140

Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

Soit K un corps commutatif quelconque.

I Construction de $K(X)$ et généralités

. **Thm/définition 1:** Notons $E = K[X] \times (K[X] \setminus \{0\})$ et considérons la relation R définie par : $(A,S)\, R\, (B,T) \Leftrightarrow AT = BS$

La relation R est une relation d'équivalence dans E. L'ensemble-quotient E/R est noté $K(X)$ et ses éléments sont appelés les fractions rationnelles à une indéterminée et à coefficients dans K.

Pour $(A,S) \in E$, on note $\frac{A}{S}$ la classe de (A,S) modulo R.

. Opérations dans $K(X)$ — Référence : J.M Monier Algèbre MPSI p.160

. définition/proposition 2 : addition.

Définissons une loi interne, notée $+$, dans E par :

$$\boxed{(A,S) + (B,T) = (AT+BS,\ ST)}$$

Cette loi $+$ est compatible avec R.

. définition/proposition 3 : multiplication

De même, on peut définir dans $K(X)$ une loi interne notée . (ou par l'absence de symbole) par, pour tous $(A,S),(B,T) \in E$: $\boxed{\frac{A}{S} \cdot \frac{B}{T} = \frac{AB}{ST}}$

. **Théorème/définition 4 :** $(K(X), +, \cdot)$ est un corps commutatif, appelé corps des fractions rationnelles à une indéterminée et à coefficients dans K.

Le neutre pour l'addition est l'élément $(0,1)$, le neutre pour la multiplication est l'élément $(1,1)$

. **Rque 5 :** $K(X)$ est une extension transcendante de K.

. **Théorème 6 :** Les automorphismes de $K(X)$ sont les homographies. $\boxed{\text{DEV 1}}$

Référence : Oraux X-ENS p.244 Algèbre 1

• Dérivation d'une fraction rationnelle

. **Définition 7 :** Soit $F \in K(X)$, $(A,S) \in E$ tel que $F = \frac{A}{S}$

On définit la fraction rationnelle dérivée de F, notée F' par :

$$\boxed{F' = \frac{A'S - AS'}{S^2}}$$

. **Proposition 8 :** i) On suppose que le corps K est de caractéristique nulle. Soit $T \in K(X)$, on a :

$T' = 0$ si et seulement si $T \in K$.

ii) On suppose maintenant K de caractéristique $p > 0$. Soit $P \in K(X)$, on a : $P' = 0$ si et seulement si il existe $Q \in K[X]$ tel que $P = Q(X^p)$

Référence : Cours d'Algèbre, Patrice Tauvel p.262

. **Application 9 :** Il n'existe aucune fraction rationnelle T telle que : $T' = \frac{1}{X}$

Autrement dit, le logarithme n'est pas une fraction rationnelle.

II Décomposition en éléments simples et théorème des résidus

1) Décomposition en éléments simples

Définition 10 : On appelle éléments simples de $K(X)$:

- les monomes de $K[X]$
- les éléments de $K(X)$ de la forme $\frac{C}{S^\alpha}$ où : $\begin{cases} S \in K[X], \deg(S) \geq 1, S \text{ irréductible} \\ \alpha \in \mathbb{N}^* \\ C \in K[X] \setminus \{0\} \\ \deg(C) < \deg(S) \end{cases}$

Théorème 11 : Tout $T \in K(X)$ s'écrit de manière unique sous la forme :
$$\boxed{T = E + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{v(i)} \frac{R_j^{(i)}}{S_i^{j}} \right)}$$
où $E \in K[X]$, $S_1, \dots, S_n$ sont unitaires irréductibles deux à deux distincts, $v(i) \in \mathbb{N}^*$ pour $1 \leq i \leq n$, $\deg(R_j^{(i)}) < \deg(P_i)$ pour tous i, j et $R^{(i)}_{v(i)} \neq 0$ pour tout i.

Exemple 12 : La décomposition en éléments simples de $F = \frac{X^5+1}{X^3(X-2)}$ dans $\mathbb{R}(X)$.
$$F = X + 2 + \frac{-\frac{1}{2}}{X^3} + \frac{-\frac{1}{4}}{X^2} + \frac{-\frac{1}{8}}{X} + \frac{\frac{33}{8}}{X-2}$$

Application 13 : Calcul de $I = \int_3^4 \frac{x^5+1}{x^3(x-2)}\,dx = \frac{391}{72} + \frac{1}{8}\log(3\times 2^{31})$

Exemple 14 : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant.
On peut écrire : $P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{n_k}$, où $r \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ sont les racines deux à deux distinctes de P, et $n_1, \dots, n_r$ leur ordre respectif. On a : $\boxed{\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r} \frac{n_k}{X - \lambda_k}}$

