemble est négligeable s'il appartient à la tribu et s'il est de mesure nulle.

De plus pour tout $x \in \Omega \setminus E$ on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k > 0, \forall n, m \geq N_k, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k}. \quad (*)$$

Pour $x \in \Omega \setminus E$, la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy donc converge vers $f(x)$ car \mathbb{C} est complet. Ainsi (f_n) converge μ -presque partout vers f .¹¹

Maintenant en faisant tendre m vers l'infini dans $(*)$, on obtient que pour tout $x \in \Omega \setminus E$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k > 0, \forall n \geq N_k, |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}.$$

Ainsi on que pour tout $x \in \Omega \setminus E$, $|f(x)| \leq 1 + |f_{N_1}(x)|$. Or $f_{N_1} \in L^\infty(\Omega)$ donc il existe $M > 0$ et un ensemble négligeable $F \subset \Omega$ tel que pour tout $x \in \Omega \setminus F$ on ait $|f_{N_1}(x)| \leq M$. Ainsi pour tout $x \in E \cup F$ on a $|f(x)| \leq 1 + M$ donc $f \in L^\infty(\Omega)$ car $\mu(E \cup F) = 0$.

De plus comme E est négligeable on a, par définition de la norme infini,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k > 0, \forall n \geq N_k, \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{k}.$$

Ainsi (f_n) converge vers f dans $L^\infty(\Omega)$ ce qui démontre que $L^\infty(\Omega)$ est complet.

La seconde partie du théorème a été établie après $(*)$.

Intéressons-nous maintenant au cas où $p \in [1, \infty[$.

Soit (f_n) une suite de Cauchy de $L^p(\Omega)$. On a donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists N_k > 0, \forall n, m \geq N_k, \|f_n - f_m\|_p \leq \frac{1}{2^k}. \quad (**)$$

Ainsi en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) = \sum_{k=0}^n N_k$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_p \leq \frac{1}{2^n}$$

ceci car $\varphi(n)$ et $\varphi(n+1)$ sont supérieurs à N_n . De plus φ est strictement croissante.

Posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$g_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n |f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x)|.$$

La fonction g_n est dans $L^p(\Omega)$ en tant que somme finie de fonctions de $L^p(\Omega)$ et on a par l'inégalité de Minkowski

$$\|g_n\|_p \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \leq 2.$$

De plus comme pour tout $x \in \Omega$ la suite $(g_n(x))$ est une suite de réelles croissante, elle converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers $g(x)$. On définit ainsi une fonction mesurable $g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. En appliquant le théorème de convergence monotone à la suite (g_n^p) qui est croissante et à valeur dans \mathbb{R}^+ on obtient que

$$\int_{\Omega} g^p \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n^p \, d\mu \leq 2^p.$$

Ainsi $g \in L^p(\Omega)$ et il existe un ensemble E négligeable tel que pour tout $x \in \Omega \setminus E$, $g(x) < \infty$. Pour tout $x \in \Omega \setminus E$, la série $\sum (f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x))$ est absolument convergente, donc elle converge car \mathbb{C} est complet. Ainsi il existe $f(x) \in \mathbb{C}$ tel que $(f_{\varphi(n)}(x))$ converge vers $f(x)$.

11. En fait on a pas définie f sur E mais cela importe peu. On peut par exemple décider que f est nulle sur E .

La fonction f est mesurable en tant que limite simple de fonctions mesurables et vérifie

$$|f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| f_{\varphi(0)}(x) + \sum_{k=0}^n (f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x)) \right| \leq |f_{\varphi(0)}(x)| + |g(x)|.$$

Ainsi $f \in L^p(\Omega)$ car $f_{\varphi(0)}$ et g sont dans $L^p(\Omega)$.

Il reste à montrer que (f_n) converge dans $L^p(\Omega)$ vers f .

Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $m \geq N_k$ on a grâce au lemme de Fatou et à (**) que

$$\int_{\Omega} |f - f_m|^p \, d\mu = \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_{\varphi(n)} - f_m|^p \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_{\varphi(n)} - f_m|^p \, d\mu \leq \left(\frac{1}{2^k}\right)^p.$$

Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe N_k tel que pour tout $m \geq N_k$, $\|f - f_m\|_p \leq 2^{-k}$.

Ceci montre bien que la suite (f_n) converge dans $L^p(\Omega)$ vers la fonction $f \in L^p(\Omega)$.

Montrons maintenant la seconde partie du théorème dans le cas où $p \in [1, \infty[$. Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ qui converge vers f dans $L^p(\Omega)$. Cette suite est de Cauchy donc d'après ce qui précède il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f_{\varphi(n)})$ converge presque partout vers une fonction $g \in L^p(\Omega)$. Toujours d'après ce qui précède on a que la suite (f_n) converge dans $L^p(\Omega)$ vers g donc par unicité de la limite on a $f = g$ ce qui montre le résultat. \square

Le théorème précédent nous dit que de toute suite de $L^p(\Omega)$ qui converge dans $L^p(\Omega)$ vers une fonction $f \in L^p(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge μ -presque partout vers f .

On peut alors se demander existe-t-il une suite (f_n) de fonctions dans $L^p(\Omega)$ qui converge dans $L^p(\Omega)$ mais qui ne converge pas presque partout vers sa limite ?

La réponse est oui si $p \in [1, \infty[$. En voici un contre-exemple.

Proposition 13 On définit d'abord pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les entiers $k_n = E\left(\frac{\ln(n)}{\ln(2)}\right)$ et $r_n = n - 2^{k_n}$.

On a ainsi $n = 2^{k_n} + r_n$ et $0 \leq r_n < 2^{k_n}$.

Définissons maintenant la suite (f_n) de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[\frac{r_n}{2^{k_n}}, \frac{r_n+1}{2^{k_n}}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a alors que la suite (f_n) converge vers 0 dans $L^p([0, 1])$ (muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue) pour tout $p \in [1, \infty[$ mais (f_n) ne converge pas presque partout vers 0.

Démonstration :

Il est intéressant de visualiser la situation. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in [2^k, 2^{k+1} - 1]$ les fonctions f_n peuvent être représentées par un segment de longueur $\frac{1}{2^k}$ qui parcourt l'intervalle $[0, 1]$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on pose $N_k = 2^k$ et on a pour tout $n \geq N_k$

$$\|f_n\|_p \leq \left(\frac{1}{2^k}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Donc (f_n) converge vers 0 dans $L^p([0, 1])$.

De plus (f_n) ne converge pas presque partout vers 0. En effet si cela était le cas il existerait un ensemble E négligeable et $N > 0$ tel que pour tout $x \in [0, 1] \setminus E$ et pour tout $n \geq N$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2}$. Or pour $x \in [0, 1] \setminus E$ on a, en posant $r = E(x2^N)$, que $f_{2^N+r}(x) = 1 > \frac{1}{2}$ car $\frac{r}{2^N} \leq x < \frac{r+1}{2^N}$ ce qui est absurde car $2^N \geq N$. \square

1.6 Théorème de Sarkovskii

- **Leçons concernées :** (204) ; 206 ; 223 ; 226 ; (228)
- **Référence :** *Oraux X-ENS, analyse 1*, Serge FRANCINO, Hervé GIANELLA, Serge NICOLAS (pages 92-94)
- **Remarque :** Ce théorème est une application non triviale du théorème des valeurs intermédiaires. Ce résultat a été établi il y a peu de temps en 1975.

Définition 14 Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow I$ une fonction continue. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que f admet un p -cycle s'il existe $x_0 \in I$ tel que

$$\begin{cases} \forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, f^k(x_0) \neq x_0 \\ f^p(x_0) = x_0 \end{cases}.$$

Théorème 15 Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow I$ une fonction continue. Si f admet un 3-cycle alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, f admet un p -cycle.

Démonstration :

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow I$ une fonction continue.

Pour démontrer ce théorème nous avons d'abord besoin de deux lemmes : le premier est assez général et peut s'appliquer à différentes situations (on pourra l'admettre). Le second est au cœur de la preuve du théorème. On utilisera durant toute la preuve la notation suivante.

Notation : Si K et L sont des segments inclus dans I vérifiant $K \subset f(L)$, on note alors $K \rightarrow L$.

Lemme 16 Soit J et K deux segments inclus dans I vérifiant $K \rightarrow J$. Il existe alors un segment L inclus dans J vérifiant $K = f(L)$.

Démonstration :

L'idéal est de visualiser la situation sur un dessin. On va construire le segment L comme étant le segment le plus à « gauche » vérifiant la propriété. Pour cela on va d'abord fixer sa borne supérieure et ensuite sa borne inférieure.

Soit $(\alpha, \beta) \in I^2$ tel que $K = [\alpha, \beta]$.

Comme $K \subset f(J)$, il existe $(a, b) \in J^2$ tel que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$.

Si $\alpha = \beta$ alors $L = \{a\}$ convient. Sinon on a $\alpha < \beta$ et $a \neq b$.

Supposons que $a < b$.

Posons alors $v = \inf(\{x \in [a, b], f(x) = \beta\})$ et $u = \sup(\{x \in [a, v], f(x) = \alpha\})$ et montrons que $f([u, v]) = K$. Les réels u et v sont bien définis car les ensembles considérés dans les bornes inf et sup sont non vide (car $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$).

La fonction f étant continue on a grâce à la caractérisation séquentielle de la borne inf et sup que $f(u) = \alpha$ et $f(v) = \beta$. Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaire on a $[\alpha, \beta] \subset f([u, v])$.

Soit $t \in [u, v]$, montrons que $f(t) \in [\alpha, \beta]$.

Si $f(t) < \alpha < \beta = f(v)$ alors il existe $s \in]t, v[$ tel que $f(s) = \alpha$ ce qui est absurde par définition de u car $s \in \{x \in [a, v], f(x) = \alpha\}$ et $u < s$.

De même si $\beta < f(t)$ alors il existe $s \in]u, t[$ tel que $f(s) = \beta$ ce qui est absurde par définition de v car $s < t \leq v$.

Ainsi $f(t) \in [\alpha, \beta]$ et on a $f([u, v]) = [\alpha, \beta]$ ce qui conclut la preuve dans le cas $a < b$.

Si $b < a$ on pose $g = -f$ et on a $g(b) = -\beta < -\alpha = g(a)$. donc en appliquant ce qui précède à g , on a l'existence de u et v dans $[b, a]$ vérifiant $g([u, v]) = [-\beta, -\alpha]$. Ainsi $f([u, v]) = [\alpha, \beta]$ ce qui achève la preuve. \square

Lemme 17 Soit I_0, \dots, I_{n-1} des segments inclus dans I et vérifiant

$$I_0 \rightarrow I_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow I_1 \rightarrow I_0.$$

Il existe alors $x_0 \in I_0$ tel que

$$\begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, f^k(x_0) \in I_k \\ f^n(x_0) = x_0 \end{cases}.$$

Démonstration :

Traisons d'abord le cas $n = 1$, c'est-à-dire lorsque $I_0 \rightarrow I_0$.

Soit $(a, b) \in I_0^2$ tel que $I_0 = [a, b]$ et soit $(\alpha, \beta) \in I_0^2$ tel que $f(\alpha) = a$ et $f(\beta) = b$. Posons

$$g : \begin{array}{ccc} [\alpha, \beta] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{array}.$$

La fonction g est continue et vérifie $g(\alpha) = a - \alpha \leq 0$ et $g(\beta) = b - \beta \geq 0$ car $\alpha, \beta \in I_0 = [a, b]$. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in I_0$ tel que $f(c) = c$ ce qui conclut le cas $n = 1$.

Supposons maintenant $n \geq 2$. On a

$$I_0 \rightarrow I_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow I_1 \rightarrow I_0.$$

En lisant ce graphe de la gauche vers la droite on obtient

- $I_1 \subset f(I_0)$ donc grâce au lemme 16, il existe un segment $J_1 \subset I_0$ tel que $I_1 = f(J_1)$;
- $I_2 \subset f(I_1) = f^2(J_1)$ donc il existe un segment $J_2 \subset J_1$ tel que $I_2 = f^2(J_2)$;
- $I_3 \subset f(I_2) = f^3(J_2)$ donc il existe un segment $J_3 \subset J_2$ tel que $I_3 = f^3(J_3)$.

Ainsi on construit récursivement une suite de segments

$$J_{n-1} \subset J_{n-2} \subset \dots \subset J_2 \subset J_1 \subset I_0$$

vérifiant pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $f^k(J_k) = I_k$.

De plus on a $I_0 \subset f(I_{n-1}) = f^n(J_{n-1})$ donc il existe un segment $J_n \subset J_{n-1}$ tel que $I_0 = f^n(J_n)$. Or $J_n \subset I_0 = f^n(J_n)$ donc d'après le cas « $n = 1$ » traité au début appliqué à f^n , il existe $x_0 \in J_n$ tel que $f^n(x_0) = x_0$.

Enfin, comme $x_0 \in J_n$ et d'après la suite d'inclusions que vérifie les J_k on a pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $f^k(x_0) \in I_k$. □

Revenons à la démonstration du théorème.

La fonction f admet un 3-cycle donc il existe $a \in I$ tel que

$$\begin{cases} b = f(a) \neq a \\ c = f^2(a) \neq a \\ f^3(a) = a \end{cases}.$$

De plus $b \neq c$ car sinon $f(b) = f(c)$ et donc on aurait $a = c$ ce qui est absurde.

