

ARITHMÉTIQUE DANS \mathbb{Z}

1) LETTRES PREMIERS DANS \mathbb{Z}

Def 1: On dit que $n \in \mathbb{N}$ est un nombre premier si $n \neq 1$ et n n'admet pas d'autres diviseurs dans \mathbb{N} que 1 et n .

Not 2: On note \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers.

Prop 3: Tout entier $n \geq 2$ possède un diviseur premier.

Prop 4: Lemme d'Euclide

Si p est premier, alors $p | ab \Rightarrow p | a$ ou $p | b$

Prop 5: Théorème fondamental de l'arithmétique

Tout nombre entier différent de 0 ou 1 se décompose de manière unique en produit de nombres premiers

Cor 6: \mathcal{P} est infini.

Prop 6: Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. $(a, b) = 1 \Leftrightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$.

Cor 7: Soit $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps $\Leftrightarrow n$ est premier.

2) FONCTIONS ARITHMÉTIQUES.

Def 8: On appelle fonction arithmétique toute fonction $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$. On note \mathcal{A} leur ensemble.

Ex 9: $d(n)$: nombre de diviseurs de n .

$\varphi(n)$: nombre d'entiers m tels que $1 \leq m \leq n$ et $(m, n) = 1$
(Indicateur d'Euler)

$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par le carré d'un nombre premier} \\ 1 & \text{si } n \text{ se décompose en un nombre impair de facteurs premiers distincts} \\ -1 & \text{si } n \text{ se décompose en un nombre pair de facteurs premiers distincts} \end{cases}$
(Fonction de Möbius)

$\mathbb{1}(n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Def 10: Une fonction arithmétique est dite multiplicative si:
 $\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, (m, n) = 1 \Rightarrow f(mn) = f(m)f(n)$ et $f(1) = 1$

On note \mathcal{M} leur ensemble.

Cons 11: Si $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ avec les p_i distincts, alors:

$$f(n) = \prod_{i=1}^k f(p_i^{\alpha_i})$$

Ex 12: $\varphi(n) = n \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - \frac{1}{p})$ est multiplicative.

Def 13: $f \in \mathcal{A}$ est dit complètement multiplicative si:
 $\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, f(mn) = f(m)f(n)$ et $f(1) = 1$.

Ex 14: Soit $p \in \mathcal{P} \setminus \{2\}$. La fonction définie par: $\forall n \in \mathbb{N}^*,$
 $(\frac{n}{p}) = n^{\frac{p-1}{2}} \text{ mod } p$ est complètement multiplicative.

On l'appelle le symbole de Legendre.

Prop 15: $(\mathcal{A}, +, \times, *)$ est une algèbre unitaire commutative, $+$, \times sont les lois usuelles, et $\forall f, g \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$
 $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$. Son élément neutre est: $e(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Prop 16: $(\mathcal{M}, *)$ est un sous-groupe de l'ensemble des inversibles de \mathcal{A} .

Prop 17: $\mu * \mathbb{1} = e$

Cor 18: Formule d'inversion de Möbius: Soit $f, g \in \mathcal{A}$.

Alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*, g(n) = \sum_{d|n} f(d)) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)g(\frac{n}{d}))$

ie. $g = f * \mathbb{1} \Leftrightarrow f = \mu * g$

Ex 19: $n = \sum_{d|n} \varphi(d) \Rightarrow \varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$

Def 20: Une série de Dirichlet est une série de fonctions de la variable complexe s , de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \Leftrightarrow f \in \mathcal{A}$.

Prop 21: Si $f, g \in \mathcal{A}$, alors $(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}) (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f * g(n)}{n^s}$

3) REPARTITION DES NOMBRES PREMIERS

Prop 22: Il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n+3$.



Prop 23: Théorème de Dirichlet (ADMIS)

Si $(a, b) = 1$, alors il existe une infinité de nombres premiers de la forme $an + b$.

Prop 24: La série $\sum_{p \in P} \frac{1}{p}$ diverge

Th. 25: Théorème des nombres premiers (ADMIS)

On pose $\forall x \in \mathbb{R}, \pi(x) = \text{Card}(P_n \cap]0, x])$. On a $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$

II - CORPS FINIS

1) CONSTRUCTION

Def 26: Soit K un corps fini. Le noyau de $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow K, n \mapsto n \cdot 1_K$ est de la forme $p\mathbb{Z}$, avec $p \in \mathbb{P}$. On note $p = \text{Car}(K)$, et on l'appelle caractéristique de K .

Rq 27: Si $\text{car}(K) = p$, le sous-corps premier de K est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. K a alors une structure de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ espace vectoriel, et on dispose de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|K| = p^n$.