- 1ère application de ce résultat (15) : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

  Référence : Oraux X-ENS, p.229

- 2ème application (16) : Soit n un entier supérieur ou égale à 3 et P, Q, R des polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$ tels que : $P^n + Q^n = R^n$. Alors il existe $D \in \mathbb{C}[X]$ et $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ tels que : $P = \lambda D$, $Q = \mu D$, $R = \nu D$, $\lambda^n + \mu^n = \nu^n$

$\boxed{\text{DEV 2}}$ Référence : Cours d'algèbre, Patrice Tauvel, p.271

2) Théorème des résidus

- **Rappel (18) :** Soit $T \in K(X)$, $\alpha \in K$ un pôle d'ordre n de T et $P_\alpha(T) = \frac{a_1}{X-\alpha} + \frac{a_2}{(X-\alpha)^2} + \dots + \frac{a_n}{(X-\alpha)^n}$ sa partie polaire relativement au pôle α. On dit que a_1 est le résidu de T en α, on le note $\operatorname{Res}(T, \alpha)$.

- **Théorème des résidus (19) :** Soit $T \in \mathbb{R}(X)$, sans pôle réel et telle que $\deg(T) \leq -2$. Notons $\zeta_1, \dots, \zeta_s$ les pôles de T de partie imaginaire strictement positive.
  Alors : $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} T(t)\,dt = 2i\pi \sum_{m=1}^{s} \operatorname{Res}(T, \zeta_m)}$

- **Exemple (20) :** Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $T = \frac{1}{X^{2p}+1}$

  On a : $\int_{-\infty}^{+\infty} T(t)\,dt = \frac{\pi}{p \sin\left(\frac{\pi}{2p}\right)}$

  Référence : cours d'algèbre, Patrice Tauvel, p.271

III) Séries formelles et fractions rationnelles

Théorème/Définition 21 : Soit $F \in K(X)$, $\frac{A_1}{B_1}$ et $\frac{A_2}{B_2}$ deux représentants de F. Si il existe une série formelle $S \in K[[X]]$ telle que $A_1 = B_1 \cdot S$, alors on a aussi $A_2 = B_2 \cdot S$.
On dit alors que S est le développement en série formelle de F.

Proposition 22 : Soit $A = (a_n)_n \in K[[X]]$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :
i) A est inversible dans l'anneau $K[[X]]$
ii) L'élément a_0 est non nul

Corollaire 23 : Soit $F = \frac{A}{B} \in K(X)$, avec $B = \sum_{i=1}^{m} b_i X^i$.
Alors $F \in K[[X]]$ si et seulement si b_0 est non nul,
ie $F = AB^{-1}$ avec B^{-1} l'inverse de B dans $K[[X]]$.

Exemple 24 : Si $\mathrm{car}(K) = 0$,
$\frac{1}{(1-X)^p}$ est développable en série formelle :

$$\boxed{\frac{1}{(1-X)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p-1} X^n}$$

Référence : La minerve agreg KL (sur internet) Leçon 140

Application 25 : Nombre de façons d'obtenir n en sommant des entiers premiers entre eux fixés.
Si $a_1, \dots, a_k$ sont des entiers premiers entre eux dans leur ensemble, alors :

$$\boxed{u_n = \#\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid a_1x_1 + \dots + a_kx_k = n\} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} \times \frac{1}{a_1 \cdots a_k}}$$

Théorème 26 : (réciproque du corollaire 23)
Soit $A = (a_n)_n \in K[[X]]$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :
i) A est une série formelle rationnelle.
ii) Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$ tels que, pour tout $n \geq p$:
$a_n = \lambda_1 a_{n-1} + \lambda_2 a_{n-2} + \dots + \lambda_p a_{n-p}$

Référence : Cours d'algèbre, Patrice Tauvel, p.335

Bibliographie :

. Cours d'algèbre, Patrice Tauvel, Dunod
. Oraux X-ENS, algèbre 1, Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas
. Algèbre MPSI, Jean-Marie Monier, J'intègre, 4e édition
. La minerve agreg KL (sur internet) Leçon 140

$\boxed{\text{DEV 1}}$

Automorphismes de $K(X)$

Florian LEMONNIER – 25 novembre 2014

[X-ENS Al1], exercice 5.54

Théorème

> Soit K un corps quelconque.
>
> Les automorphismes de K-algèbres de $K(X)$ sont les applications de la forme $\left| \begin{array}{ccc} K(X) & \to & K(X) \\ G & \mapsto & G\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right) \end{array} \right.$
>
> où $a, b, c, d \in K^4$ vérifient $ad - bc \neq 0$.