Ainsi b et c sont aussi des 3-cycles et quitte à les renommer on peut supposer que $a = \min(a, b, c)$.

On a donc deux cas qui se présente : soit $a < b < c$ soit $a < c < b$.

Si $a < b < c$ posons $I_0 = [a, b]$ et $I_1 = [b, c]$.

On a $f(a) = b$ et $f(b) = c$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires on a $[b, c] \subset f(I_0)$.

Ainsi $I_1 \subset f(I_0)$ c'est-à-dire $I_1 \rightarrow I_0$.

On a $f(b) = c$ et $f(c) = a$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires on a $[a, c] \subset f(I_1)$.

Ainsi $I_0 \subset f(I_1)$ et $I_1 \subset f(I_1)$ c'est-à-dire $I_0 \rightarrow I_1$ et $I_1 \rightarrow I_1$.

Si $a < c < b$ posons $I_0 = [c, b]$ et $I_1 = [a, c]$.

On a $f(b) = c$ et $f(c) = a$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires on a $[a, c] \subset f(I_0)$.

Ainsi $I_1 \subset f(I_0)$ c'est-à-dire $I_1 \rightarrow I_0$.

On a $f(a) = b$ et $f(c) = a$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires on a $[a, b] \subset f(I_1)$.

Ainsi $I_0 \subset f(I_1)$ et $I_1 \subset f(I_1)$ c'est-à-dire $I_0 \rightarrow I_1$ et $I_1 \rightarrow I_1$.

Dans les deux cas on obtient que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

$$I_0 \rightarrow \underbrace{I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_1}_{p \text{ fois}} \rightarrow I_0.$$

D'après le lemme 17 il existe $x_0 \in I_0$ tel que $f^p(x_0) = x_0$ et pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $f^k(x_0) \in I_1$.

Si $p = 1$ alors x_0 est un point fixe de f donc c'est un 1-cycle.

Supposons qu'il existe $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ tel que $f^k(x_0) = x_0$. On aurait alors $x_0 \in I_0 \cap I_1$ et suivant les cas $I_0 \cap I_1 = \{b\}$ ou $I_0 \cap I_1 = \{c\}$. Mézalor on aurait aussi $f(x_0) \in I_0 \cap I_1$ ce qui est absurde car $f(x_0) \neq x_0$.

Ainsi f admet un p -cycle pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. □

Si ce développement est choisi il faut être capable d'exhiber une fonction admettant un 3-cycle et donc un p -cycle pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Pour cela on peut prendre une fonction polynomiale P vérifiant $P(0) = 1$, $P(1) = 2$ et $P(2) = 0$. En utilisant, par exemple, un polynôme d'interpolation de Lagrange on obtient que la fonction

$$P : x \mapsto -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = -\frac{1}{2}(x-2)(3x+1)$$

admet un 3-cycle.

1.7 Théorème d'Abel et contre-exemples

- **Leçons concernées :** (207) ; (223) ; 230 ; (235) ; 241 ; 243 ; 244 ; 245 ; 247
- **Référence :** *Analyse*, Xavier GOURDON (pages 252-254)
- **Remarque :** Le théorème d'Abel (angulaire) est un résultat assez standard pour l'agrégation. Mais le contre-exemple qui suit est un résultat peu connu et très original. Il n'est présenté dans aucune référence de base pour l'agrégation.

Théorème 18 (d'Abel)

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égale à 1 et $f : z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ sa somme.

Pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ posons (voir le dessin à la suite de la démonstration)

$$\Delta_\theta = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \omega \in [-\theta, \theta], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}.$$

Si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ est convergente alors on a pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$,

$$f(z) \xrightarrow[\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_\theta}]{\quad} \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Démonstration :

Notons pour $n \in \mathbb{N}$

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad S_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad \text{et} \quad R_n = S - S_n.$$

Soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $z \in \Delta_\theta$. Intéressons-nous à la quantité $|f(z) - S|$. Pour cela regardons les sommes finis et faisons une transformation d'Abel. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n z^n - S_N &= \sum_{n=1}^N a_n (z^n - 1) \\ &= \sum_{n=1}^N (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^N R_n (z^n - 1) \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} R_n z^n (z - 1) + R_0 (z - 1) + R_N (z^N - 1) \\ &= (z - 1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n + R_N (z^N - 1). \end{aligned}$$

Or $|z| < 1$ et $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0$ donc par passage à la limite on obtient

$$f(z) - S = (z - 1) \sum_{n=0}^{\infty} R_n z^n.$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|R_n| < \varepsilon$. On a alors

$$\begin{aligned} |f(z) - S| &\leq |z - 1| \sum_{n=0}^N R_n |z|^n + \varepsilon |z - 1| \sum_{n=N+1}^{\infty} |z|^n \\ &\leq |z - 1| \sum_{n=0}^N R_n + \varepsilon \frac{|z - 1|}{1 - |z|}. \end{aligned}$$

Soit $\alpha = \min(\varepsilon, \cos(\theta))$. Soit $z \in \Delta_\theta$ tel que $|z - 1| \leq \alpha$.

Comme $z \in \Delta_\theta$, il existe $\rho > 0$ et $\omega \in [-\theta, \theta]$ tel que $z = 1 - \rho e^{i\omega}$. Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} |z|^2 &= 1 - 2\rho \cos(\omega) + \rho^2 \\ &\leq 1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta) \\ &\leq 1 - \rho \cos(\theta). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \frac{|z-1|}{1-|z|} &= \frac{|z-1|(1+|z|)}{1-|z|^2} \\ &\leq \frac{2\rho}{\rho \cos(\theta)} \leq \frac{2}{\cos(\theta)} \end{aligned}$$

On obtient donc pour tout $z \in \Delta_\theta$ vérifiant $|z - 1| \leq \alpha$ que

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon \left(\sum_{n=0}^N R_n + \frac{2}{\cos(\theta)} \right).$$

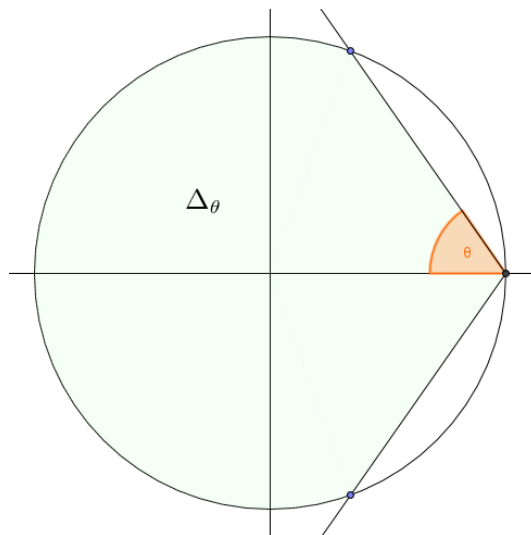
Ainsi

$$f(z) \xrightarrow[\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_\theta}]{z \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

□

On vient d'établir que pour toute série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence égale à 1,

si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ est convergente alors on a pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $f(z) \xrightarrow[\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_\theta}]{z \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ avec



On peut alors se demander si l'hypothèse de tendre vers 1 suivant le secteur Δ_θ est nécessaire. La réponse est oui et est donnée par le contre exemple suivant. L'idée est de construire une suite de complexe (z_k) qui tend « tangentiellement » vers 1 mais tel que $(f(z_k))$ ne converge pas vers $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Contre-exemple 19

Soit (m_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $m_{2n} = 2 \times 3^n$ et $m_{2n+1} = 3^{n+1}$.
On considère la série entière

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{m_n}$$

qui est de rayon de convergence égal à 1 et on note $f : z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{m_n}$ sa somme.

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ est convergente mais il existe une suite $(r_k) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ tel que la suite (z_k) définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $z_k = r_k e^{i\pi 3^{-k}}$ vérifie $z_k \in \mathbb{D}$ et $|f(z_k)| \geq k$ ce qui montrera que la suite $(f(z_k))$ ne converge pas vers $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

Démonstration :

On remarque tout d'abord que la suite (m_n) est strictement croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$2 \times 3^n < 3^{n+1} < 2 \times 3^{n+1}.$$

Ainsi la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{m_n}$ (avec $a_n = \frac{(-1)^p}{p+1}$ si $n = m_p$ et $a_n = 0$ sinon) est bien de rayon de convergence égal à 1 et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ est convergente car ¹²

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2).$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2k$. On a alors que $m_n \geq m_{2k} = 2 \times 3^k$ et donc $3^{-k} m_n$ est un entier de même parité que n . Ainsi

$$z_k^{m_n} = \begin{cases} r_k^{m_n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -r_k^{m_n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$f(z_k) = \sum_{n=0}^{2k-1} \frac{(-1)^n}{n+1} z_k^{m_n} + \sum_{n=2k}^{\infty} \frac{r_k^{m_n}}{n+1}.$$

Si on pose $M_k = \sup_{z \in \mathbb{D}} \left| \sum_{n=0}^{2k-1} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{m_n} \right|$ alors grâce à l'inégalité triangulaire on obtient,

$$|f(z_k)| \geq \sum_{n=2k}^{\infty} \frac{r_k^{m_n}}{n+1} - M_k.$$

Construisons alors r_k de sorte à avoir $|f(z_k)| \geq k$.

Pour cela prenons (x_l) une suite croissante de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ qui tend vers 1, par exemple $x_l = \frac{l}{l+1}$, et posons

$$g_l : \mathbb{N} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ n \longmapsto \frac{x_l^{m_n}}{n+1}.$$

12. Le fait que la suite (m_n) soit strictement croissante est important car sinon dans la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$, les termes de la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ sont permutés et dans le cas général si σ est une permutation de \mathbb{N} on n'a pas $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.

On a alors que la suite (g_l) est une suite de fonctions croissantes à valeurs positives, donc par le théorème de convergence monotone on a

$$\sum_{n=2k}^{\infty} \frac{x_l^{m_n}}{n+1} = \sum_{n=2k}^{\infty} g_l(n) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \sum_{n=2k}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty.$$

Ainsi il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=2k}^{\infty} \frac{x_l^{m_n}}{n+1} \geq k + M_k.$$

On pose donc $r_k = x_l$. Finalement on a

$$|f(z_k)| \geq \sum_{n=2k}^{\infty} \frac{r_k^{m_n}}{n+1} - M_k \geq k.$$

Ainsi la suite $(f(z_k))$ est divergente ce qui établit le contre-exemple. \square

Le théorème d'Abel admet une réciproque partielle : c'est le théorème de Tauber qui admet une version faible et une version forte. Nous allons ici démontrer la version faible.

Théorème 20 (Tauberien faible¹³)

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égale à 1 et soit $f : z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$.

$$\text{Si } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = S < \infty \text{ et si } a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ alors } \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S.$$

Démonstration :

Soit $x \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} |S_n - f(x)| &\leq \sum_{k=1}^n |a_k|(1-x^k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|x^k \\ &\leq \sum_{k=1}^n k|a_k|(1-x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k}{n}|a_k|x^k \\ &\leq (1-x)n \sup_{k \geq 0} |ka_k| + \frac{1}{n(1-x)} \sup_{k > n} |ka_k| \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|f(1 - \frac{\varepsilon}{n}) - S| < \varepsilon$ et $|na_n| < \varepsilon^2$.

Ainsi pour tout $n \geq N$ on a

$$\begin{aligned} |S_n - S| &\leq \left| S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| + \left| f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) - S \right| \\ &\leq (\sup_{k \geq 0} |ka_k|)\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

D'où le résultat. \square

13. Dans la version forte du théorème on remplace l'hypothèse « $a_n = o(\frac{1}{n})$ » par « $a_n = O(\frac{1}{n})$ ».

1.8 Formule sommatoire de Poisson

- **Leçons concernées :** 230 ; (240) ; 246 ; 254 ; (255)
- **Référence :** *Analyse pour l'agrégation*, Claude ZUILY, Hervé QUEFFÉLEC (pages 96-97)
- **Remarque :** Ce théorème est assez élémentaire et utilise la théorie sur les séries de Fourier. Cependant il possède de nombreuses applications qui vont du calcul de séries au calcul de transformé de Fourier de distributions.

Définition 21 Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ on définit \hat{f} la transformée de Fourier de f par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\xi t} dt.$$

Si $f \in C(\mathbb{R})$ et si f est 1-périodique, on définit pour tout $n \in \mathbb{Z}$ le n ème coefficient de Fourier de f par

$$c_n(f) = \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi n t} dt.$$

Théorème 22 (Formule sommatoire de Poisson)

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}), \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2, \exists C > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |(1 + |x|^2)^\alpha f^{(\beta)}(x)| \leq C\}$.
On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(2\pi n)e^{2i\pi n x}.$$

Démonstration :

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n).$$

Nous allons démontrer le théorème en trois étapes :

- Étape 1 : La fonction F est bien définie et continue sur \mathbb{R} et elle est 1-périodique ;
- Étape 2 : Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(F) = \hat{f}(2\pi n)$;
- Étape 3 : La série de Fourier de F converge simplement vers F .

Étape 1 : Montrons que F est bien définie, continue sur \mathbb{R} et 1-périodique.

Pour cela montrons que la série qui définit F converge normalement sur tout compact de \mathbb{R} .

Soit K un compact de \mathbb{R} , il existe $A > 0$ tel que $K \subset [-A, A]$.