Def 28: L'application $F: K \rightarrow K$ est un isomorphisme de $x \mapsto x^p$

corps appelé morphisme de Frobenius.

Prop 29: Petit théorème de Fermat

Soit $p \in \mathbb{P}, \forall a \in \mathbb{Z}, a^p \equiv a \pmod{p}$

Prop 30: Soit $p \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{N}^*$. On pose $q = p^n$.

i) Il existe un corp à q éléments, c'est le corps de décomposition du polynôme $X^q - X$ sur \mathbb{F}_p .

ii) Ce corps est unique à isomorphisme près. On le note \mathbb{F}_q .

Prop 31: Théorème de Wilson. Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Alors p premier $\Leftrightarrow (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$

Prop 32: Soit $p \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{N}$ et $q = p^n$

i) K sous-corps de $\mathbb{F}_q \Leftrightarrow \exists d | n$ tel que $|K| = p^d$

ii) $\forall d | n, \mathbb{F}_{p^d}$ a un sous-corps de cardinal p^d (c'est le corps de décomposition de $X^p - X$ sur \mathbb{F}_p dans \mathbb{F}_q)

Prop 33: \mathbb{F}_q^* est cyclique.

2) POLYNOMES IRREDUCTIBLES

Prop 34: Critère d'Eisenstein. Soit $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$.

Si il existe $p \in \mathbb{P}$ tel que $p \nmid a_n, \forall i \in \{0, \dots, n-1\}, p \mid a_i$ et $p^2 \nmid a_0$, alors P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Prop 35: Soit $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{Z}[X], \text{deg } P \geq 1$ et $p \in \mathbb{P}$ tel que $p \nmid a_n$. Si $P \pmod{p}$ est irréductible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, alors P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Prop 36: Soit $p \in \mathbb{P}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $q = p^n$. Alors pour tout polynôme irréductible sur \mathbb{F}_p de degré n , $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p(\alpha)$

Cor 37: Un polynôme irréductible sur \mathbb{F}_p de degré n est scindé sur \mathbb{F}_{p^n} . Son corps de rupture est donc aussi son corps de décomposition.

Th. 38: Soit $p \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{N}^*$. On note $q = p^n$, et pour $j \in \mathbb{N}^* \text{ Irr}(p, j)$ l'ensemble des polynômes irréductibles sur \mathbb{F}_p de degré j . On a: $X^q - X = \prod_j \prod_{\alpha \in \text{Irr}(p, j)} (X - \alpha)$

Th 39: On a $p^n = \sum_{d|n} d |\text{Irr}(p, d)|$ dans $|\text{Irr}(p, n)| = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) p^{n/d}$

Ex 40: $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1), \mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)$
 $= \mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X^2 + 1)$

3) CARRÉS DANS \mathbb{F}_q ($q = p^n$)

Th 41: Si $p=2$, tout élément de \mathbb{F}_q est un carré.

Si $p \neq 2, (\mathbb{F}_q^*)^2$ forme un sous-groupe d'ordre 2 de \mathbb{F}_q^* , c'est le noyau du morphisme $\mathbb{F}_q^* \rightarrow \mathbb{F}_q^*/(\mathbb{F}_q^*)^2, x \mapsto x^2$

Prop 42: $\forall p \in \mathbb{P}$ impair, $\forall a \in \mathbb{F}_p$

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in (\mathbb{F}_p^*)^2 \\ -1 & \text{si } a \in (\mathbb{F}_p^*) \setminus (\mathbb{F}_p^*)^2 \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

Cor 43: $\forall p \in \mathbb{P}$ impair, $\forall a \in \mathbb{F}_p, |\{x \in \mathbb{F}_p, ax^2 = 1\}| = 1 + \left(\frac{a}{p}\right)$

Ex 44: Pour $p \in \mathbb{P}$ impair, $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{8}} = \begin{cases} 1 & \text{si } p \equiv 1 \pmod{8} \\ -1 & \text{si } p \equiv 3 \pmod{8} \end{cases}$

[602]

[PER]

[CAL]

Th 45: Classification des formes quadratiques sur \mathbb{F}_q à $\text{Car}(\mathbb{F}_q) \neq 2$.

Soit E un \mathbb{F}_q -er de dimension n . Soit $\alpha \in (\mathbb{F}_q^*)^2$.
Alors il y a deux classes d'équivalence de formes quadratiques sur E , de matrices:

$$Q_1 = I_n \quad \text{et} \quad Q_2 = \text{diag}(1, \dots, 1, \alpha)$$

Th 46: Loi de réciprocité quadratique. Soit $p, q \in \mathbb{P}$ impairs, avec $p \nmid q$. Alors $\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right)$.

