108 – Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

2013 – 2014

Question.

Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est le seul sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$.

Réponse.

Soit H un sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$, H est alors distingué donc $\mathfrak{S}_n/H \simeq \{-1, 1\}$.

Les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$ donc il existe une transposition qui n'est pas dans H, or H est distingué et les transpositions sont conjuguées donc aucune transposition n'est dans H.

Soit π la projection canonique de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathfrak{S}_n/H$, alors pour τ une transposition, $\pi(\tau) = -1$ donc $\pi = \varepsilon$ car les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$, d'où le résultat.

Question.

Montrer qu'un élément de $GL_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme le produit d'une matrice triangulaire inférieure et d'une matrice orthogonale.

Réponse.

C'est l'algorithme de Gram-Schmidt.

Question.

Écrire le groupe quaternionique $\mathbb{H}_8$ avec générateurs et relations.

Réponse.

$\mathbb{H}_8 = \langle i, j \mid i^2 = j^2, i^4 = 1, j = iji \rangle$.

Question.

Décrire les groupes G finis qui vérifient $G = \langle a, b \rangle$ et $a^2 = b^2 = e$.

Réponse.

Les groupes diédraux vérifient ces conditions : ils sont engendrés par s et rs d'ordre 2.

Soit G un groupe vérifiant ces conditions, on pose $s = a, r = ab$ et n l'ordre de r. On a $sr = b$ donc r et s engendrent G et sr est d'ordre 2 donc G est un quotient du groupe diédral car G a peut-être d'autres relations. Mais r est d'ordre n et les sr^k sont distincts pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, donc G a $2n$ éléments, donc c'est le groupe diédral D_n.