Donc pour tout $x \in K$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a $|x+n| \geq |n| - |x| \geq |n| - A$.

Ainsi si $|n| \geq 2A$ on a $|x+n| \geq \frac{|n|}{2}$. De plus comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in K$ et $|n| \geq 2A$,

$$|f(x+n)| \leq \frac{C}{1+|x+n|^2} \leq \frac{C}{1+\frac{|n|^2}{4}}.$$

La série converge donc normalement sur K et F est bien définie et continue sur \mathbb{R} .

De plus F est 1-périodique car $n \mapsto n+1$ est une bijection de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} .

Etape 2 : Montrons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(F) = \hat{f}(2\pi n)$.

$$\begin{aligned}
 c_n(F) &= \int_0^1 F(t)e^{-2i\pi nt} dt \\
 &= \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t+k)e^{-2i\pi nt} dt \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(t+k)e^{-2i\pi nt} dt \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(t)e^{-2i\pi nt} dt \\
 &= \hat{f}(2\pi n).
 \end{aligned}$$

A noter que l'interversion de la somme et de l'intégrale à la troisième égalité vient de la convergence uniforme de la série sur le compact $[0, 1]$.

Etape 3 : Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n)e^{2i\pi nx}$.

Soit G la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$G : x \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n)e^{2i\pi nx}.$$

Montrons que G est bien définie et continue sur \mathbb{R} .

D'après les propriétés de la transformée de Fourier et le fait que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a pour $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$|\hat{f}(2\pi n)| = \left| \frac{1}{2i\pi n} \widehat{f'}(2\pi n) \right| = \left| \frac{-1}{4\pi^2 n^2} \widehat{f''}(2\pi n) \right| \leq \frac{1}{n^2} \|f''\|_{L^1}.$$

Ainsi la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n)e^{2i\pi nx}$ converge normalement sur \mathbb{R} et donc la fonction G est bien définie et continue sur \mathbb{R} . De plus G est 1-périodique et on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(G) = \hat{f}(2\pi n) = c_n(F).$$

On a donc par l'égalité de Parseval que

$$\|G - F\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(F - G)^2 = 0.$$

Les fonctions F et G étant continue sur \mathbb{R} on a $F = G$ ce qui nous donne que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(2\pi n)e^{2i\pi nx}.$$

□

Remarque

On peut affaiblir l'hypothèse du théorème.

A la place de prendre $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on peut prendre $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ vérifiant

- $\exists M > 0, \exists \alpha > 1, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M(1 + |x|)^{-\alpha}$;
- $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(2\pi n)| < \infty$.

Avec cette nouvelle hypothèse on peut retrouver la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Corollaire 23 Pour tout $a > 0$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi \operatorname{ch}(\pi a)}{a \operatorname{sh}(\pi a)}.$$

De plus on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Démonstration :

Montrons d'abord la première formule.

Soit $a > 0$ et $f : t \mapsto e^{-2\pi a|t|}$. La fonction f est continue sur \mathbb{R} . De plus

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (1 + |t|)^2 f(t) = 0$$

donc il existe $C > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on ait $|f(t)| \leq \frac{C}{(1+|t|)^2}$.

Calculons maintenant $\hat{f}(2\pi n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \hat{f}(2\pi n) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi a|t|} e^{-2i\pi n t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{2\pi t(a-in)} dt + \int_0^{+\infty} e^{-2\pi t(a+in)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi(a-in)} + \frac{1}{2\pi(a+in)} \\ &= \frac{a}{\pi(a^2 + n^2)}. \end{aligned}$$

Ainsi on a $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(2\pi n)| < \infty$ et toutes les hypothèses de la formule de Poisson sont vérifiées.

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \\ &= -1 + 2 \sum_0^{\infty} e^{-2\pi a n} \\ &= -1 + \frac{2}{1 - e^{-2\pi a}} \\ &= \frac{e^{-2\pi a} + 1}{1 - e^{-2\pi a}} \\ &= \frac{e^{-\pi a} + e^{\pi a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} \\ &= \operatorname{coth}(\pi a). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi \operatorname{ch}(\pi a)}{a \operatorname{sh}(\pi a)}.$$

Pour montrer la seconde formule on remarque que pour $a > 0$, on a

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = -\frac{1}{a^2} + \frac{\pi \operatorname{ch}(\pi a)}{a \operatorname{sh}(\pi a)}.$$

Faisons un développement limité de \coth en 0.

$$\begin{aligned}\coth(\pi a) &= \frac{\operatorname{ch}(\pi a)}{\operatorname{sh}(\pi a)} \underset{a \rightarrow 0}{=} \frac{1 + \frac{(a\pi)^2}{2} + o(a^2)}{\pi a + \frac{(\pi a)^3}{6} + o(a^3)} \\ &= \left(\frac{1}{\pi a} + \frac{\pi a}{2} + o(a) \right) \frac{1}{1 + \frac{(\pi a)^2}{6} + o(a^2)} \\ &= \left(\frac{1}{\pi a} + \frac{\pi a}{2} + o(a) \right) \left(1 - \frac{(\pi a)^2}{6} + o(a^2) \right) \\ &= \frac{1}{\pi a} + \frac{\pi a}{3} + o(a).\end{aligned}$$

Ainsi on obtient que

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

De plus comme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \leq 2$$

la série converge normalement sur $[0, 1]$ donc on peut intervertir la limite et la somme. D'où le résultat. \square

Corollaire 24 Soit (T_n) la suite de distributions tempérées définie par

$$T_n = \sum_{k=-n}^n \delta_{2\pi n}.$$

Alors la suite (T_n) converge vers une distribution tempérée T qui vérifie

$$\mathcal{F}(T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n$$

Démonstration :

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Il existe alors $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1 + x^2)|\varphi(x)| \leq C$. On a donc

$$T(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(2\pi n) \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{C}{1 + n^2}.$$

Ainsi T est une distribution tempérée. De plus on a, grâce à la formule de Poisson, que

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle &= \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(2\pi n) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(n) \\ &= \left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n, \varphi \right\rangle.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathcal{F}(T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n.$$

\square

1.9 Méthode de calcul d'une transformée de Fourier

- **Leçons concernées :** 236 ; 239 ; 240 ; 245
- **Référence :** *Analyse complexe*, Eric AMAR, Etienne MATHERON (pages 248-249)
- **Remarque :** Ce développement présente une méthode de calcul de transformée de Fourier basée sur le théorème des résidus.

Proposition 25 Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(f)$ sa transformée de Fourier définie sur \mathbb{R} par

$$\mathcal{F}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{ixt} dt.$$

Supposons que

- f se prolonge au voisinage de $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ en une fonction g méromorphe ;
- g n'admet pas de pôles réels ;¹⁴
- l'ensemble des pôles de g , noté A_g , est fini ;
- $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = 0$.

En posant $A_g^+ = A_g \cap \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) > 0\}$, on a alors pour tout $\xi > 0$,

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = 2i\pi \sum_{a \in A_g^+} \operatorname{Res}(z \mapsto g(z)e^{i\xi z}, a).$$

Démonstration :

Nous allons utiliser le théorème des résidus appliqué à la fonction $z \mapsto g(z)e^{i\xi z}$ sur le contour γ_R défini par $\gamma_R = \gamma_R^1 \cdot \gamma_R^2$ avec

$$\gamma_R^1 : \begin{array}{ll} [-R, R] & \longrightarrow \mathbb{C} \\ t & \longmapsto t \end{array}$$

$$\gamma_R^2 : \begin{array}{ll} [0, \pi] & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto Re^{i\theta} \end{array}.$$

Pour R assez grand le contour γ_R entoure tous les pôles de g ayant une partie imaginaire strictement positive car le nombre de pôles de g est en nombre fini. Ainsi le théorème des résidus nous donne que pour $\xi > 0$

$$\int_{\gamma_R} g(z)e^{i\xi z} dz = 2i\pi \sum_{a \in A_g^+} \operatorname{Res}(z \mapsto g(z)e^{i\xi z}, a). \quad (*)$$

Or on a que

$$\int_{\gamma_R} g(z)e^{i\xi z} dz = \int_{-R}^R g(t)e^{i\xi t} dt + \int_0^\pi g(Re^{i\theta})e^{i\xi Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta.$$

La première intégrale tend, quand R tend vers l'infini, vers $\mathcal{F}(f)(\xi)$. Montrons alors que la seconde tend vers 0 quand R tend vers l'infini. On a d'abord que

$$\left| \int_0^\pi g(Re^{i\theta})e^{i\xi Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right| \leq M_g(R) \int_0^\pi Re^{-\xi R \sin(\theta)} d\theta$$

avec $M_g(R) = \sup(\{|g(z)|, |z| = R, \operatorname{Im}(z) \geq 0\})$.

14. La proposition reste vraie sans cette hypothèse mais la démonstration devient plus lourde. Il faut dans ce cas changer le chemin γ_R en « évitant » les pôles de g sur l'axe réel.

De plus pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a $\sin(\theta) \geq \frac{2}{\pi}\theta$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^\pi R e^{-\xi R \sin(\theta)} d\theta &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} R e^{-\xi R \sin(\theta)} d\theta \\ &\leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} R e^{-\xi R \frac{2}{\pi}\theta} d\theta \\ &\leq 2R \frac{-\pi}{2R\xi} (e^{-\xi R} - 1) \\ &\leq \frac{\pi}{\xi} (1 - e^{-\xi R}) \leq \frac{\pi}{\xi}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\left| \int_0^\pi g(Re^{i\theta}) e^{i\xi R e^{i\theta}} i R e^{i\theta} d\theta \right| \leq M_g(R) \frac{\pi}{\xi} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

car $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = 0$. Ainsi en faisant tendre R vers l'infini dans (*) on obtient

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = 2i\pi \sum_{a \in A_g^+} \text{Res}(z \mapsto g(z) e^{i\xi z}, a).$$

□

Exemple 26

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}.$$

Démonstration :

Soit $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$. La fonction f est intégrable sur \mathbb{R} et se prolonge en la fonction $g : z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$ qui est méromorphe sur \mathbb{C} et qui admet un nombre fini de pôles (i et $-i$) qui sont non réel.

De plus $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = 0$, donc d'après la proposition précédente on a pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt &= \frac{1}{2} \text{Re}(\mathcal{F}(f)(x)) \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}(2i\pi \text{Res}(z \mapsto g(z) e^{ixz}, i)) \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}(2i\pi \left(z \mapsto \frac{(z-i)e^{ixz}}{1+z^2} \right)(i)) \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left(2i\pi \frac{e^{-x}}{2i} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} e^{-x}. \end{aligned}$$

De plus si $x = 0$, on a $\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt = [\text{Arctan}(t)]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$ et si $x < 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(-xt)}{1+t^2} dt \\ &= \frac{\pi}{2} e^x. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

1.10 Valeur principale de $\frac{1}{x}$

- **Leçons concernées :** 254; 255
- **Référence :** *Éléments d'analyse fonctionnelle*, Francis HIRSCH, Gilles LACOMBE (pages 237, 250-251, 254)
- **Remarque :** Dans ce développement on démontre les principales propriétés de la valeur principale de $\frac{1}{x}$.

La distribution $\text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est introduite pour « généraliser » la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ dans l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, ce qu'on ne peut pas faire « naturellement » car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur \mathbb{R} .

Définition 27 On note $\text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ la fonction définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{S}(\mathbb{R})$) par

$$\text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right) : \varphi \mapsto \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\{|x| > \varepsilon\}} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Proposition 28 On a les propriétés suivantes

- (i) $\text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est une distribution sur \mathbb{R} d'ordre 1; (à faire dans la leçon 255)
- (i') $\text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est une distribution tempérée sur \mathbb{R} ; (à faire dans la leçon 254)
- (ii) $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), xT = 1 \iff \exists C \in \mathbb{C}, T = \text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right) + C$; (x désigne la fonction $\text{id}_{\mathbb{R}}$)
- (iii) $[\ln(|\cdot|)]' = \text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Démonstration :

(i) : Montrons tout d'abord que $\text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est bien définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Il existe $A > 0$ tel que $\text{Supp}(\varphi) \subset [-A, A]$. On a alors pour tout $\varepsilon \in]0, A[$

$$\begin{aligned} \int_{\{|x| > \varepsilon\}} \frac{\varphi(x)}{x} dx &= \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^A \frac{\varphi(x)}{x} dx \\ &= \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^A \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \\ &= \int_{\{\varepsilon < |x| < A\}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \end{aligned}$$

ceci car $\int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x} dx = -\int_{\varepsilon}^A \frac{\varphi(0)}{x} dx$. Ainsi on a

$$\langle \text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\{\varepsilon < |x| < A\}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx = \int_{-A}^A \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx$$

car φ étant dérivable en 0, l'application $x \mapsto \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$ se prolonge par continuité en 0 ce qui justifie qu'elle est intégrable sur $[-A, A]$.

Ainsi $\text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est bien définie. On remarque ensuite que $\text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. De plus pour tout compact K de \mathbb{R} , il existe $A > 0$ tel que $K \subset [-A, A]$. On a donc, grâce à l'inégalité des accroissements finis, que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \left| \langle \text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle \right| &= \left| \int_{-A}^A \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \right| \\ &\leq \int_{-A}^A \|\varphi'\|_{\infty} dx \\ &\leq 2A N_1(\varphi). \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est une distribution d'ordre inférieur à 1.

