

Cadre: K désigne un corps (commutatif) quelconque

I. Le corps des fractions rationnelles $K(X)$.

1/ Structure de corps et d'algèbre de $K(X)$ [RDO § 7.1.1]

Thm / Def 1: L'anneau $K[X]$ étant intègre, on définit le corps des fractions rationnelles $K(X)$ comme étant $\text{Frac}(K[X])$. Plus précisément, $K(X) = K[X] \times K[X] \setminus \{0\} / R$ où R est la relation d'équivalence définie par $(A_1, B_1) R (A_2, B_2) \Leftrightarrow A_1 B_2 = A_2 B_1$. On note A_1/B_1 la classe de (A_1, B_1) .

Prop 2: L'un des lois $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+BC}{BD}$ et $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$. $K(X)$ est un corps dont le neutre additif, noté 0 , est la classe de $(0, 1)$, et le neutre multiplicatif, noté 1 , la classe de $(1, 1)$.

Prop 3: $\gamma: K \times K(X) \rightarrow K(X)$ munit $K(X)$ d'une structure de K -algèbre

$$(\alpha, \frac{P}{Q}) \mapsto \frac{\alpha P}{Q}$$

$\gamma: K[X] \rightarrow K(X)$ est un morphisme de K -algèbre injectif.

$$P \mapsto \frac{P}{1}$$

Thm 4: Soit K' un corps et $\varphi: K \rightarrow K'$ un isomorphisme. Alors il existe un unique isomorphisme de $K(X) \rightarrow K'(X)$ prolongeant φ et envoyant X sur X .

2/ Propriétés algébriques [RDO § 7.1.3, 7.1.2 et 7.1.4]

Prop / Def 5: Soit $F = \frac{A}{B} \in K(X)$. Alors l'élément $\deg A - \deg B \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ est indépendant du choix des représentants (A, B) de F . On l'appelle le degré F , noté $\deg F$.

Prop 6: Soient $F, F' \in K(X)$. Alors $\deg FF' = \deg F + \deg F'$ et $\deg(F+F') \leq \max(\deg F, \deg F')$.

Appl 7: $K(X)$ n'est pas algébriquement clos. [TAU Cor 15.1.4]

$T^2 - X \in K(X)[T]$ n'a pas de racine dans $K(X)$ car $\forall F \in K(X) \quad \deg F^2 \in 2\mathbb{Z}$ alors que $\deg X = 1$.

Thm / Def 8: Soit $F \in K(X)$, il existe un représentant (A, B) de F , unique à constante multiplicative près, tel que A et B soient deux polynômes premiers entre-eux. Ce représentant est appelé forme irréductible de F .

Def 3 (Pôles et racines): Soit $F = \frac{A}{B} \in K(X)$ sous forme irréductible. On appelle pôle (resp. racine) de multiplicité k toute racine de B (resp. A).

Rmq 10: Si L/K est une extension de corps, $F \in K(X)$ peut ne pas avoir de racine (resp. pôle) alors que $F \in L(X)$ en a.

Ex 11: $F = \frac{1}{X^2+1} \in \mathbb{R}(X)$ n'a pas de pôle mais vu dans $\mathbb{C}(X)$ elle en a deux: i et $-i$.

Prop 12: Les automorphismes de K -algèbre de $K(X)$ sont les applications $K(X) \rightarrow K(X)$ avec $a, b, c, d \in K$ et $ad - bc \neq 0$

$$G \mapsto G\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right)$$

3/ Dérivation [RDO § 7.1.6] et [LLFA VII.6]

Def 13: Soit $\frac{P}{Q} \in K(X)$ une fraction. On appelle dérivée de F , notée F' , la fraction rationnelle $\frac{P'Q - Q'P}{Q^2}$. On définit l'endomorphisme de dérivation D par: $D(F) = F'$.

Thm 14: Si K est de caractéristique nulle, $F' = 0$ si et seulement si F est constante.