III - CORPS p-ADRIQUES

1) CONSTRUCTION

Def 47: Soit $n \geq 1$. On note $A_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et $\varphi_n: A_n \rightarrow A_{n-1}$ le morphisme canonique. On appelle anneau des entiers p-adiques \mathbb{Z}_p , le sous-anneau de $\prod A_n$ tel que $x \in \mathbb{Z}_p$ ssi $\forall n \geq 2, \varphi_n(x_n) = x_{n-1}$.

Prop 48: Soit $e_n: \mathbb{Z}_p \rightarrow A_n$ l'application coordonnées. La suite $0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_p \xrightarrow{e_n} A_n \rightarrow 0$ est exacte. (i.e. on peut identifier A_n et $\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p$)

Prop 49: L'ensemble des inversibles de \mathbb{Z}_p est $U = \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$.

Prop 50: Tout $x \in \mathbb{Z}_p$ s'écrit de manière unique $x = p^k u$ avec $u \in U$ et $k \in \mathbb{N}$.
On note $k = v_p(x)$; on l'appelle valuation p-adique des entiers.

Def 51: On note $\mathbb{Q}_p = \text{Frac}(\mathbb{Z}_p)$. On l'appelle corps des nombres p-adiques.
On étend v_p à \mathbb{Q}_p en posant $\forall x \in \mathbb{Z}_p, v_p(x) = v_p(x)$, $\forall \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}_p, v_p\left(\frac{x}{y}\right) = v_p(x) - v_p(y)$.

2) TOPOLOGIE

Def/Prop 52: Par convention, on pose $v_p(0) = +\infty$.
On munit \mathbb{Q}_p de la norme: $|x|_p = p^{-v_p(x)}$.

Rq 53: \mathbb{Q}_p est le complet de \mathbb{Z} pour l.l.p.
• la distance associée à l.l.p est dite ultramétrique, i.e. $d_p(x, y) \leq \max(d_p(x, z), d_p(y, z)), \forall z \in \mathbb{Q}_p$.

Prop 54: \mathbb{Z}_p est compact, ($\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq 1\}$)

Prop 55: \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{Q}_p .

3) EQUATION p-ADRIQUES

Th 56: Soit $f \in \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_n], \alpha = (\alpha_i) \in (\mathbb{Z}_p)^n, n, k \in \mathbb{Z}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$. On suppose $0 \leq 2k < n$ et que: $f(\alpha) \equiv 0 \pmod{p^n}$ et $v_p\left(\frac{\partial f}{\partial X_j}(\alpha)\right) = k$.
Il existe alors un zéro γ de f dans \mathbb{Z}_p^n qui est congru à α modulo p^{n-k} .

Cor 57: Supposons $p \neq 2$ et soit q une forme quadratique sur \mathbb{Z}_p telle que $\text{Disc}(q) \in U$. Soit $a \in \mathbb{Z}_p$.
Si $x \in \mathbb{Z}_p^n$ vérifie: $\exists i, x_i \in U$ et $f(x) \equiv a \pmod{p}$, alors il existe $\tilde{x} \in \mathbb{Z}_p^n$ tel que $f(\tilde{x}) = a$.

III - RECHERCHE ET UTILISATION DES NOMBRES PREMIERS

1) CRYPTAGE chiffrement

Th 58: Soit $p, q \in \mathbb{P}, p \neq q$. Soit $c, d \in \mathbb{N}$.
Si $cd \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$, alors $\forall x \in \mathbb{N}, x^{cd} \equiv x \pmod{pq}$.
CRYPTAGE RSA: Soit $p, q \in \mathbb{P}, p \neq q$. On pose $n = pq$.
Un message $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, chiffré en $C(x) = x^c$ est adressé à une personne qui est la seule à détenir la clé secrète $D(y) = y^d$.
Cette personne applique D au message pour retrouver x .

2) TESTS DE PRIMALITE

Ex 59: Crible d'Ératosthène
Def 60: Un nombre de Fermat est un nombre de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$.
Ex 61: Pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, F_k est premier. Mais F_5 n'est pas premier. (plus généralement, F_n n'est pas premier pour $5 \leq k \leq 20$)

Def 62: Un nombre de Mersenne est de la forme $M_r = 2^r - 1$ avec $r \in \mathbb{P}$.

Rq 63: Les nombres de Mersenne ont fourni les plus grands nombres premiers connus.