On va montrer par l'absurde que $\text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est d'ordre 1. Supposons qu'elle soit d'ordre 0. On a alors pour $K = [0, 2]$ qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$,

$$\left| \langle \text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle \right| \leq C \|\varphi\|_\infty. \quad (*)$$

Posons $M = e^{C+1}$ et prenons une fonction $\rho \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ vérifiant

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \rho(x) \leq 1$;
- $\forall x \in \left[\frac{1}{M}, 1\right], \quad \rho(x) = 1$;
- $\forall x \notin \left[\frac{1}{2M}, 2\right], \quad \rho(x) = 0$.

Une telle fonction existe d'après le lemme 29 démontré en fin de section et on a

$$\langle \text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right), \rho \rangle = \int_{\frac{1}{2M}}^2 \frac{\rho(x)}{x} dx \geq \int_{\frac{1}{M}}^1 \frac{1}{x} dx = \ln(M) = C + 1 > C.$$

Or $\|\rho\|_\infty = 1$ ce qui contredit (*). Ainsi $\text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est une distribution d'ordre 1.

(i') : Montrons que $\text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est bien définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On remarque d'abord en effectuant un changement de variable que pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle \text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\varepsilon}^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx + \int_1^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx. \end{aligned}$$

Montrons que la fonction $f : x \mapsto \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}$ est intégrable sur $]0, 1]$ et sur $[1, \infty[$.

Pour tout $x \in]0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \right| &= \left| \frac{1}{x} \int_{-x}^x \varphi'(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{x} \int_{-x}^x \|\varphi'\|_\infty dt \\ &\leq 2 N_{0,1}(\varphi) \end{aligned}$$

ce qui montre l'intégrabilité de f sur $]0, 1]$. De plus pour tout $x \in [1, \infty[$, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \right| &\leq \frac{|x\varphi(x)| + |-x\varphi(-x)|}{x^2} \\ &\leq \frac{2 N_{1,0}(\varphi)}{x^2} \end{aligned}$$

ce qui montre l'intégrabilité de f sur $[1, \infty[$. Ainsi $\text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est bien définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et on a

$$\left| \langle \text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle \right| \leq 2 N_{0,1}(\varphi) + 2 N_{1,0}(\varphi) \leq 2 N_{1,1}(\varphi).$$

Ainsi $\text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est une distribution tempérée.

(ii) : Soit $c \in \mathbb{C}$. Posons $T = \text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right) + c\delta_0$ et montrons que $xT = 1$.
 Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle xT, \varphi \rangle = \langle T, x\varphi \rangle = \langle \text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right), x\varphi \rangle + c \langle \delta_0, x\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi = \langle [1], \varphi \rangle.$$

Soit maintenant $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vérifiant $xT = 1$. Posons $T_0 = T - \text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.

T_0 vérifie $xT_0 = 0$ car $xT = 1 = x\text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrons qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $T_0 = c\delta_0$.
 Posons $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [-2, 2] \end{cases}.$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle T_0, \varphi \rangle = \langle T_0, \varphi - \rho\varphi \rangle + \langle T_0, \rho\varphi \rangle.$$

D'une part on a

$$\langle T_0, \varphi - \rho\varphi \rangle = \langle xT_0, \frac{\varphi - \rho\varphi}{x} \rangle = 0.$$

Ceci a un sens car l'application $\frac{\varphi - \rho\varphi}{x}$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ puisque $\varphi - \rho\varphi$ s'annule au voisinage de 0.
 D'autre part

$$\begin{aligned} \langle T_0, \rho\varphi \rangle &= \langle T_0, \rho(\varphi - \varphi(0)) \rangle + \langle T_0, \rho\varphi(0) \rangle \\ &= \langle xT_0, \rho\left(\frac{\varphi - \varphi(0)}{x}\right) \rangle + \langle T_0, \rho \rangle \varphi(0) \\ &= \langle T_0, \rho \rangle \langle \delta_0, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

A noter¹⁵ que la fonction $\frac{\varphi - \varphi(0)}{x}$ est bien C^∞ sur \mathbb{R} .
 Ainsi on obtient que

$$\langle T_0, \varphi \rangle = \langle T_0, \rho \rangle \langle \delta_0, \varphi \rangle = c \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

avec $c = \langle T_0, \rho \rangle$, d'où le résultat.

(iii) : Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} \langle [\ln(|\cdot|)]', \varphi \rangle &= - \int_{\mathbb{R}} \ln(|x|) \varphi'(x) dx \\ &= - \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln(-x) \varphi'(x) dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln(x) \varphi'(x) dx \\ &= - \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \ln(\varepsilon) \varphi(-\varepsilon) - \ln(\varepsilon) \varphi(\varepsilon) - \int_{\{|x| > \varepsilon\}} \frac{\varphi(x)}{x} dx \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\{|x| > \varepsilon\}} \frac{\varphi(x)}{x} dx \\ &= \langle \text{Vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (1.2)$$

On a (1.1) en effectuant une intégration par parties et (1.2) car

$$\ln(\varepsilon)(\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)) = \varepsilon \ln(\varepsilon) \left(\frac{\varphi(-\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon} + \frac{\varphi(0) - \varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad \square$$

¹⁵. on montre cela par récurrence ou on utilise le résultat suivant : Si f est C^∞ sur \mathbb{R} et vérifie pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $f^{(k)}(0) = 0$ alors $\frac{f}{x^n}$ se prolonge en une fonction C^∞ sur \mathbb{R} .

Le lemme qui suit permet de construire des fonctions plateaux. C'est un lemme très utilisé en analyse et il est bon de savoir le démontrer.

Lemme 29 Pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a < b < c < d$, il existe une fonction ρ de classe C^∞ sur \mathbb{R} vérifiant

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 &\leq \rho(x) \leq 1 ; \\ \forall x \in [b, c], \quad \rho(x) &= 1 ; \\ \forall x \notin [a, d], \quad \rho(x) &= 0 . \end{aligned}$$

Démonstration :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} .$$

Montrons que la fonction f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} . Pour cela on raisonne par récurrence. Soit pour $n \in \mathbb{N}$,

$\mathcal{P}(n)$: « f est de classe C^n sur \mathbb{R} et il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x > 0$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$. »

On a $\mathcal{P}(0)$ car f est continue sur \mathbb{R} et vérifie pour tout $x > 0$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

La fonction $f^{(n)}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a pour tout $x > 0$,

$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} + P_n\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

avec $P_{n+1} = X^2(P_n - P_n')$. Ainsi f vérifie

- $f^{(n)}$ est continue sur \mathbb{R} ;
- $f^{(n)}$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^* ;
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f^{(n+1)}(x) = 0 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f^{(n+1)}(x)$.

La fonction f est donc de classe C^{n+1} sur \mathbb{R} . Ainsi on a $\mathcal{P}(n+1)$.

Ceci montre que la fonction f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} . De plus on remarque que f est croissante sur \mathbb{R} .

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$g : x \mapsto \frac{f(f(1) - f(x))}{f(f(1))}$$

La fonction g est de classe C^∞ sur \mathbb{R} car f l'est et vérifie

- $\forall x \in]-\infty, 0]$, $g(x) = 1$ car $f(x) = 0$ si $x \leq 0$;
- $\forall x \in [1, +\infty[$, $g(x) = 0$ car $f(1) - f(x) \leq 0$ si $x \geq 1$ car f est croissante ;
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq g(x) \leq 1$ car f est croissante.

Finalement posons ρ la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\rho : x \mapsto g\left(\frac{-x+b}{b-a}\right)g\left(\frac{x-c}{d-c}\right).$$

La fonction ρ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} car g l'est et vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \rho(x) \leq 1$ car g vérifie la même chose. De plus si $x \in [b, c]$ on a

$$\frac{-x+b}{b-a} \leq 0 \quad \text{et} \quad \frac{x-c}{d-c} \leq 0.$$

Ainsi si $x \in [b, c]$ on a $\rho(x) = 1$. De plus on a

$$\frac{-x+b}{b-a} \geq 1 \quad \text{si} \quad x \leq a$$

$$\frac{x-c}{d-c} \geq 1 \quad \text{si} \quad d \leq x.$$

Donc si $x \in \mathbb{R} \setminus [a, d]$ alors $\rho(x) = 0$ d'où le résultat. □

Chapitre 2

Développements d'algèbre

2.1 Les théorèmes de Sylow

- **Leçons concernées :** 101 ; (103) ; 104 ; 121
- **Référence :** *Cours d'algèbre*, Daniel PERRIN (page 35 exo C.2 et page 19)
- **Remarque :** Dans ce développement on utilise la démonstration de Wielandt qui ne fait intervenir uniquement des arguments élémentaires de dénombrement pour démontrer l'existence de p -Sylow (et en même temps de montrer que $c_p \equiv 1 [p]$).

Théorème 30 Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre n . On définit les entiers α et m vérifiant $n = p^\alpha m$ et $m \wedge p = 1$. De plus on note $Syl_p(G)$ l'ensemble des p sous-groupes de Sylow (i.e les sous-groupes d'ordre p^α) de G et c_p le cardinal de $Syl_p(G)$.

On a alors

- (i) $Syl_p(G) \neq \emptyset$ et $c_p \equiv 1 [p]$;
- (ii) Si H est un p -sous groupe de G alors il existe $S \in Syl_p(G)$ tel que $H \subset S$;
- (iii) Pour tout S_1 et S_2 dans $Syl_p(G)$, il existe $g \in G$ vérifiant $S_1 = gS_2g^{-1}$.
De plus si $S \in Syl_p(G)$ alors $S \triangleleft G \Leftrightarrow c_p = 1$.

Démonstration :

(i) : Posons $X = \{E \subset G, \text{card}(E) = p^\alpha\}$ et considérons l'action de groupe définie par

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, E) &\longmapsto g.E = \{gx, x \in E\} \end{aligned}$$

Soit $g \in \text{Stab}(E)$ et $x \in E$. On a que $gx \in E$ et donc que $g \in E.x^{-1}$. Ainsi on en déduit que $\text{Stab}(E) \subset E.x^{-1}$ d'où $|\text{Stab}(E)| \leq p^\alpha$.

Deux cas se présentent.

Si $|\text{Stab}(E)| < p^\alpha$ alors $\text{card}(\text{Orb}(E)) = \frac{|G|}{|\text{Stab}(E)|} \in p\mathbb{Z}$.

Si $|\text{Stab}(E)| = p^\alpha$ alors $\text{Stab}(E) \in Syl_p(G)$. Comptons le nombre d'ensembles E vérifiant cela. Soit

$$\begin{aligned} f : \{E \in X, |\text{Stab}(E)| = p^\alpha\} &\longrightarrow Syl_p(G) \\ E &\longmapsto \text{Stab}(E) \end{aligned}$$

La fonction f est surjective car pour tout $S \in Syl_p(G)$ on a $\text{Stab}(S) = S$.

Pour tout $S \in Syl_p(G)$ on a¹

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{S\}) &= \{E \in X, Stab(E) = S\} \\ &= \{S.x, x \in G\} \\ &= G/S. \end{aligned}$$

Ainsi $\text{card}(f^{-1}(\{S\})) = m$ et par le lemme des bergers on a

$$\text{card}(\{E \in X, |Stab(E)| = p^\alpha\}) = mc_p.$$

On utilise maintenant la formule des classes

$$\begin{aligned} \text{card}(X) &= \sum_{E \text{ tq } |Stab(E)|=p^\alpha} \text{card}(Orb(E)) + \sum_{\substack{E \text{ rep des orbites} \\ \text{vérifiant } |Stab(E)| < p^\alpha}} \text{card}(Orb(E)) \\ &\equiv mc_p [p]. \end{aligned}$$

Maintenant appliquons ce qu'on vient de faire au groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ au lieu de G . On obtient

$$\text{card}(X) = \text{card}(\{F \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \text{card}(F) = p^\alpha\}) \equiv mc'_p [p]$$

avec $c'_p = \text{card}(Syl_p(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) = 1$ car $\langle \overline{m} \rangle$ est l'unique sous-groupe d'ordre p^α dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ainsi $mc_p \equiv m [p]$ et comme $m \wedge p = 1$ on obtient $c_p \equiv 1 [p]$ et $Syl_p(G) \neq \emptyset$.

(ii) : Pour montrer les résultats (ii) et (iii) nous allons utiliser le lemme suivant.

Lemme 31 Soit H un sous-groupe de G et $S \in Syl_p(G)$. Alors on a qu'il existe $a \in G$ vérifiant $a^{-1}Sa \cap H \in Syl_p(H)$.

Démonstration :

On rappelle que l'on note $G/S = \{S.a, a \in G\}$ et on considère l'action de groupe défini par

$$\begin{aligned} H \times G/S &\longrightarrow G/S \\ (h, S.a) &\longmapsto S.ah \end{aligned}$$

La formule des classes nous donne que

$$m = \text{card}(G/S) = \sum_{S.a \text{ rep des orbites}} \text{card}(Orb(S.a)).$$

Ainsi il existe $a \in G$ tel que $\text{card}(Orb(S.a)) \notin p\mathbb{Z}$.

De plus on a $Stab(S.a) = \{h \in H, S.ah = S.a\} = \{h \in H, h \in a^{-1}Sa\} = a^{-1}Sa \cap H$.

Or $a^{-1}Sa \cap H$ est un sous-groupe de $a^{-1}Sa$ donc $|a^{-1}Sa \cap H| \in p\mathbb{Z} \cup \{1\}$.