C-Ex 15: Pour $K = \mathbb{F}_p$, $F = \frac{1}{X^p}$. Alors $F' = 0$. De façon plus générale, en caractéristique $p > 0$, on a: $F' = 0$ si et seulement si il existe $G \in K(X)$ telle que $F = G(X^p)$.

II Fonctions rationnelles

1/ Définition et propriétés [RDO § 7.1.5]

Def 16: Soit $F = \frac{P}{Q} \in K(X)$ sous forme irréductible. On note Δ_F le complémentaire dans K de l'ensemble des pôles de F . On appelle fonction rationnelle associée à F dans K l'application $\tilde{F}: \Delta_F \rightarrow K$ définie par $\tilde{F}(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Rmq 17: Si K est infini, Δ_F aussi; si K est fini on peut avoir $\Delta_F = \emptyset$.

Ex 18: $K = \mathbb{F}_p$, $F = \frac{1}{x(x-1)\dots(x-p+1)} \in \mathbb{F}_p(X)$. Alors $\Delta_F = \emptyset$.

Thm 19: On suppose K infini. Soient $F, G \in K(X)$ telles que $\tilde{F} \cap \Delta_F \cap \Delta_G = \tilde{G} \cap \Delta_G \cap \Delta_F$. Alors $F = G$.

Ex 20: $K = \mathbb{F}_p$, $F = \frac{1}{x^p}$ et $G = \frac{1}{x}$ alors $\tilde{F} = \tilde{G}$ sur K^* .

2/ Exemples d'utilisation [AUD exo VII.1] et [COTB § 12.7]

Prop 21: Paramétrage rationnel des coniques: soit $\mathcal{C}$ une conique de $\mathbb{R}^2$ et $A \in \mathcal{C}$. La droite $\mathcal{D}_t$ de pente t passant par A rencontre $\mathcal{C}$ en un point T_t . Alors $t \mapsto T_t$ est un paramétrage de $\mathcal{C}$ rationnel.

Ex 22: $\mathcal{C} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ et $A = (-1, 0)$, on trouve $T_t = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$.

Appli 23: Les triplets Pythagoriciens (= solutions entières de $x^2 + y^2 = z^2$) sont les $(d(u^2 - v^2), 2d(uv), d(u^2 + v^2))$, $d \in \mathbb{N}$ et $u, v = 1$.

Appli 24: L'équation diophantienne $x^3 + y^3 = xyz$ a pour solutions: $\{(uv^2, u^2v, u^3 + v^3) \mid u, v = 1, (u, v) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*\} \cup \{(x, -x, 0), x \in \mathbb{Z}\}$.

III Décomposition en éléments simples

1/ Étude théorique [LFA § VII.2, VII.6]

soit $F = \frac{P}{Q} \in K(X)$ sous forme irréductible avec Q unitaire et soit $Q = \prod_{i=1}^r Q_i^{a_i}$ sa décomposition en facteurs irréductibles.

Thm 25: F s'écrit de manière unique sous forme $F = E + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{a_i} \frac{P_{i,j}}{Q_i^j}$ où $E \in K[X]$ et $\deg P_{i,j} < \deg Q_i$.

Def 26: E s'appelle la partie entière de F et $P_i = \sum_{j=1}^{a_i} \frac{P_{i,j}}{Q_i^j}$ la partie polaire relative à $Q_i^{a_i}$.

Rmq 27: Cela signifie que $\{X^m, m \geq 0\} \cup \{\frac{X^k}{P^l}, P \text{ irréductible unitaire, } k < \deg P, l \leq a\}$ est une base de $K(X)$.

Appli 28 (Théorème de Lucas): Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}$. Alors les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P .

Ex 29: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ ayant deux racines réelles distinctes et tel que P'' divise P . Alors les racines de P sont réelles (et simples).