Démonstration :

Étape 1 : Déterminons les endomorphismes de K-algèbres de $K(X)$.

Soit Φ un endomorphisme de K-algèbres de $K(X)$. Posons $F = \Phi(X)$.

Soit $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k X^k \in K[X]$, on a : $\Phi(P) = \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k \Phi(X^k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k F^k = P \circ F$.

Ainsi, pour tous $P \in K[X]$, $Q \in K[X] \backslash \{0\}$ et $G = \frac{P}{Q}$, où, on a : $\Phi(G) = \frac{\Phi(P)}{\Phi(Q)} = \frac{P \circ F}{Q \circ F} = G \circ F$.

Réciproquement, pour $F \in K(X) \backslash K$, $\Phi_F : \left| \begin{array}{ccc} K(X) & \to & K(X) \\ G & \mapsto & G \circ F \end{array} \right.$ est bien un morphisme de K-algèbres. [1]

Remarquons que si $F = a \in K$, alors Φ_F n'est pas bien défini : en effet $\frac{1}{X-a}$ n'a pas d'image par Φ_F.

Ainsi, l'ensemble des endomorphismes de K-algèbres de $K(X)$ est l'ensemble des Φ_F, où F parcourt $K(X) \backslash K$.

Étape 2 : Cherchons à quelle condition sur F, Φ_F est un automorphisme.

Supposons que Φ_F soit un automorphisme.

Alors Φ_F est surjectif et donc : $\exists G \in K(X), \Phi_F(G) = G \circ F = X$.

Soient $F = \frac{A}{B}$ et $G = \frac{P}{Q}$ des représentations irréductibles de ces fractions rationnelles.

On écrit $P = \sum_{j=0}^{d_P} p_j X^j$ et $Q = \sum_{k=0}^{d_Q} q_k X^k$ où d_P et d_Q sont les degrés respectifs de P et Q.

On a : $G \circ F = X \Leftrightarrow P \circ F = X(Q \circ F)$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{d_P} p_j F^j = X \sum_{k=0}^{d_Q} q_k F^k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{d_P} p_j \frac{A^j}{B^j} = X \sum_{k=0}^{d_Q} q_k \frac{A^k}{B^k}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{d_P} p_j A^j B^{m-j} = X \sum_{k=0}^{d_Q} q_k A^k B^{m-k}, \text{ où on a noté } m = \max\{d_P, d_Q\}.$$

- D'une part, $A | (p_0 - q_0 X) B^m$.
  Or A et B sont premiers entre eux, donc A et B^m sont également premiers entre eux, d'où $A | p_0 - q_0 X$.
  Aussi, comme P et Q sont premiers entre eux, on a $(p_0, q_0) \neq (0, 0)$.
  Donc $p_0 - q_0 X$ est de degré 0 ou 1, donc A est de degré 0 ou 1.
- D'autre part, $B \Big| p_{d_P} A^{d_P} B^{m-d_P} - q_{d_Q} X A^{d_Q} B^{m-d_Q}$.
  - Si $m = d_P = d_Q$, alors $B | (p_m - q_m X) A^m$ et donc $B | p_m - q_m X$ car B et A^m sont premiers entre eux. Or $q_m \neq 0$ car Q est de degré $m = d_Q$, donc $\deg B = 0$ ou 1.
  - Si $m = d_Q > d_P$, alors $B | q_m X A^m$ donc $B | q_m X$ donc $\deg B = 0$ ou 1.
  - Si $m = d_P > d_Q$, alors $B | p_m A^m$ donc $B | p_m$ donc $\deg B = 0$.

  Toujours est-il que $\deg B = 0$ ou 1.

Par conséquent, il existe $(a, b, c, d) \in K^4, F = \frac{aX+b}{cX+d}$.

Et F ne pouvant évidemment pas être constant, on doit imposer $ad - bc \neq 0$.

Étape 3 : Réciproquement, montrons que cette condition nécessaire est suffisante.

Pour $(a, b, c, d) \in K^4$ vérifiant $ad - bc \neq 0$, on note $\Phi_{a,b,c,d}$ le morphisme de K-algèbres défini par : $\Phi_{a,b,c,d}(X) = \frac{aX+b}{cX+d}$.

Montrons que : $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_2(K) & \to & \mathrm{End}_{K\text{-alg.}}(K(X)) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \Phi_{a,b,c,d} \end{array} \right.$ est un morphisme de groupes.