Finalement en remarquant que

$$\text{card}(Orb(S.a)) = \frac{|H|}{|Stab(S.a)|} = \frac{|H|}{|a^{-1}Sa \cap H|} \notin p\mathbb{Z}$$

on en déduit que $a^{-1}Sa \cap H$ est un p -sous-groupe de Sylow de H . □

Revenons à (ii). Soit H un p -sous groupe de G .

D'après le (i) il existe $S \in Syl_p(G)$ et d'après le lemme, il existe $a \in G$ tel que $a^{-1}Sa \cap H \in Syl_p(H)$. Mais comme H est un p -sous groupe on a $a^{-1}Sa \cap H = H$ et donc $H \subset a^{-1}Sa$.

Pour conclure il suffit de remarquer que $a^{-1}Sa \in Syl_p(G)$.

(iii) : D'après le (ii) on a pour $H \in Syl_p(G)$ et pour tout $S \in Syl_p(G)$ qu'il existe $a \in G$ vérifiant $H = a^{-1}Sa$. On en déduit facilement le (iii). □

1. G/S désigne ici l'ensemble des classes à gauche et n'est pas à priori un groupe

2.2 Classification des groupes d'ordre inférieur à 11

- **Leçons concernées :** 103; 104
- **Référence :** Aucune
- **Remarque :** Ce développement nécessite la connaissance du produit semi-direct de deux groupes. Cette notion est définie par exemple dans *Cours d'algèbre* de Daniel PERRIN.

Soit (G, \cdot) un groupe d'élément neutre e .

- Si $|G| = 1$ alors $G = \{e\}$;
- Si $|G| = 2$ alors $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ car 2 est premier;
- Si $|G| = 3$ alors $G \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ car 3 est premier;
- Si $|G| = 4$ alors
 - soit G contient un élément d'ordre 4 et dans ce cas $G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$;
 - soit G n'admet que des éléments d'ordre 2 et dans ce cas G est abélien. On a donc $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- Si $|G| = 5$ alors $G \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ car 5 est premier;

Lemme 32 *Si G est un groupe d'ordre $2p$ avec p premier alors G est soit cyclique soit diédral.*

Démonstration :

Si $p = 2$, le résultat est déjà établi. Supposons $p > 2$.

Par le théorème de Cauchy, G admet un élément x d'ordre p et un élément y d'ordre 2.

Soit $N = \langle x \rangle$ et $H = \langle y \rangle$. On a d'abord $N \triangleleft G$ car N est d'indice 2 dans G .

Ensuite $N \cap H = \{e\}$ car $y \notin N$ comme 2 ne divise pas p .

De plus on a $HN = G$ car N et yN forment un partition de G (N d'indice 2 et $y \notin N$).

Ainsi $G \simeq N \rtimes_{\varphi} H$ avec $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ un morphisme de groupes. Or $\text{Aut}(N) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$ est cyclique et $\varphi(y)$ est d'ordre 2 donc soit $\varphi(y) = \text{id}_N$ soit $\varphi(y) = \text{id}_N^{-1}$.

Finalement si φ est trivial $G \simeq N \times H \simeq \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ et si φ est non trivial $G \simeq N \rtimes_{\varphi} H \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq D_p$. \square

- Si $|G| = 6$ alors soit $G \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ soit $G \simeq D_3$;
- Si $|G| = 7$ alors $G \simeq \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ car 7 est premier;
- Si $|G| = 8$ alors trois cas se présentent :
 - soit G contient un élément d'ordre 8 et dans ce cas $G \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$;
 - soit G ne contient que des éléments d'ordre 2 puis G est abélien et ainsi on peut munir G d'une structure de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ espace vectoriel. On obtient ainsi $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$;
 - soit G contient un élément x d'ordre 4. Posons $N = \langle x \rangle$. Dans ce cas les éléments de $G \setminus N$ sont d'ordre 2 ou 4.
 - Si $G \setminus N$ ne contient un élément y d'ordre 2 et si on pose $H = \langle y \rangle$ on obtient que $N \triangleleft G$, $N \cap H = \{e\}$ et $NH = G$ donc on a $G \simeq N \rtimes_{\varphi} H$ pour un morphisme $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$. On a donc si φ est trivial, $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et sinon $G \simeq D_4$ car $\text{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
 - Si $G \setminus N$ ne contient que des éléments d'ordre 4. Soit y un tel élément. y^2 est un élément d'ordre 2 donc $y^2 \in N$ et ainsi $y^2 = x^2$. De plus yx est un élément d'ordre 4 car sinon $yx = x^2$ ce qui est absurde. Ainsi $xyx = x^2 = y^2$ puis $xyx = y$ donc $yx = x^{-1}y$. Finalement on a $G = \mathbb{H}_8 = \langle x, y \mid x^4 = e, x^2 = y^2, yx = x^{-1}y \rangle$.

- Si $|G| = 9$ alors G est abélien car G est un 3-groupe donc de centre $Z(G)$ non trivial et donc $G/Z(G)$ est cyclique. Ainsi $G \simeq \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ou $G \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$;
- Si $|G| = 10$ alors soit $G \simeq \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ soit $G \simeq D_5$;
- Si $|G| = 11$ alors $G \simeq \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ car 11 est premier.

□

En bonus on peut démontrer le théorème de Cauchy ou s'attendre à une question dessus.

Théorème 33 (de Cauchy)

Soit G un groupe fini d'ordre n (et d'élément neutre e) et soit un nombre premier p divisant n . Alors il existe un élément $x \in G$ d'ordre p .

Démonstration :

Posons $E = \{(g_1, \dots, g_p) \in G^p, g_1 \dots g_p = e\}$. On remarque facilement que E est en bijection avec G^{p-1} . De plus si $(g_1, \dots, g_p) \in E$ alors on a $(g_2, g_3, \dots, g_p, g_1) \in E$. Ainsi on peut faire agir $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur E de la manière suivante

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times E & \longrightarrow & E \\ (k, (g_1, \dots, g_p)) & \longmapsto & (g_{1+k}, \dots, g_{p+k}) \end{array} .$$

Par cette action de groupe on a pour $l \in E$ soit $\text{card}(\text{Orb}(l)) = 1$ soit $\text{card}(\text{Orb}(l)) = p$ ceci car $\text{Stab}(l)$ est un sous groupe de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Notons a le nombre d'éléments $l \in E$ vérifiant $\text{card}(\text{Orb}(l)) = 1$. On a par la formule des classe que

$$\text{card}(E) = n^{p-1} \equiv a [p].$$

De plus p divise n donc p divise a . Or $a \neq 0$ car $\text{Orb}((e, \dots, e)) = \{(e, \dots, e)\}$ donc $a \geq p$. Ainsi il existe $(x_1, \dots, x_p) \in E$ différent de (e, \dots, e) tel que $\text{card}(\text{Orb}((x_1, \dots, x_p))) = 1$. On a donc que $x_1 = x_2 = \dots = x_p$ et $x_1^p = e$. Ainsi x_1 est un élément de G d'ordre p . □

2.3 Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$

- **Leçons concernées :** (103); 106; (108); 150; 161; 204
- **Référence :** *Oraux X-ENS, algèbre 3*, Serge FRANCINO, Hervé GIANELLA, Serge NICOLAS (pages 67-70)
- **Remarque :** Ce développement fait intervenir la notion topologique d'ensemble connexe. Il utilise également que $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements.

Théorème 34 $SO_3(\mathbb{R})$ est un groupe simple.

Démonstration :

Soit G un sous-groupe distingué de $SO_3(\mathbb{R})$.

Posons G_0 la composante connexe de G contenant I_3 .

Cette démonstration se décompose en trois étapes :

- Étape 1 : G_0 est un sous-groupe de G (BONUS : $G_0 \triangleleft SO_3(\mathbb{R})$);
- Étape 2 : $G_0 = \{I_3\} \implies G = \{I_3\}$;
- Étape 3 : $G_0 \neq \{I_3\} \implies G = SO_3(\mathbb{R})$.

Étape 1 : Montrons d'abord que G_0 est un groupe. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : G_0 \times G_0 &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto xy^{-1} \end{aligned} \quad .$$

L'application φ est continue car l'application $y \mapsto y^{-1} = \frac{1}{\det(y)} {}^t \text{Com}(y)$ l'est. De plus $G_0 \times G_0$ est connexe donc $\varphi(G_0 \times G_0)$ est connexe et $I_3 \in \varphi(G_0 \times G_0)$. Ainsi $\varphi(G_0 \times G_0) \subset G_0$ et G_0 est un sous-groupe de G .

[BONUS] : Montrons maintenant que G_0 est distingué dans $SO_3(\mathbb{R})$. Pour cela considérons $h \in SO_3(\mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned} \varphi_h : G_0 &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto h^{-1}xh \end{aligned} \quad .$$

L'application φ_h est bien à valeur dans G car $G \triangleleft SO_3(\mathbb{R})$ et elle est continue en tant que restriction d'une application linéaire en dimension finie. Ainsi $\varphi_h(G_0)$ est connexe et contient I_3 . On a donc $\varphi_h(G_0) \subset G_0$ puis il vient que $G_0 \triangleleft SO_3(\mathbb{R})$.

Étape 2 : Supposons que $G_0 = \{I_3\}$.

On a tout d'abord que les composantes connexes de G sont des singletons. En effet soit H une partie connexe de G et soit h_1 et h_2 dans H . Alors en considérant l'application

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto xh_2^{-1} \end{aligned}$$

qui est continue et d'image connexe contenant I_3 , on obtient que $h_1h_2^{-1} \in G_0$ et donc $h_1 = h_2$. Montrons maintenant que si $g \in G$ alors g est dans le centre de $SO_3(\mathbb{R})$. Pour cela on pose

$$\begin{aligned} \psi : SO_3(\mathbb{R}) &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto hgh^{-1} \end{aligned} \quad .$$

L'application ψ est continue et $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe donc $\psi(SO_3(\mathbb{R})) = \{g\}$.

Ainsi pour tout $h \in SO_3(\mathbb{R})$ on a $hg = gh$. Soit Δ une droite de \mathbb{R}^3 . Prenons h une rotation d'axe Δ (différent de I_3). On a $hg(\Delta) = g(\Delta)$ donc $g(\Delta) = \Delta$. Ceci étant vrai pour toute droite de Δ , on obtient que g est une homothétie puis que $g = I_3$. Ainsi $G = \{I_3\}$.

Étape 3 : Supposons que $G_0 \neq \{I_3\}$.

Montrons que G_0 contient un retournement (i.e une rotation d'angle π).

Pour cela on remarque tout d'abord que tout élément de $SO_3(\mathbb{R})$ peut s'écrire dans une base

orthonormée sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$.

Posons alors

$$\begin{aligned} f : SO_3(\mathbb{R}) &\longrightarrow [-1, 1] \\ h &\longmapsto \frac{\text{tr}(h)-1}{2} = \cos(\theta) \end{aligned} .$$

Montrons qu'il existe $r \in G_0$ tel que $f(r) = 0$. Ainsi on aura que r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et on obtiendra que r^2 est un retournement de G_0 .

On a que $G_0 \neq \{I_3\}$ donc il existe $h \in G_0$ différent de I_3 .

— Si $f(h) \leq 0$ alors comme G_0 est connexe, f est continue et $f(I_3) > 0$ on a par « le théorème des valeurs intermédiaires »² qu'il existe $r \in G_0$ tel que $f(r) = 0$;

— Si $f(h) > 0$ alors h est une rotation d'angle $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$. Or si $\theta \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$ alors h^{-1} est une rotation d'angle dans $]0, \frac{\pi}{2}]$ et on a toujours $f(h^{-1}) > 0$, donc quitte à prendre h^{-1} on peut supposer que $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

Mézalor il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ (par exemple en prenant $n = E(\frac{3\pi}{2\theta})$). Ainsi $f(h^n) \leq 0$ et $h^n \in G_0$ donc il existe $r \in G_0$ tel que $f(r) = 0$.

Maintenant que l'on sait que G_0 (et donc G) contient un retournement, on utilise le fait que dans $SO_3(\mathbb{R})$ tous les retournements sont conjugués. Ainsi, comme G est distingué dans $SO_3(\mathbb{R})$, on obtient que G contient tous les retournements de $SO_3(\mathbb{R})$. Or les retournements engendrent $SO_3(\mathbb{R})$, il vient donc que $G = SO_3(\mathbb{R})$. \square

2. On utilise le fait que l'image d'un connexe par une application continue est connexe et que les parties connexes de \mathbb{R} sont les intervalles.

2.4 Détermination des sous-groupes distingués à partir de la table de caractères

- **Leçons concernées :** (102); 103; 107; 109
- **Référence :** *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*, Gabriel PEYRÉ (pages 230-231)
- **Remarque :** Ce développement démontre une propriété très intéressante des tables de caractères. En effet la table de caractère d'un groupe nous donne immédiatement l'ensemble de ses sous-groupes distingués. Le point clef pour montrer cette propriété est le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire sur \mathbb{C} .