Cor 30: Si K est algébriquement clos, les parties polaires sont de la forme $\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{(X - a_j)^j}$. Si $K = \mathbb{R}$, elles sont de la forme

$\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{(X - a_j)^j}$ ou de la forme $\sum_{j=1}^m \frac{B_j X + \gamma_j}{(X^2 + pX + q)^j}$.

Appli 31: Primitives des fractions rationnelles: on se ramène au calcul des primitives des éléments simples.

Ex 32: $\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ a pour primitive $x \mapsto \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

2/ Calcul pratique de la décomposition [LFA § VII.3 et 5] [RDO § 7.3.3]

Thm 33 Soient $F = \frac{P}{Q} \in K(X)$ irréductible avec $Q(0) \neq 0$ et $P = (a_0 + \dots + a_{k-1}X^{k-1})Q + X^k R$ la division de P par Q à l'ordre k selon les puissances croissantes. Alors $P_k(F) = \frac{a_0}{X^k} + \dots + \frac{a_{k-1}}{X}$.

Ex 34 $F = \frac{x^2+1}{x(x-1)^4(x^2+1)^2} \in \mathbb{R}(X)$ alors $P_{x-1}(F) = \frac{2}{(x-1)^4} + \frac{8}{(x-1)^3} + \frac{29}{(x-1)^2} + \frac{31}{x-1}$.

Prop 35: Si $F = \frac{P}{Q}$ a un pôle simple en a , $P_{x-a} = \frac{P(a)}{Q'(a)} \cdot \frac{1}{x-a}$.

Ex 36: $F = \frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{i}{x-i} - \frac{i}{x+i} \right)$, $K = \mathbb{C}$.

Rmq 37: Si $K = \mathbb{R}$, on peut déterminer les parties polaires $\sum_{j=1}^m \frac{B_j X + \delta_j}{(X^2 + pX + q)^j}$: on trouve B_m et δ_m en évaluant $(X^2 + pX + q)^m F$ en une racine complexe de $X^2 + pX + q$ puis on itère le procédé sur $F - \frac{B_m X + \delta_m}{(X^2 + pX + q)^m}$.

3/ Résidus [TAU § 15.5 et 15.7] et [ATA § 8.4.2]

Def 38: Soit $F \in K(X)$ ayant un pôle α d'ordre m , de partie polaire $\frac{a_1}{X-\alpha} + \dots + \frac{a_m}{(X-\alpha)^m}$. Le résidu de F en α , noté $\text{Res}(F, \alpha)$ est $a_1 \in K$.

Prop 39: On suppose K algébriquement clos.

i/ Si $\deg F < -1$ alors $\sum_{\alpha \text{ pôle}} \text{Res}(F, \alpha) = 0$.

ii/ L'image de D (opérateur de dérivation) est l'ensemble des fractions dont tous les résidus sont nuls.

Prop 40: Si $\text{can } K = 0$, $F \in K(X)$ telles que $P_{X-\alpha}(F) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda_k}{(X-\alpha)^{m-k}}$.

Alors $\lambda_{m-1} = \text{Res}(F, \alpha) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dX^{m-1}} (X-\alpha)^m F(\alpha)$.

Ex 41: Si $F = \frac{X^4 + 1}{X(X^2 - 1)^2}$ alors $\text{Res}(F, 1) = 0$.

Thm 42 (Résidus): Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ sans pôle réel et telle que $\deg F \leq -2$. Notons $z_1, \dots, z_m$ les pôles de F de partie imaginaire strictement positive. Alors:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Res}(F, z_k).$$

Ex 43: $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^6 + 1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^6 + 1} = \pi i \left(-\frac{e^{i\pi/6}}{6} - \frac{e^{i\pi/2}}{6} - \frac{e^{i5\pi/6}}{6} \right) = \frac{\pi}{3}$

IV Fractions rationnelles et séries formelles [RDO § 7.4.4] [LFA § VII.4]

Thm/Def 44: Soient $F \in K(X)$, $\frac{A}{B}$, $\frac{A_1}{B_1}$ deux représentants de F . Si il existe une série formelle $S \in K[[X]]$ telle que $A = B \cdot S$ alors on a aussi $A_1 = B_1 \cdot S$. On dit alors que S est le développement en série formelle de F .

