101 — Groupe Opérant sur Un Ensemble. Exemples et Applications

G est un groupe, E un ensemble

1 - Définitions et Premiers Exemples

1) Définitions

Def 1 Une action (à gauche) de G sur E est une application $G\times E \to E$, $(g,x)\mapsto g\cdot x$ telle que (i) $\forall x\in E$, $1_G\cdot x = x$
(ii) $\forall g,g'\in G$, $\forall x\in E$, $g\cdot(g'\cdot x) = (gg')\cdot x$

De manière équivalente, une action est la donnée d'un morphisme de groupes $\varphi: G \to \mathfrak{S}(E)$, $g \mapsto \tau_g : E\to E,\ x\mapsto g\cdot x$

On le note $G \curvearrowright E$

Ex 2 • $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathfrak{S}(\mathbb{R})$, $n\mapsto \tau_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x+n$ définit une action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$
• $m\in\mathbb{N}^*$, $\mathfrak{S}_m$ agit sur $[\![1,m]\!]$ via $(\mathfrak{S}_m\times[\![1,m]\!]) \to [\![1,m]\!]$, $(\sigma, k) \mapsto \sigma(k)$

Def 3 Soit G opérant sur E, on définit
(i) pour $x\in E$, $Stab_G(x) = \{g\in G,\ g\cdot x = x\}$ le stabilisateur de x
(ii) pour $x\in E$, $O_x = \{g\cdot x,\ g\in G\}$ l'orbite de x
(iii) pour $g\in G$, $Fix(g) = \{x\in E, g\cdot x = x\}$ l'ensemble des points fixes de g

Rq 4 Pour $x\in E$, $Stab_G(x)$ est un sous-groupe de G

Def 5 L'action $G\curvearrowright E$ est dite (i) fidèle si $\forall g\in G$, $g\cdot x = x\ \forall x\in E \Leftrightarrow g = 1_G$
(ii) libre si $\forall g\in G\setminus\{1_G\}$, $Fix(g) = \emptyset$
(iii) transitive si $\forall x,x'\in E$, $O_x = O_{x'}$
(iv) k-transitive, $k\in\mathbb{N}$, si l'action définie par $G\times E^{*k}\to E^{*k}$, $(g,(x_1,\dots,x_k))\mapsto(g\cdot x_1,\dots,g\cdot x_k)$ est transitive
où $E^{*k} = \{(x_1,\dots,x_k)\in E^k,\ i\neq j \Rightarrow x_i\neq x_j\}$
(v) simplement transitive si elle est libre et transitive.

Rq 6 Si l'action est k-transitive, elle est $(k-1)$ transitive
Si l'action est libre, elle est fidèle

Ex 7 1) L'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ définie plus haut est libre mais pas transitive
2) L'action de $\mathfrak{S}_m$ sur $[\![1,m]\!]$ est fidèle et n-transitive mais pas libre
3) La Restriction de l'action de $\mathfrak{S}_m$ sur $[\![1,m]\!]$ à $\mathcal{A}_m$ est $n-2$ transitive

2) Premières Applications

Lemme 8 Soit G opérant sur E, la relation sur E définie par $x\sim y$ s'il existe $g\in G$ tel que $y = g\cdot x$ est une relation d'équivalence. De plus, les orbites de E sous G sont les classes d'équivalence de cette relation

Prop 9 (Équation aux classes) Soit G opérant sur E, on suppose E fini et on note Ω l'ensemble des orbites de E sous l'action. Alors $|E| = \sum_{\omega\in\Omega}|\omega|$

Appli 10 (Théorème de Fermat) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, p premier, si p ne divise pas n, $n^{p-1}\equiv 1[p]$

Appli 11 (Théorème de Cauchy) Soit G groupe fini, p premier, si $p\,|\,|G|$, alors il existe $x\in G$ d'ordre p.

Prop 12 (Relation orbite/stabilisateurs) Soit G opérant sur E, $x\in E$. L'application $G\to O_x$, $g\mapsto g\cdot x$ induit par passage au quotient une bijection $\bar{f}: G/Stab_G(x) \xrightarrow{\sim} O_x$
En particulier, $Card(O_x) < +\infty$ ssi $[G:Stab_G(x)] < +\infty$
Enfin, si G est fini, $|G| = |Stab_G(x)| \times Card(O_x)$

Prop 13 (Formule de Burnside) Soit G opérant sur E. On suppose G et E finis, on note Ω l'ensemble des Orbites de E. Alors $|\Omega| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)|$

Appli 14 Soit g opérant sur E, $q\in\mathbb{N}^*$
Un coloriage de E en (au plus) q couleurs est une application $f: E\to[\![1,q]\!]$
2 coloriages f, f' sont G-équivalents si il existe $g\in G$, $\forall x\in E$ $f(g^{-1}x) = f'(x)$
On note $C_G(E,q)$ l'ensemble des Classes d'équivalences de coloriages
Alors $|C_G(E,q)| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} q^{r(g)}$ où $r(g)$ est le nombre d'orbites de $\langle g\rangle \curvearrowright E$

3) Action d'un groupe par translation et par conjugaison

Def 15 On définit l'action par translation de G sur G par $G\times G\to G$, $(g,h)\mapsto gh$

Rq 16 Cette action est simplement transitive

Th 17 (Cayley) Soit G groupe fini d'ordre n, alors G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$

Appli 18 (1er théorème de Sylow) Soit G un groupe fini, $|G| = n = p^\alpha q$, $\alpha\in\mathbb{N}^*$, p premier et $p\wedge q = 1$
un p-Sylow de G est un sous-groupe de G d'ordre p^α.
G admet un p-Sylow et tout p-sous-groupe de G est contenu dans un p-Sylow

Prop 19 Soit G un groupe, H sous-groupe de G, $G\times {}^{G}/_{H} \to {}^{G}/_{H}$, $(g, \bar{g}H)\mapsto(g\bar{g})H$ définit une action transitive de G sur ${}^{G}/_{H}$

Appli 20 (Théorème de Lagrange) G groupe fini, H sous groupe de G alors $|H|\,\big|\,|G|$

Appli 21 (Théorème de Frobenius) G groupe fini, H sous groupe de G tel que pour p premier $p\,|\,|H| \Rightarrow p \geq [G:H]$, alors $H \triangleleft G$
En particulier, soit q le plus petit facteur premier de $|G|$, alors tout sous-groupe d'indice q est distingué dans G.