Théorème 35 Soit $\{\chi_i, i \in \llbracket 1, r \rrbracket\}$ l'ensemble des caractères irréductibles deux à deux non isomorphes d'un groupe fini G . Pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on note $K_{\chi_i} = \{x \in G, \chi_i(x) = \chi_i(e)\}$ avec e l'élément neutre de G . On appelle cet ensemble le noyau de χ_i . Alors on a pour tout N sous-groupe de G ,

$$N \triangleleft G \iff \exists I \subset \llbracket 1, r \rrbracket, N = \bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}.$$

Démonstration :

\Leftarrow] Montrons que pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, K_{χ_i} est un sous-groupe distingué de G . Pour cela nous allons montrer que $K_{\chi_i} = \text{Ker}(\rho_i)$ avec (ρ_i, V_i) la représentation associée à χ_i .

Soit $g \in \text{Ker}(\rho_i)$.

On a $\rho_i(g) = \text{Id}_{V_i} = \rho_i(e)$. Ainsi $\chi_i(g) = \chi_i(e)$ et $g \in K_{\chi_i}$. On a donc $\text{Ker}(\rho_i) \subset K_{\chi_i}$.

Réciproquement soit $g \in K_{\chi_i}$.

En posant $d = \dim(V_i)$, on a $\chi_i(g) = \chi_i(e) = \dim(V_i) = d$.

De plus si l'on note n l'ordre de g on a $\text{Id}_{V_i} = \rho_i(g^n) = \rho_i(g)^n$. Ainsi le polynôme $X^n - 1$, qui est scindé et à racines simples dans \mathbb{C} , annule $\rho_i(g)$. Ceci implique que $\rho_i(g)$ est diagonalisable et que ses valeurs propres, que l'on note $\omega_1, \dots, \omega_d$, sont des racines n -ième de l'unité. On a donc

$$\chi_i(g) = \sum_{k=1}^d \omega_k = d = \sum_{k=1}^d |\omega_k|.$$

D'après le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire³ on obtient que pour tout $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $\omega_k = \omega_1$ puis comme

$$\sum_{k=1}^d \omega_k = d \omega_1 = d$$

on a que pour tout $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $\omega_k = 1$. Ainsi $\rho_i(g) = \text{Id}_{V_i}$ car $\rho_i(g)$ est diagonalisable et a pour unique valeur propre 1. On a finalement que $g \in \text{Ker}(\rho_i)$ puis $K_{\chi_i} \subset \text{Ker}(\rho_i)$.

Ainsi pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ on a $K_{\chi_i} = \text{Ker}(\rho_i)$ donc K_{χ_i} est distingué. Pour tout $I \subset \llbracket 1, r \rrbracket$, on a donc que $\bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$ est distingué en tant qu'intersection de sous-groupes distingués.

\Rightarrow] Soit N un sous-groupe distingué de G . On considère (ρ_r, V) la représentation régulière du groupe quotient G/N .

Soit $\hat{\rho} = \rho_r \circ \pi$ avec $\pi : G \rightarrow G/N$ la projection canonique sur G/N .

3. lemme démontré à la fin

On a $\text{Ker}(\hat{\rho}) = \text{Ker}(\rho_r \circ \pi) = N$ car ρ_r est injectif. De plus $\hat{\rho}$ est une représentation de G . On peut donc décomposer $\chi_{\hat{\rho}}$ en fonction des caractères irréductibles de G . On obtient qu'il existe $(a_i) \in \mathbb{N}^r$ vérifiant

$$\chi_{\hat{\rho}} = \sum_{i=1}^r a_i \chi_i.$$

Montrons que si $I = \{i \in \llbracket 1, r \rrbracket, a_i \neq 0\}$ alors on a $N = \bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$.

Soit $g \in \bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$. On a de part la définition de I que

$$\chi_{\hat{\rho}}(g) = \sum_{i=1}^r a_i \chi_i(g) = \sum_{i=1}^r a_i \chi_i(e) = \chi_{\hat{\rho}}(e).$$

Ainsi $g \in K_{\chi_{\hat{\rho}}} = \text{Ker}(\hat{\rho})$ ceci en effectuant le même raisonnement que dans la première étape. On obtient donc que $g \in N$ car $\text{Ker}(\hat{\rho}) = N$ et ainsi $\bigcap_{i \in I} K_{\chi_i} \subset N$.

Réciproquement soit $g \in N$. Montrons que pour tout $i \in I$, $\chi_i(g) = \chi_i(e)$.

On a

$$\begin{aligned} |\chi_{\hat{\rho}}(g)| &= \left| \sum_{i=1}^r a_i \chi_i(g) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^r a_i |\chi_i(g)| \\ &\leq \sum_{i=1}^r a_i \chi_i(e) \\ &\leq \chi_{\hat{\rho}}(e) = \chi_{\hat{\rho}}(g) = |\chi_{\hat{\rho}}(g)|. \end{aligned}$$

En effet pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on a $|\chi_i(g)| \leq \chi_i(e)$ car $\chi_i(e) = \dim(V_i) \in \mathbb{R}^+$ et car $\chi_i(g)$ est la trace de $\rho_i(g)$ qui est diagonalisable et à valeurs propres de module 1 (voir le début de la démonstration). De plus on a que $g \in N = \text{Ker}(\hat{\rho}) = K_{\chi_{\hat{\rho}}}$ ce qui justifie les dernières égalités.

Ainsi on obtient $\left| \sum_{i=1}^r a_i \chi_i(g) \right| = \sum_{i=1}^r a_i |\chi_i(g)|$ et d'après le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, il existe $\xi \in \mathbb{U}$ vérifiant pour tout $i \in I$, $\chi_i(g) = |\chi_i(g)|\xi$.

On obtient également l'égalité $\sum_{i=1}^r a_i |\chi_i(g)| = \sum_{i=1}^r a_i \chi_i(e)$ ce qui implique que pour tout $i \in I$, $|\chi_i(g)| = \chi_i(e)$ vu que l'on avait déjà $|\chi_i(g)| \leq \chi_i(e)$.

Finalement on a pour que tout $i \in I$, $\chi_i(g) = |\chi_i(g)|\xi = \chi_i(e)\xi$ et donc que

$$\chi_{\hat{\rho}}(g) = \sum_{i=1}^r a_i \chi_i(g) = \sum_{i=1}^r a_i \chi_i(e)\xi = \chi_{\hat{\rho}}(e)\xi.$$

Ainsi $\xi = 1$ car $\chi_{\hat{\rho}}(g) = \chi_{\hat{\rho}}(e)$ ce qui entraîne que pour tout $i \in I$, $\chi_i(g) = \chi_i(e)$.

On a donc que $g \in \bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$. Ainsi $N \subset \bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$.

On vient de montrer que $N = \bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$ ce qui conclut la preuve. □

Lemme 36 (Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire)

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $(\omega_k) \in \mathbb{C}^d$. Si

$$\left| \sum_{k=1}^d \omega_k \right| = \sum_{k=1}^d |\omega_k|$$

alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $\omega_k = |\omega_k| e^{i\theta}$.

Démonstration :

On a d'une part

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^d \omega_k \right|^2 &= \left(\sum_{k=1}^d \omega_k \right) \left(\sum_{l=1}^d \bar{\omega}_l \right) \\ &= \sum_{k=1}^d \omega_k \bar{\omega}_k + \sum_{1 \leq k < l \leq d} \omega_k \bar{\omega}_l + \bar{\omega}_k \omega_l \\ &= \sum_{k=1}^d |\omega_k|^2 + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq d} \operatorname{Re}(\omega_k \bar{\omega}_l) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\left(\sum_{k=1}^d |\omega_k| \right)^2 = \sum_{k=1}^d |\omega_k|^2 + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq d} |\omega_k| |\omega_l|.$$

Ainsi de l'égalité $\left| \sum_{k=1}^d \omega_k \right| = \sum_{k=1}^d |\omega_k|$ on obtient en élevant au carré

$$\sum_{1 \leq k < l \leq d} \operatorname{Re}(\omega_k \bar{\omega}_l) = \sum_{1 \leq k < l \leq d} |\omega_k| |\omega_l|.$$

Or pour tout $k \neq l$ on a $\operatorname{Re}(\omega_k \bar{\omega}_l) \leq |\omega_k| |\omega_l|$ donc l'égalité précédente nous assure que $\operatorname{Re}(\omega_k \bar{\omega}_l) = |\omega_k| |\omega_l|$.

Distinguons deux cas : si tous les ω_k sont nuls alors $\theta = 0$ convient.

Sinon il existe $n \in \llbracket 1, d \rrbracket$ tel que $\omega_n \neq 0$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ prenons θ_k un réel vérifiant $\omega_k = |\omega_k| e^{i\theta_k}$.

On a donc pour tout $k \neq n$, $|\omega_k \omega_n| = \operatorname{Re}(\omega_k \bar{\omega}_n) = |\omega_k \omega_n| \cos(\theta_k - \theta_n)$.

Ainsi si $\omega_k = 0$ on a $\omega_k = |\omega_k| e^{i\theta_n}$ et si $\omega_k \neq 0$ on a $\cos(\theta_k - \theta_n) = 1$ donc $\theta_k \equiv \theta_n \pmod{2\pi}$.

Dans tous les cas on a pour tout $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $\omega_k = |\omega_k| e^{i\theta_n}$ ce qui conclut la preuve. \square

2.5 Codiagonalisation des sous-algèbres réduites de $M_n(\mathbb{C})$

- **Leçons concernées :** 153; 154; 155; 157
- **Référence :** *Réduction des endomorphismes*, Rached MNEIMNÉ (page 230)
- **Remarque :** Ce développement est assez original et facile mais son problème est le manque d'exemples de sous-algèbres réduites de $M_n(\mathbb{C})$ pour lesquelles le théorème est utile.

Théorème 37 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Toute sous-algèbre (pas forcément unitaire) réduite de $M_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire dans laquelle toute matrice nilpotente est nulle, est codiagonalisable.

Démonstration :

Soit \mathcal{A} une sous-algèbre réduite de $M_n(\mathbb{C})$.

Nous allons démontrer ce théorème en quatre étapes :

- (1) $\mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ est une sous-algèbre réduite de $M_n(\mathbb{C})$;
- (2) toute matrice de $\mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ est diagonalisable;
- (3) $\mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ est commutative :
 - (a) $\mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ est engendré par ses projecteurs;
 - (b) deux projecteurs de $\mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ commutent.
- (4) \mathcal{A} est codiagonalisable.

(1) : On a d'abord que $\mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ est une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{C})$. Montrons qu'elle est réduite.

Soit $M \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $M + \lambda I_n$ soit nilpotent. Montrons que $M + \lambda I_n = 0$.

Si $\lambda = 0$ alors M est nilpotent dans \mathcal{A} donc $M = 0$ puis $M + \lambda I_n = 0$.

Si $\lambda \neq 0$, on a que $M(M + \lambda I_n)$ est nilpotent et est dans \mathcal{A} donc $M(M + \lambda I_n) = 0$. De plus $M + \lambda I_n$ est nilpotent et trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$, car \mathbb{C} est scindé, donc $M + \lambda I_n$ est semblable à une matrice triangulaire avec des 0 sur la diagonale. Ainsi $M = (M + \lambda I_n) - \lambda I_n$ est semblable à une matrice triangulaire avec des $-\lambda$ sur la diagonale. Or $\lambda \neq 0$ donc M est inversible et $M + \lambda I_n = M^{-1} \times 0 = 0$.

Ainsi $\mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ est une sous-algèbre réduite de $M_n(\mathbb{C})$.

(2) : Soit $M \in \mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ et $\chi_M = \prod_{k=1}^s (X - \mu_k)^{\alpha_k}$ le polynôme caractéristique de M .

D'après le théorème de Cayley-Hamilton $\chi_M(M) = 0$ donc si $P = \prod_{k=1}^s (X - \mu_k)$ on a $P(M)^\alpha = 0$ avec $\alpha = \max(\alpha_k)$ car les $(M - \mu_k I_n)$ commutent entre eux. Donc $P(M)$ est nilpotent et est dans $\mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$. Ainsi $P(M) = 0$ et M est diagonalisable.

(3)(a) : Soit $M \in \mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$.

On note μ_1, \dots, μ_s les valeurs propres deux à deux distinctes de M et $E_k = \text{Ker}(M - \mu_k I_n)$.

Comme M est diagonalisable on a $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^s E_k$.

Soit pour tout $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$, p_k la projection sur E_k parallèlement à $\bigoplus_{l \neq k} E_l$. On a

$$M = \sum_{k=1}^s \mu_k p_k$$

car $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^s E_k$ et pour tout $x \in E_k$, $M(x) = \mu_k x = \sum_{k=1}^s \mu_k p_k(x)$.

De plus pour tout $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $p_k \in \mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ car on a

$$p_k = \frac{\prod_{l \neq k} (M - \mu_l I_n)}{\prod_{l \neq k} (\mu_k - \mu_l)}.$$

En effet il suffit de vérifier que le terme de droite s'annule sur chaque E_l avec $l \neq k$ et qu'il vaut I_n sur E_k .

Ainsi on peut écrire chaque élément de $\mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ comme combinaison linéaire de projecteurs.

(3)(b) : Soit A et B deux projecteurs de $\mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$. On a

$$(ABA - AB)^2 = ABAABA - ABABA - ABAAB + ABAB = 0$$

et

$$(ABA - BA)^2 = ABAABA - ABABA - BAABA + BABA = 0.$$

Ainsi on a $AB = ABA = BA$ car $\mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ est réduite.

Ainsi les projecteurs de $\mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ commutent deux à deux.