Notation 45: On note $K(X)_0$ l'ensemble des fractions rationnelles dont zéro n'est pas un pôle.

Thm 46: $F \in K(X)$ est développable en série formelle si et seulement si $F \in K(X)_0$. Le développement est alors unique et son p -ième coefficient est le p -ième coefficient du quotient de A par B selon les puissances croissantes, où $F = \frac{A}{B}$ sous forme irréductible.

Cor 47: il existe un unique morphisme de K -algèbre injectif $\gamma: K(X)_0 \rightarrow K[[X]]$ prolongeant $K[X] \hookrightarrow K[[X]]$.

Ex 48: Si $\text{can } K = 0$, $\frac{1}{(1-X)^p}$ est développable en série formelle:

$$\frac{1}{(1-X)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+p-1}{p-1} X^n.$$

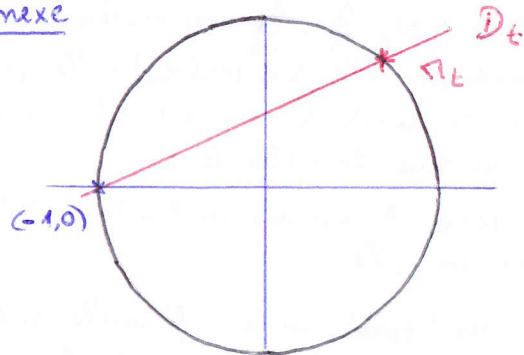
Appl 49: Partition d'un entier en parts fixées

DVP $m^2 2$

Si $a_1, \dots, a_k$ sont des entiers premiers entre eux dans leur ensemble alors:

$$U_m = \#\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = m\} \sim \frac{m^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \frac{1}{a_1 \dots a_k}$$

Annexe



Paramétrisation rationnelle du cercle

Références :

- [RDO] E. Ramiès, C. Deschamps, J.-O. Doux - Cours de mathématiques spéciales, Tome 1, Algèbre
- [LFA] J. Lelang-Ferland, J.-P. Annaudies, Cours de mathématiques, Tome 1, Algèbre
- [TAU] P. Tauvel, Algèbre 2nd édition
- [AUD] P. Audin - Géométrie
- [COMB] F. Combes, Algèbre et géométrie
- [ATI] G. A. M. - E. T. Mathieu, Analyse complexe
- [X-ENS] O. X-ENS Algèbre 1, 2nd édition

Automorphismes de $K(X)$

Florian LEMONNIER – 25 novembre 2014

[X-ENS A1], exercice 5.54

Théorème

Soit K un corps quelconque.

Les automorphismes de K -algèbres de $K(X)$ sont les applications de la forme

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \rightarrow & K(X) \\ G & \mapsto & G\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right) \end{array}$$

où $a, b, c, d \in K^4$ vérifient $ad - bc \neq 0$.

Démonstration :

Étape 1 : Déterminons les endomorphismes de K -algèbres de $K(X)$.

Soit Φ un endomorphisme de K -algèbres de $K(X)$. Posons $F = \Phi(X)$.

Soit $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k X^k \in K[X]$, on a : $\Phi(P) = \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k \Phi(X^k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k F^k = P \circ F$.

Ainsi, pour tous $P \in K[X]$, $Q \in K[X] \setminus \{0\}$ et $G = \frac{P}{Q}$, où, on a : $\Phi(G) = \frac{\Phi(P)}{\Phi(Q)} = \frac{P \circ F}{Q \circ F} = G \circ F$.