Prop 64: Test de Lucas-Lehmer. Soit $u = 2 + \sqrt{-3}$ et $v = 2 - \sqrt{-3}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $s_n = u^n - v^n$. Alors: (i) (s_n) est une suite entière, et $s_n \equiv 2 \pmod{3}$.
(ii) Si $M_p \mid s_{p-2}$, alors M_p est premier.

DEV n°1
[SER]

Précéd
m'inser

DEV
n°2

(COM)

References:

- [MER] Fondamentaux d'algèbre et d'arithmétique, Dany-Jock Mercier.
- [PAR] Exercices in Number Theory, D.P. Parent.
- [PER] Cours d'algèbre, Daniel Perrin.
- [GOZ] Théorie de Galois, I. Gozard.
- [CAL] Histoires Hédonistes de Groupes de Géométrie, Caldero - Gémont.
- [SER] Cours d'arithmétique, Jean-Pierre Serre.
- [COM] Algèbre et géométrie, François Combes.



Loi de réciprocité quadratique

Références : Histoires hédonistes de groupes et de géométrie, Caldero-Germoni.

Soit $p > 2$ premier.

Définition 0.1

Le symbole de Legendre est l'application:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\cdot}{p}\right) : \mathbb{F}_p^* &\longrightarrow \{-1, 1\} \\ a &\longmapsto a^{\frac{p-1}{2}} \end{aligned}$$

On remarque que, pour tout $a \in \mathbb{F}_p^*$, $|\{x \in \mathbb{F}_p, ax^2 = 1\}| = 1 + \left(\frac{a}{p}\right)$.

Théoreme 0.1

Soit $p \neq q$ deux nombres premiers impairs. Alors,

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

Démonstration: On calcule le cardinal de $X = \{(x_1, \dots, x_p) \in (\mathbb{F}_q)^p, \sum_{i=1}^p x_i^2 = 1\}$ de 2 façons.

(1) On fait agir $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur X via $k.(x_1, \dots, x_p) = (x_{k+1}, \dots, x_{k+p})$, avec des indices modulo p .

Par la formule des classes, on sait que $|X| = |X^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}|[p]$.

Or

$$\begin{aligned} (x_i) \in X^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad k.(x_i) = (x_i) \in X \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{F}_q \quad \forall 1 \leq i \leq p \quad x_i = x \quad \text{et} \quad px^2 = 1 \end{aligned}$$

Donc $|X| = 1 + \left(\frac{p}{q}\right)[p]$

(2) On rappelle que deux formes quadratiques définies sur \mathbb{F}_q sont équivalentes ssi elles sont de même rang et de même discriminant sur \mathbb{F}_q .

On pose $d = \frac{p-1}{2}$ et

$$\begin{aligned} f(X_1, \dots, X_n) &= \sum_{i=1}^p X_i^2 \\ g(Y_1, \dots, Y_d, Z_1, \dots, Z_d, T) &= 2 \sum_{i=1}^d Y_i Z_i + (-1)^d T^2 \end{aligned}$$

On note que $f \sim g$ donc $X = \{x \in (\mathbb{F}_q)^p, f(x) = 1\}$ s'identifie à $X' = \{x \in (\mathbb{F}_q)^p, g(x) = 1\}$ par un changement de variables linéaire.

Soit $x = (y_1, \dots, y_d, z_1, \dots, z_d, t) \in X'$.

Si pour tout $0 \leq i \leq d$ $y_i = 0$, on a $q^d \left(1 + ((-1)^d)^{\frac{q-1}{2}}\right)$ possibilités. Sinon, à y_1, \dots, y_d et t sont fixés, il reste à choisir z_1, \dots, z_d dans un hyperplan affine de $(\mathbb{F}_q)^d$, ce qui fait $(q^d - 1)qq^{d-1}$ possibilités.

D'où $|X| = q^d \left(q^d + (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \right)$. Donc dans \mathbb{F}_p ,

$$\begin{aligned} |X| &= \left(\frac{q}{p}\right) \left(\left(\frac{q}{p}\right) + (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \right) [p] \\ \left(\frac{q}{p}\right) \left(1 + \left(\frac{p}{q}\right) \right) &= \left(\frac{q}{p}\right)^2 \left(\left(\frac{q}{p}\right) + (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \right) [p] \\ \left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) &= (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} [p] \end{aligned}$$

Références : Cours d'arithmétique, Serre, p.28-30.

Soit p premier.