(4) : En utilisant le (3) on déduit que $\mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ est commutative. De plus le (2) nous donne que toute matrice de $\mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ est diagonalisable. Ainsi en utilisant le lemme qui suit ce développement on obtient que les matrices de $\mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ sont codiagonalisables. Or $\mathcal{A} \subset \mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ donc \mathcal{A} est codiagonalisable. \square

Lemme 38 Soit K un corps, E un K -espace vectoriel de dimension finie et I un ensemble. Tout ensemble $A = \{u_i, i \in I\}$ d'endomorphismes diagonalisables de E vérifiant

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$$

est codiagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que tout élément de la base \mathcal{B} est vecteur propre de u_i pour tout $i \in I$.

Démonstration :

On va raisonner par récurrence sur la dimension de E .

Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « Si $\dim(E) \leq n$ alors tout ensemble $A = \{u_i, i \in I\}$ d'endomorphismes diagonalisables de E , vérifiant $\forall (i, j) \in I^2, \quad u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$, est codiagonalisable ».

On a $\mathcal{P}(0)$. Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$ on ait $\mathcal{P}(n)$. Prenons E un K -espace vectoriel de dimension $n + 1$. Deux cas se présentent :

Premier cas : Si pour tout $i \in I$, u_i est une homothétie alors toute base de E est une base de vecteurs propres pour tous les u_i .

Second cas : Il existe $j \in I$ tel que u_j ne soit pas une homothétie.

Ainsi il existe $\lambda \in \text{Sp}(u_j)$ tel que $E_\lambda(u_j) \neq E$. De plus comme u_j est diagonalisable on a

$$E = \bigoplus_{\mu \in \text{Sp}(u_j)} E_\mu(u_j) = E_\lambda(u_j) \oplus F \quad \text{avec} \quad F = \bigoplus_{\substack{\mu \in \text{Sp}(u_j) \\ \mu \neq \lambda}} E_\mu(u_j).$$

De plus pour tout $i \in I$ et $\mu \in \text{Sp}(u_j)$ on a que $E_\mu(u_j)$ est stable par u_i car u_i et u_j commutent. Ainsi $E_\lambda(u_j)$ et F sont stable par u_i pour tout $i \in I$ et comme $\dim(E_\lambda(u_j)) < n + 1$ et $\dim(F) < n + 1$, il existe une base \mathcal{B}_λ de $E_\lambda(u_j)$ et une base \mathcal{B}_F de F constitué de vecteurs propre de u_i pour tout $i \in I$. En concaténant ces bases on obtient une base \mathcal{B} de E constitué de vecteurs propre de u_i pour tout $i \in I$. Ainsi on a $\mathcal{P}(n + 1)$ ce qui conclut la preuve. \square

2.6 Sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$

- **Leçons concernées :** 106 ; 150 ; 158 ; 170 ; 171 ; 181
- **Référence :** *Thèmes de géométrie*, ALESSANDRI (pages 141-142)
- **Remarque :** Ce développement fait intervenir la notion d'enveloppe convexe.

Théorème 39 Soit G un sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.
Il existe $P \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $G \subset P O_n(\mathbb{R}) P^{-1}$.

Démonstration :

Soit G un sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.

Posons

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow GL(S_n(\mathbb{R})) \\ A &\longmapsto \varphi(A) : S \mapsto A S^t A \end{aligned}$$

L'application φ est un morphisme de groupes⁴ car pour $(A, B) \in G^2$ on a $\varphi(AB) = \varphi(A) \circ \varphi(B)$.
Montrons qu'il existe $S_0 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ vérifiant pour tout $A \in G$, $\varphi(A)(S_0) = S_0$.

Montrons d'abord l'existence d'un ensemble $\Sigma \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$ convexe, compact et stable par G .
Posons $E = \{M^t M, M \in G\}$ et vérifions que Σ l'enveloppe convexe de E convienne.

Tout d'abord Σ est convexe. Ensuite on a $E \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$ car pour tout $M \in G$, $M^t M$ est symétrique et pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ on a ${}^t X M^t M X = \|{}^t M X\|_2^2 > 0$. Or $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe⁵ donc on a $\Sigma \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$.

L'ensemble E est compact car c'est l'image du compact G par l'application $M \mapsto M^t M$ qui est continue. Ainsi par le théorème de Carathéodory on a que Σ est compact en tant qu'enveloppe convexe d'un compact en dimension finie.

Soit $A \in G$ et $M \in \Sigma$.

Il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_i) \in (\mathbb{R}^+)^k$ et $(S_i) \in E^k$ tel que $M = \sum_{i=1}^k \lambda_i S_i$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.

Ainsi on a $\varphi(A)(M) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi(A)(S_i) \in \Sigma$ car pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ il existe $M_i \in G$ tel que $S_i = M_i^t M_i$ et on a donc $\varphi(A)(S_i) = A M_i^t M_i^t A = (A M_i)^t (A M_i) \in E$ car G est un groupe.
L'ensemble Σ est donc stable par G .

Nous allons construire une norme sur $S_n(\mathbb{R})$ et nous intéresser à un problème de minimisation de cette norme sur un ensemble bien choisi.

Soit $\|\cdot\|$ une norme euclidienne sur $S_n(\mathbb{R})$ (par exemple $\|S\| = \sqrt{\text{Tr}(S^t S)}$). On définit alors pour tout $S \in S_n(\mathbb{R})$, vu que G est compact,

$$N(S) = \max_{A \in G} \|\varphi(A)(S)\|.$$

On vérifie facilement que N est une norme sur $S_n(\mathbb{R})$.

Posons $C = \{N(S), S \in \Sigma\}$ et montrons qu'il existe un unique $S_0 \in \Sigma$ tel que $N(S_0) = \min(C)$.
Tout d'abord Σ est compact et N est continue donc C admet un minimum $N(S_0)$ avec $S_0 \in \Sigma$.
Montrons alors qu'il est unique. Soit $S_1 \in \Sigma$ vérifiant $N(S_1) = \min(C) = N(S_0)$. On obtient

$$N(S_0) \leq N\left(\frac{S_0 + S_1}{2}\right) \leq \frac{N(S_0) + N(S_1)}{2} \leq N(S_0).$$

La première inégalité vient du fait que, Σ étant convexe, on a $N\left(\frac{S_0 + S_1}{2}\right) \in C$.

4. Ainsi φ définit une action de groupe sur l'ensemble de matrices $S_n(\mathbb{R})$.

5. Pour $(S_1, S_2) \in S_n^{++}(\mathbb{R})^2$ et $t \in [0, 1]$ on a $t S_1 + (1-t) S_2 \in S_n(\mathbb{R})$ et pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^t X (t S_1 + (1-t) S_2) X > 0$

Ainsi $N(S_0 + S_1) = N(S_0) + N(S_1)$ et il existe $A \in G$ tel que

$$N(S_0 + S_1) = \|\varphi(A)(S_0 + S_1)\| \leq \|\varphi(A)(S_0)\| + \|\varphi(A)(S_1)\| \leq N(S_0) + N(S_1) = N(S_0 + S_1).$$

Donc $\|\varphi(A)(S_0 + S_1)\| = \|\varphi(A)(S_0)\| + \|\varphi(A)(S_1)\|$ et comme $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne, on par le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\varphi(A)(S_0) = \lambda\varphi(A)(S_1) = \varphi(A)(\lambda S_1)$$

car $\varphi(A)(S_1) \neq 0$.

Ainsi $S_0 = \lambda S_1$ car $\varphi(A) \in GL(S_n(\mathbb{R}))$ puis $S_0 = S_1$ car $N(S_0) = N(S_1)$ et $\lambda \geq 0$.

On obtient alors l'unicité de S_0 .

L'ensemble Σ est stable par G donc pour tout $B \in G$, $\varphi(B)(S_0) \in \Sigma$. Ainsi en revenant à la définition de N on remarque que

$$N(\varphi(B)(S_0)) = \max_{A \in G} \|\varphi(A)(\varphi(B)(S_0))\| = \max_{A \in G} \|\varphi(AB)(S_0)\| = N(S_0)$$

car φ est un morphisme de groupes. Par unicité de S_0 on a alors que pour tout $B \in G$

$$S_0 = \varphi(B)(S_0) = BS_0^t B.$$

De plus $S_0 \in \Sigma \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc il existe⁶ $P \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $S_0 = P^2$.

Ainsi pour tout $B \in G$ on a $P^2 = B P^2 {}^t B$ puis comme $P \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on a

$$P^{-1} B P {}^t (P^{-1} B P) = I_n.$$

On obtient donc que pour tout $B \in G$, $P^{-1} B P \in O_n(\mathbb{R})$ et ainsi $G \subset P O_n(\mathbb{R}) P^{-1}$. □

6. S_0 est diagonalisable en tant que matrice symétrique réelle. Donc il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $Q^{-1} S_0 Q$ soit diagonale. De plus comme $S_0 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ les éléments de la diagonale de $Q^{-1} S_0 Q$ sont strictement positifs. Ainsi il suffit de prendre $P = Q \sqrt{Q^{-1} S_0 Q} Q^{-1}$ pour obtenir $P \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $P^2 = S_0$.

Chapitre 3

Développements non rédigés

3.1 Analyse

Projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert

- **Leçons concernées** : 205 ; 208 ; 213 ; 253
- **Référence** : *Analyse fonctionnelle*, Haïm BREZIS (pages 79-80)
- **Remarque** : Ce théorème est un résultat important sur les espace de Hilbert puisqu'il est à la base de la plupart des gros théorèmes sur les Hilbert (théorème de représentation de Riesz, théorème de Stampacchia, etc.). Il faut donc connaître sa démonstration qui est assez élémentaire (mais technique).

Théorème de Cauchy-Lipschitz global

- **Leçons concernées** : (205) ; 206 ; (208) ; 220 ; 221
- **Référence** : *Petit guide de calcul différentiel*, François ROUVIÈRE (pages 180-184)
- **Remarque** : Le point clef de ce développement est l'équivalence entre le fait d'être solution d'une équation différentielle et d'être le point fixe d'une certaine fonction.

Stabilité de l'équation de Hill-Mathieu

- **Leçons concernées** : 220 ; 221
- **Référence** : *Analyse pour l'agrégation*, Claude ZUILY, Hervé QUEFFÉLEC (pages 410-412)
- **Remarque** : Ce développement présente peu de difficulté (et d'intérêt ?).

Méthode de Newton

- **Leçons concernées** : (206) ; (218) ; 223 ; 226 ; 228 ; (229) ; 232
- **Référence** : *Petit guide de calcul différentiel*, François ROUVIÈRE (page 152-156)
- **Remarque** : Ce développement est court et son intérêt réside dans ses applications en calcul (formel et scientifique). Il faut savoir expliquer le résultat sur un dessin et comprendre pourquoi la suite est ainsi construite.

Lemme de Morse

- **Leçons concernées** : 214 ; 215 ; (217) ; 218
- **Référence** : *Petit guide de calcul différentiel*, François ROUVIÈRE (page 354-355, 209-211)
- **Remarque** : Ce développement est assez délicat et nécessite une bonne compréhension de la différentielle seconde, des formules de Taylor sur les fonctions à plusieurs variables ainsi que du théorème d'inversion locale.

Théorème des extrema liées

- **Leçons concernées** : 214 ; 215 ; (217) ; 219
- **Référence** : *Analyse*, Xavier GOURDON (pages 317, 327)
- **Remarque** : Malgré la lourdeur des notations, ce développement est assez court et abordable.

Prolongement méromorphe de la fonction Gamma d'Euler

- **Leçons concernées** : 207 ; 235 ; 239 ; 243 ; 244 ; 245 ; 247
- **Référence** : *Objectif Agrégation*, Vincent BECK, Jérôme MALICK, Gabriel PEYRÉ (pages 82-83)
- **Remarque** : Il existe plusieurs façons de démontrer ce résultat dont certaines assez complexes. Si l'objectif est seulement de montrer que la fonction Gamma se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} alors il existe une démonstration élémentaire (celle présentée dans l'*Objectif Agrégation*).

3.2 Algèbre

Table de caractère de S_4

- **Leçons concernées** : 105 ; 107 ; (108) ; 109 ; (161)
- **Référence** : *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*, Gabriel PEYRÉ (pages 228-230)
- **Remarque** : Ce développement est un exemple assez basique de remplissage d'une table de caractère d'un groupe. Il y a une petite difficulté pour remplir l'une des lignes : on peut considérer les isométries conservant les sommets d'un cube (solution exposée dans le PEYRÉ).

Dual de $M_n(\mathbb{K})$

- **Leçons concernées** : 151 ; 159
- **Référence** : *Oraux X-ENS, algèbre 1*, Serge FRANCINO, Hervé GIANELLA, Serge NICOLAS (pages 305-307)
- **Remarque** : Développement court et d'un niveau élémentaire.

Théorème de structure des polynômes symétriques

- **Leçons concernées** : 105 ; 142 ; 144
- **Référence** : *Cours de mathématiques, Tome 1 - Algèbre*, Edmond RAMIS, Claude DESCHAMPS, Jacques ODOUX (pages 202-205)
- **Remarque** : Ce développement présente un résultat important de la théorie des polynômes symétriques qui admet beaucoup d'applications. Il donne également un algorithme. Le point clef du développement est de faire une double récurrence (d'abord sur le nombre de variables puis sur le degré total du polynôme).