Réciproquement, pour $F \in K(X) \setminus K$, $\Phi_F : \begin{array}{ccc} K(X) & \rightarrow & K(X) \\ G & \mapsto & G \circ F \end{array}$ est bien un morphisme de K -algèbres.¹

Remarquons que si $F = a \in K$, alors Φ_F n'est pas bien défini : en effet $\frac{1}{X-a}$ n'a pas d'image par Φ_F .

Ainsi, l'ensemble des endomorphismes de K -algèbres de $K(X)$ est l'ensemble des Φ_F , où F parcourt $K(X) \setminus K$.

Étape 2 : Cherchons à quelle condition sur F , Φ_F est un automorphisme.

Supposons que Φ_F soit un automorphisme.

Alors Φ_F est surjectif et donc : $\exists G \in K(X), \Phi_F(G) = G \circ F = X$.

Soient $F = \frac{A}{B}$ et $G = \frac{P}{Q}$ des représentations irréductibles de ces fractions rationnelles.

On écrit $P = \sum_{j=0}^{d_P} p_j X^j$ et $Q = \sum_{k=0}^{d_Q} q_k X^k$ où d_P et d_Q sont les degrés respectifs de P et Q .

On a : $G \circ F = X \Leftrightarrow P \circ F = X(Q \circ F)$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{d_P} p_j F^j = X \sum_{k=0}^{d_Q} q_k F^k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{d_P} p_j \frac{A^j}{B^j} = X \sum_{k=0}^{d_Q} q_k \frac{A^k}{B^k}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{d_P} p_j A^j B^{m-j} = X \sum_{k=0}^{d_Q} q_k A^k B^{m-k}, \text{ où on a noté } m = \max\{d_P, d_Q\}.$$

– D'une part, $A \mid (p_0 - q_0 X) B^m$.

Or A et B sont premiers entre eux, donc A et B^m sont également premiers entre eux, d'où $A \mid p_0 - q_0 X$.

Aussi, comme P et Q sont premiers entre eux, on a $(p_0, q_0) \neq (0, 0)$.

Donc $p_0 - q_0 X$ est de degré 0 ou 1, donc A est de degré 0 ou 1.

1. Il s'agit de vérifier :

– $\Phi_F(1) = 1$.

– $\Phi_F(G)$ est bien défini pour tout $G \in K(X)$.

Pour cela, on montre que $G \circ F = \frac{B^m \times (P \circ F)}{B^m \times (Q \circ F)}$, où $F = \frac{A}{B}$ est une écriture irréductible et $m = \max\{\deg P, \deg Q\}$ est

une écriture de $G \circ F$ en fraction de polynômes et que le polynôme $B^m \times (Q \circ F)$ n'a qu'un nombre fini de racines.

– Φ_F est K -linéaire.

– $\Phi_F(G_1 G_2) = \Phi_F(G_1) \Phi_F(G_2)$ pour tous $G_1, G_2 \in K(X)$.

- D'autre part, $B \mid p_{d_P} A^{d_P} B^{m-d_P} - q_{d_Q} X A^{d_Q} B^{m-d_Q}$.
 - Si $m = d_P = d_Q$, alors $B \mid (p_m - q_m X) A^m$ et donc $B \mid p_m - q_m X$ car B et A^m sont premiers entre eux. Or $q_m \neq 0$ car Q est de degré $m = d_Q$, donc $\deg B = 0$ ou 1 .
 - Si $m = d_Q > d_P$, alors $B \mid q_m X A^m$ donc $B \mid q_m X$ donc $\deg B = 0$ ou 1 .
 - Si $m = d_P > d_Q$, alors $B \mid p_m A^m$ donc $B \mid p_m$ donc $\deg B = 0$.
- Toujours est-il que $\deg B = 0$ ou 1 .

Par conséquent, il existe $(a, b, c, d) \in K^4$, $F = \frac{aX+b}{cX+d}$.

Et F ne pouvant évidemment pas être constant, on doit imposer $ad - bc \neq 0$.