Théorème 0.1

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_m]$, $x = (x_i) \in (\mathbb{Z}_p)^m$, $n, k \in \mathbb{Z}$ et $j \in \{1, \dots, m\}$. On suppose que $0 \leq 2k < n$ et que

$$f(x) = 0[p^n] \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial X_j}(x) \right|_p = p^{-k}.$$

Alors il existe $y \in (\mathbb{Z}_p)^m$ tel que

$$f(y) = 0 \quad \text{et} \quad y = x[p^{(n-k)}]$$

La démonstration utilise le lemme d'Hensel qui est un analogue p -adique de la méthode de Newton.

Lemme 0.1

Soit $f \in \mathbb{Z}_p[X]$, $x \in \mathbb{Z}_p$ et $0 \leq 2k < n$. On suppose

$$f(x) = 0[p^n] \quad \text{et} \quad |f'(x)|_p = p^{-k}.$$

Alors il existe $y \in \mathbb{Z}_p$ tel que

$$f(y) = 0[p^{n+1}], \quad |f'(y)|_p = p^{-k}, \quad y = x[p^{n-k}]$$

Démonstration: (du lemme) Pour satisfaire la dernière condition, on pose $y = x + p^{n-k}z$ avec $z \in \mathbb{Z}_p$. Par la formule de Taylor-Young, il existe $a \in \mathbb{Z}_p$

$$f(y) = f(x) + f'(x)p^{n-k}z + p^{2(n-k)}a$$

On écrit $f(x) = p^n b$, $b \in \mathbb{Z}_p$, et $f'(x) = p^k c$, $c \in \mathbb{Z}_p^*$. On rappelle que $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$. On a $b = bc^{-1}c[p]$. On choisit $z = -bc^{-1}$. Alors,

$$f(y) = p^n(b + zc) + p^{2(n-k)}a$$

Comme $2n - 2k > n$, on obtient $f(y) = 0[p^{n+1}]$. De plus, par Taylor-Young à l'ordre 1 sur f' , on trouve

$$f'(y) = p^k c[p^{n-k}]$$

Comme $n - k > k$, on a $|f'(y)|_p = p^{-k}$.

Démonstration: Soit $g \in \mathbb{Z}_p[X_j]$ le polynôme obtenu en évaluant f en $(x_i)_{i \neq j}$. Supposons que l'on peut construire une solution y_j pour g . En posant $y_i = x_i$ pour tout $i \neq j$, on aura démontré le théorème.

On a donc réduit le problème à $f \in \mathbb{Z}_p[X]$.

On pose $x^{(0)} = x$. On construit une suite $(x^{(q)}) \in \mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}$ en appliquant le lemme pour $x^{(q)}$ à l'étape $q + 1$. Il existe $x^{(q+1)} \in \mathbb{Z}_p$ tel que

$$f(x^{(q+1)}) = 0[p^{n+q}], \quad |f'(x^{(q+1)})|_p = p^{-k}, \quad x^{(q+1)} = x^{(q)}[p^{n+q-k}]$$

En particulier $|x^{(q)} - x^{(q-1)}|_p \leq p^{-(n+q-k)}$. Comme la distance p -adique est ultramétrique, on a

$$\forall r > s \quad |x^{(r)} - x^{(s)}|_p \leq p^{-(n+s-k)}$$

Donc $(x^{(q)})$ est de Cauchy dans \mathbb{Z}_p complet. Ainsi, il existe $y \in \mathbb{Z}_p$ limite de $(x^{(q)})$ pour la distance p -adique.

Alors $f(y) = 0$ et $y = x[p^{n-k}]$.

Propriété 0.1

On suppose $p \neq 2$. Soit f une forme bilinéaire symétrique de coefficients $(a_{ij})_{i,j \leq m} \in (\mathbb{Z}_p)^{m^2}$ tels que $\det(a_{ij}) \in \mathbb{Z}_p^*$. Soit $a \in \mathbb{Z}_p$ et $x = (x_i) \in (\mathbb{Z}_p)^m$ tel que

$$\exists j \in 1, \dots, m \quad x_j \in \mathbb{Z}_p^* \quad \text{et} \quad f(x) = a[p]$$

Alors il existe une solution exacte issue de x .

Démonstration: On souhaite appliquer le théorème pour $n = 1$ et $k = 0$. Supposons que pour tout l , $\frac{\partial f}{\partial X_l} = 0[p]$. Or,

$$\forall l \in 1, \dots, m \quad \frac{\partial f}{\partial X_l}(x) = 2 \sum_i a_{il} x_i$$

Alors, en notant $A = (a_{ij})$, on a $2Ax = 0[p]$. Mais par hypothèse $x_j \neq 0[p]$. On a contredit $\det(a_{ij}) \in \mathbb{Z}_p^*$.