Théorème de Kronecker

- **Leçons concernées** : 102 ; 142 ; 143 ; 144 ; (152)
- **Référence** : *Oraux X-ENS, algèbre 1*, Serge FRANCINO, Hervé GIANELLA, Serge NICOLAS (pages 198-199)
- **Remarque** : Ce développement est très court et peut se faire au choix en utilisant le résultant ou les polynômes symétriques.

Théorème de l'élément primitif

- **Leçons concernées** : (123) ; 125 ; 141 ; 144 ; (151)
- **Référence** : *Algèbre*, Xavier GOURDON (pages 89-90)
- **Remarque** : On montre ce théorème dans le cas où le corps est de caractéristique nulle et s'il y a le temps dans le cas où le corps est fini. Dans le cas où le corps est de caractéristique nulle le point important de la démonstration est le fait que le calcul du PGCD de deux polynômes ne dépend pas de l'extension de corps dans lequel on se place. Il faut également connaître le contre-exemple si le corps n'est ni de caractéristique nulle ni fini : on prend $L = \mathbb{F}_p(X, Y)$ qui est une extension finie de $K = \mathbb{F}_p(X^p, Y^p)$ de degré p^2 mais il n'existe pas $a \in L$ tel que $L = K[a]$ car à cause du morphisme de Frobenius on aurait $a^p \in K$ et donc $[L : K] = p$ ce qui est absurde.

Théorème de Wedderburn

- **Leçons concernées** : 101 ; (102) ; 123 ; (125) ; (151)
- **Référence** : *Cours d'algèbre*, Daniel PERRIN (page 82)
- **Remarque** : Ce développement fait intervenir une action de groupe et les polynômes cyclotomiques. Il faut prendre soin de bien distinguer ce qui est commutatif de ce qui ne l'est pas et il faut savoir justifier rigoureusement (autrement que par un dessin) l'inégalité $|q - \xi| > q - 1$ pour $q > 0$ et $\xi \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$.

Irréductibilité des polynômes cyclotomiques

- **Leçons concernées** : 102 ; 120 ; 141
- **Référence** : *Algèbre*, Xavier GOURDON (pages 91-92)
- **Remarque** : Ce développement établit un résultat important sur les polynômes cyclotomiques. Il est assez technique et nécessite une bonne maîtrise de l'irréductibilité comme par exemple le lien entre irréductibilité sur \mathbb{Q} et \mathbb{Z} et la réduction modulo p .

Version faible du théorème de Dirichlet

- **Leçons concernées** : (102) ; 120 ; 121 ; (141)
- **Référence** : *Algèbre*, Xavier GOURDON (pages 92-93)
- **Remarque** : Ce développement présente un très joli résultat. Il généralise le théorème d'Euclide qui établit l'existence d'une infinité de nombres premiers en utilisant le même « schéma » de démonstration. Il n'est pas nécessaire de faire le cas $k = 1$ au début vu qu'il s'en déduit des autres cas.

Décomposition de Dunford

- **Leçons concernées** : 153 ; 154 ; 155 ; 156 ; (157)
- **Référence** : *Oraux X-ENS, algèbre 2*, Serge FRANCINO, Hervé GIANELLA, Serge NICOLAS (pages 134-135) et *Objectif Agrégation* (pages 215-216)
- **Remarque** : Dans ce développement on commence par montrer le théorème de Dunford puis s'il y a le temps on peut ajouter le corollaire qui affirme que pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d)$ on a f est diagonalisable si et seulement si $\exp(f)$ est diagonalisable. Cependant il faut faire attention car cette décomposition n'est pas forcément la plus adaptée au calcul de l'exponentielle d'une matrice.

Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$

- **Leçons concernées** : (160) ; 170 ; 171 ; 181
- **Référence** : *Oraux X-ENS, algèbre 3*, Serge FRANCINO, Hervé GIANELLA, Serge NICOLAS (pages 130-131)
- **Remarque** : Ce développement fait intervenir la décomposition polaire généralisée. Il faut savoir que cette décomposition s'obtient à partir de la décomposition polaire et de la densité de l'ensemble des matrices inversibles.

L'exponentielle réalise un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$

- **Leçons concernées** : 156 ; 158 ; (160)
- **Référence** : *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Rached MNEIMNÉ, Frédéric TESTARD (pages 61-63)
- **Remarque** : Ce résultat se généralise sur les matrices hermitiennes. Dans la dernière partie de la démonstration, il faut borné un ensemble de valeur propre. Pour cela il suffit juste d'utiliser que pour toute matrice M et pour toute norme subordonnée on a $\text{Sp}(M) \subset B(0, \|M\|)$.

Chapitre 4

Couplages

4.1 Algèbre

101 - Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

- Les théorèmes de Sylow
- Théorème de Wedderburn

102 - Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

- Détermination des sous-groupes distingués à partir de la table de caractères
- Théorème de Kronecker
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques
- ~ Théorème de Wedderburn
- ~ Version faible du théorème de Dirichlet

103 - Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient.

- Classification des groupes d'ordre inférieur à 11
- Détermination des sous-groupes distingués à partir de la table de caractères
- ~ Les théorèmes de Sylow
- ~ Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$

104 - Groupes finis. Exemples et applications.

- Les théorèmes de Sylow
- Classification des groupes d'ordre inférieur à 11

105 - Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

- Table de caractère de S_4
- Théorème de structure des polynômes symétriques

106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

- Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$
- Sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$

107 - Représentations et caractères d'un groupe fini sur un \mathbb{C} -espace vectoriel.

- Détermination des sous-groupes distingués à partir de la table de caractères
- Table de caractère de S_4

108 - Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

- ~ Table de caractère de S_4
- ~ Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$

109 - Représentations de groupes finis de petit cardinal.

- Détermination des sous-groupes distingués à partir de la table de caractères
- Table de caractère de S_4

120 - Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques
- Version faible du théorème de Dirichlet

121 - Nombres premiers. Applications.

- Les théorèmes de Sylow
- Version faible du théorème de Dirichlet

122 - Anneaux principaux. Exemples et applications.

123 - Corps finis. Applications.

- Théorème de Wedderburn
- ~ Théorème de l'élément primitif

124 - Anneau des séries formelles. Applications.

125 - Extensions de corps. Exemples et applications.

- Théorème de l'élément primitif
- ~ Théorème de Wedderburn

126 - Exemples d'équations diophantiennes.

140 - Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

141 - Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

- Théorème de l'élément primitif
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques
- ~ Version faible du théorème de Dirichlet

142 - Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.

- Théorème de structure des polynômes symétriques
- Théorème de Kronecker

143 - Résultant. Applications.

- Théorème de Kronecker

144 - Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

- Théorème de structure des polynômes symétriques
- Théorème de l'élément primitif
- Théorème de Kronecker

150 - Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

- Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$
- Sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$

151 - Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

- Dual de $M_n(\mathbb{K})$
- ~ Théorème de l'élément primitif
- ~ Théorème de Wedderburn

152 - Déterminant. Exemples et applications.

- ~ Théorème de Kronecker

153 - Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

- Codiagonalisation des sous-algèbres réduites de $M_n(\mathbb{C})$
- Décomposition de Dunford

154 - Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

- Codiagonalisation des sous-algèbres réduites de $M_n(\mathbb{C})$
- Décomposition de Dunford

155 - Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

- Codiagonalisation des sous-algèbres réduites de $M_n(\mathbb{C})$
- Décomposition de Dunford

156 - Exponentielle de matrices. Applications.

- Décomposition de Dunford
- L'exponentielle réalise un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$

157 - Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

- Codiagonalisation des sous-algèbres réduites de $M_n(\mathbb{C})$
- ~ Décomposition de Dunford

158 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

- Sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$
- L'exponentielle réalise un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$

159 - Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

- Dual de $M_n(\mathbb{K})$

160 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

- ~ Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$
- ~ L'exponentielle réalise un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$

161 - Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.

- Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$
- ~ Table de caractère de S_4

162 - Systèmes d'équations linéaires ; opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

170 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

- Sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$
- Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$

171 - Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

- Sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$
- Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$

180 - Coniques. Applications.

181 - Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

- Sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$
- Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$

182 - Applications des nombres complexes à la géométrie.

183 - Utilisation des groupes en géométrie.

190 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

4.2 Analyse

201 - Espaces de fonctions : exemples et applications.

- Le théorème de Stone-Weierstrass
- L'espace de Sobolev $H^1(I)$
- Densité de l'ensemble des fonctions continues partout et dérivables nulle part
- Théorème de Montel
- Théorème de Riesz-Fischer

202 - Exemples de parties denses et applications.

- Le théorème de Stone-Weierstrass
- Densité de l'ensemble des fonctions continues partout et dérivables nulle part

203 - Utilisation de la notion de compacité.

- Le théorème de Stone-Weierstrass
- Théorème de Montel
- ~ L'espace de Sobolev $H^1(I)$

204 - Connexité. Exemples et applications.

- Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$
- ~ Théorème de Sarkovskii

205 - Espaces complets. Exemples et applications.

- L'espace de Sobolev $H^1(I)$
- Théorème de Riesz-Fischer
- Projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert
- ~ Densité de l'ensemble des fonctions continues partout et dérivables nulle part
- ~ Théorème de Cauchy-Lipschitz global

206 - Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

- Théorème de Sarkovskii
- Théorème de Cauchy-Lipschitz global
- ~ Méthode de Newton

207 - Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

- Prolongement méromorphe de la fonction Gamma d'Euler
- ~ Théorème d'Abel et contre-exemples

208 - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

- L'espace de Sobolev $H^1(I)$
- Théorème de Riesz-Fischer
- Projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert
- ~ Théorème de Cauchy-Lipschitz global

209 - Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

- ~ Le théorème de Stone-Weierstrass

213 - Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

- L'espace de Sobolev $H^1(I)$
- Projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert

214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

- Lemme de Morse
- Théorème des extrema liées

215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Exemples et applications.

- Lemme de Morse
- Théorème des extrema liées

216 - Étude métrique des courbes. Exemples.

217 - Sous-variétés de \mathbb{R}^n . Exemples.

- ~ Lemme de Morse
- ~ Théorème des extrema liées

218 - Applications des formules de Taylor.

- Lemme de Morse
- ~ Méthode de Newton

219 - Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

- Théorème des extrema liées

220 - Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

- Théorème de Cauchy-Lipschitz global
- Stabilité de l'équation de Hill-Mathieu

221 - Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

- Théorème de Cauchy-Lipschitz global
- Stabilité de l'équation de Hill-Mathieu

223 - Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

- Théorème de Sarkovskii
- Méthode de Newton
- ~ Théorème d'Abel et contre-exemples

224 - Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

226 - Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples et applications.

- Théorème de Sarkovskii
- ~ Méthode de Newton

228 - Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

- Densité de l'ensemble des fonctions continues partout et dérivables nulle part
- Méthode de Newton
- ~ Théorème de Sarkovskii
- ~ Le théorème de Stone-Weierstrass

229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

- ~ Méthode de Newton

230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

- Théorème d'Abel et contre-exemples
- Formule sommatoire de Poisson

232 - Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

~ Méthode de Newton

234 - Espaces L^p , $1 \leq p \leq +\infty$.

- L'espace de Sobolev $H^1(I)$
- Théorème de Riesz-Fischer

235 - Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications.

- Théorème de Riesz-Fischer
- Prolongement méromorphe de la fonction Gamma d'Euler
- ~ Théorème d'Abel et contre-exemples

236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

- Méthode de calcul d'une transformée de Fourier

239 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

- Méthode de calcul d'une transformée de Fourier
- Prolongement méromorphe de la fonction Gamma d'Euler

240 - Produit de convolution, transformation de Fourier. Applications.

- Méthode de calcul d'une transformée de Fourier
- ~ Formule sommatoire de Poisson

241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

- Le théorème de Stone-Weierstrass
- Théorème de Montel
- Théorème de Riesz-Fischer
- Théorème d'Abel et contre-exemples
- ~ Densité de l'ensemble des fonctions continues partout et dérivables nulle part

243 - Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

- Théorème d'Abel et contre-exemples
- Prolongement méromorphe de la fonction Gamma d'Euler

244 - Fonctions développables en série entière, fonctions analytiques. Exemples.

- Théorème d'Abel et contre-exemples
- Prolongement méromorphe de la fonction Gamma d'Euler

245 - Fonctions holomorphes sur un ouvert de \mathbb{C} . Exemples et applications.

- Théorème de Montel
- Théorème d'Abel et contre-exemples
- Méthode de calcul d'une transformée de Fourier
- Prolongement méromorphe de la fonction Gamma d'Euler

246 - Séries de Fourier. Exemples et applications.

- Formule sommatoire de Poisson
- ~ Le théorème de Stone-Weierstrass

247 - Exemples de problèmes d'interversion de limites.

- Théorème d'Abel et contre-exemples
- Prolongement méromorphe de la fonction Gamma d'Euler

249 - Suites de variables de Bernoulli indépendantes.

253 - Utilisation de la notion de convexité en analyse.

- Projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert

254 - Espaces de Schwartz $S(\mathbb{R}^d)$ et distributions tempérées. Transformation de Fourier dans $S(\mathbb{R}^d)$ et $S'(\mathbb{R}^d)$.

- L'espace de Sobolev $H^1(I)$
- Formule sommatoire de Poisson
- Valeur principal de $\frac{1}{x}$

255 - Espaces de Schwartz. Distributions. Dérivation au sens des distributions.

- L'espace de Sobolev $H^1(I)$
- Valeur principal de $\frac{1}{x}$
- ~ Formule sommatoire de Poisson

260 - Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

261 - Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

262 - Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

263 - Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

264 - Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.