Étape 3 : Réciproquement, montrons que cette condition nécessaire est suffisante.

Pour $(a, b, c, d) \in K^4$ vérifiant $ad - bc \neq 0$, on note $\Phi_{a,b,c,d}$ le morphisme de K -algèbres défini par :

$$\Phi_{a,b,c,d}(X) = \frac{aX+b}{cX+d}.$$

Montrons que : $\Phi : \begin{cases} \text{GL}_2(K) & \rightarrow \text{End}_{K\text{-alg.}}(K(X)) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto \Phi_{a,b,c,d} \end{cases}$ est un morphisme de groupes.

Cela découle de l'égalité :

$$\frac{a' \frac{aX+b}{cX+d} + b'}{c' \frac{aX+b}{cX+d} + d'} = \frac{(aa' + bc')X + (ab' + bd')}{(ca' + dc')X + (cb' + dd')}$$

On reconnaît effectivement les coefficients du produit matriciel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$.

On en déduit alors que $\Phi_{a,b,c,d}$ est inversible, d'inverse $\Phi_{a',b',c',d'}$ où $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$, car $ad - bc \neq 0$.

Donc pour $(a, b, c, d) \in K^4$ vérifiant $ad - bc \neq 0$, $\Phi_{a,b,c,d}$ est un automorphisme de K -algèbres de $K(X)$.

On en déduit finalement que l'ensemble des automorphismes de K -algèbres de $K(X)$ est l'ensemble des applications de la forme $\begin{cases} K(X) & \rightarrow K(X) \\ G & \mapsto G\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right) \end{cases}$ avec $(a, b, c, d) \in K^4$ vérifiant $ad - bc \neq 0$.² ■

Références

[X-ENS A11] S. FRANCINO, H. GIANELLA et S. NICOLAS – *Oraux X-ENS Algèbre 1*, 2^e éd., Cassini, 2007.

2. Le 2nd théorème d'isomorphisme peut même nous donner un résultat supplémentaire.

On a montré au cours de la démonstration que $\text{Im}(\Phi) = \text{Aut}_{K\text{-alg.}}(K(X))$.

De plus

$$\Phi_{a,b,c,d}(X) = X \Leftrightarrow aX + b = cX^2 + dX \Leftrightarrow b = c = 0 \text{ et } a = d$$

Donc $\text{Ker}(\Phi) = \{\lambda I_2 \mid \lambda \in K^\times\}$.

Et on en déduit donc :

$$\text{Aut}_{K\text{-alg.}}(K(X)) \simeq \text{GL}_2(K) / \text{Ker}(\Phi) = \text{GL}_2(K) / \{\lambda I_2 \mid \lambda \in K^\times\} = \text{PGL}_2(K)$$

Partitions d'un entier en parts fixées

Florian LEMONNIER – 25 novembre 2014

[X-ENS An2], exercice 3.15

Théorème

Soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}^*$ premiers dans leur ensemble.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$u_n = \# \left\{ (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = n \right\}$$

Alors on a :

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

Démonstration :

Étape 1 : Considérons le produit de Cauchy des séries formelles $\sum_{x_i=0}^{\infty} X^{a_i x_i}$, pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

On note $f(X)$ ce produit de Cauchy ; on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} f(X) &= \prod_{i=1}^k \left(\sum_{x_i=0}^{\infty} X^{a_i x_i} \right) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - X^{a_i}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \\ a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = n}} 1 \right) X^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n \end{aligned}$$

Étape 2 : Décomposons la fraction rationnelle $f(X)$ en éléments simples.

La série formelle $f(X)$ est la série génératrice de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$; c'est une fraction rationnelle dont les pôles sont les racines $a_1^{\text{èmes}}, \dots, a_k^{\text{èmes}}$ de l'unité.

Le pôle 1 est de multiplicité k .

Soit $\omega \neq 1$ un pôle de f . Comme $\frac{1}{1 - X^{a_i}}$, où $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, n'a que des pôles simples, ω est de multiplicité inférieure ou égale à k . Par l'absurde, on suppose que ω soit un pôle de multiplicité k .

On aurait alors : $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \omega^{a_i} = 1$.

Or, d'après le théorème de Bezout, les $(a_i)_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket}$ étant premiers entre eux dans leur ensemble :

$$\exists (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{Z}^k, a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = 1$$

$$\text{Alors } \omega = \omega^{\sum_{i=1}^k a_i u_i} = \prod_{i=1}^k (\omega^{a_i})^{u_i} = 1.$$

Contradiction ! On en déduit donc que la multiplicité du pôle $\omega \neq 1$ est strictement inférieure à k .

Notons $\mathcal{P} = \{\omega_1, \dots, \omega_p\}$ l'ensemble des pôles de $f(X)$, avec $\omega_1 = 1$.

Par décomposition en éléments simples, il existe $c_{i,j} \in \mathbb{C}$ pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket, j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, tels que :

$$f(X) = \frac{\alpha}{(1-X)^k} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq k-1}} \frac{c_{i,j}}{(\omega_i - X)^j}$$

Étape 3 : Développons en série formelle les éléments simples de $f(X)$.

En effet, pour $\omega \in \mathcal{P}$ et $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\frac{1}{(\omega - X)^j}$ est développable en série formelle. Ses coefficients

s'obtiennent en dérivant $(j-1)$ fois le développement en série formelle de $\frac{1}{\omega - X}$.

On a :

$$\frac{1}{\omega - X} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{1 - \frac{X}{\omega}} = \frac{1}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{X}{\omega} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{\omega^{n+1}}$$

Puis, pour $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$,

$$\frac{(j-1)!}{(\omega - X)^j} = \sum_{n=j-1}^{\infty} n(n-1) \dots (n-j+2) \frac{X^{n-j+1}}{\omega^{n+1}}$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{(\omega - X)^j} = \sum_{n=j-1}^{\infty} \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!} \frac{X^{n-j+1}}{\omega^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+j-1)!}{(j-1)!n!} \frac{X^n}{\omega^{n+j}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{n} \frac{X^n}{\omega^{n+j}}$$

Ainsi :

$$f(X) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} X^n + \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq k-1}} c_{i,j} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{n} \frac{X^n}{\omega^{n+j}} \right)$$

Étape 4 : Dédoublons-en un équivalent de u_n en l'infini.

La dernière expression de $f(X)$ nous fournit, par unicité du développement en série formelle :

$$u_n = \alpha \binom{n+k-1}{n} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq k-1}} c_{i,j} \binom{n+j-1}{n} \frac{1}{\omega^{n+j}}$$

Or, pour $r \in \mathbb{N}^*$, on a : $\binom{n+r-1}{n} = \frac{(n+r-1) \dots (+1)}{(r-1)!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{r-1}}{(r-1)!}$.

Ainsi, $\alpha \binom{n+r-1}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \alpha \frac{n^{r-1}}{(r-1)!}$

Et $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, c_{i,j} \binom{n+j-1}{n} \frac{1}{\omega^{n+j}} = o(n^{k-1})$, car les pôles de $\mathcal{P}$ sont des racines de l'unité, donc de module 1.

Par conséquent,

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \alpha \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

Reste à calculer α .

Pour cela, on multiplie $f(X)$ par $(1-X)^k$ et on substitue 1 à X :

$$(1-X)^k f(X) = \prod_{i=1}^k \frac{1-X}{1-X^{a_i}} = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1+X+\dots+X^{a_i-1}}$$

$$\alpha + 0 = \prod_{i=1}^k \frac{1}{a_i}$$

D'où :

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{a_1 \dots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

■

Références

[X-ENS An2] S. FRANCINO, H. GIANELLA et S. NICOLAS – *Oraux X-ENS Analyse 2*, 2^e éd., Cassini, 2009.