Cela découle de l'égalité :

$$\frac{a\frac{a'X+b'}{c'X+d'} + b}{c\frac{a'X+b'}{c'X+d'} + d} = \frac{(aa'+bc')X + (ab'+bd')}{(ca'+dc')X + (cb'+dd')}$$

On reconnaît effectivement les coefficients du produit matriciel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$.

On en déduit alors que $\Phi_{a,b,c,d}$ est inversible, d'inverse $\Phi_{a',b',c',d'}$ où $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$, car $ad - bc \neq 0$.

Donc pour $(a, b, c, d) \in K^4$ vérifiant $ad - bc \neq 0$, $\Phi_{a,b,c,d}$ est un automorphisme de K-algèbres de $K(X)$.

On en déduit finalement que l'ensemble des automorphismes de K-algèbres de $K(X)$ est l'ensemble des applications de la forme $\left| \begin{array}{ccc} K(X) & \to & K(X) \\ G & \mapsto & G\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right) \end{array} \right.$ avec $(a, b, c, d) \in K^4$ vérifiant $ad - bc \neq 0$. [2] ∎

Références

[X-ENS Al1] S. FRANCINOU, H. GIANELLA et S. NICOLAS – *Oraux X-ENS Algèbre 1*, 2e éd., Cassini, 2007.

utilisat° de PGL_2 plutôt que $\Phi \circ \Phi$.

1. Il s'agit de vérifier :
   - $\Phi_F(1) = 1$.
   - $\Phi_F(G)$ est bien défini pour tout $G \in K(X)$.
     Pour cela, on montre que $G \circ F = \frac{B^m \times (P \circ F)}{B^m \times (Q \circ F)}$, où $F = \frac{A}{B}$ est une écriture irréductible et $m = \max\{\deg P, \deg Q\}$ est une écriture de $G \circ F$ en fraction de polynômes et que le polynôme $B^m \times (Q \circ F)$ n'a qu'un nombre fini de racines.
   - Φ_F est K-linéaire.
   - $\Phi_F(G_1 G_2) = \Phi_F(G_1) \Phi_F(G_2)$ pour tous $G_1, G_2 \in K(X)$.

2. Le 2nd théorème d'isomorphisme peut même nous donner un résultat supplémentaire.
On a montré au cours de la démonstration que $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Aut}_{K\text{-alg.}}(K(X))$.
De plus

$$\Phi_{a,b,c,d}(X) = X \Leftrightarrow aX + b = cX^2 + dX \Leftrightarrow b = c = 0 \text{ et } a = d$$

Donc $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{\lambda I_2 | \lambda \in K^\times\}$.
Et on en déduit donc :

$$\mathrm{Aut}_{K\text{-alg.}}(K(X)) \simeq \mathrm{GL}_2(K)/\mathrm{Ker}(\Phi) = \mathrm{GL}_2(K)/\{\lambda I_2 | \lambda \in K^\times\} = \mathrm{PGL}_2(K)$$

Partitions d'un entier en parts fixées

Florian LEMONNIER – 25 novembre 2014

[X-ENS An2], exercice 3.15

Théorème

> Soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}^*$ premiers dans leur ensemble.
> Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note
>
> $$u_n = \#\left\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \middle| a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = n\right\}$$
>
> Alors on a :
>
> $$u_n \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

Démonstration :

Étape 1 : Considérons le produit de Cauchy des séries formelles $\sum_{x_i=0}^{\infty} X^{a_i x_i}$, pour $i \in [\![1, k]\!]$.

On note $f(X)$ ce produit de Cauchy ; on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} f(X) &= \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{x_i=0}^{\infty} X^{a_i x_i} \right) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - X^{a_i}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \\ a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = n}} 1 \right) X^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n \end{aligned}$$

Étape 2 : Décomposons la fraction rationnelle $f(X)$ en éléments simples.

La série formelle $f(X)$ est la série génératrice de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$; c'est une fraction rationnelle dont les pôles sont les racines $a_1^{\text{èmes}}, \dots, a_k^{\text{èmes}}$ de l'unité.
Le pôle 1 est de multiplicité k.
Soit $\omega \neq 1$ un pôle de f. Comme $\frac{1}{1 - X^{a_i}}$, où $i \in [\![1, k]\!]$, n'a que des pôles simples, ω est de multiplicité inférieure ou égale à k. Par l'absurde, on suppose que ω soit un pôle de multiplicité k.
On aurait alors : $\forall i \in [\![1, k]\!], \omega^{a_i} = 1$.
Or, d'après le théorème de Bezout, les $(a_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$ étant premiers entre eux dans leur ensemble :

$$\exists (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{Z}^k, a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = 1$$

Alors $\omega = \omega^{\sum_{i=1}^{k} a_i u_i} = \prod_{i=1}^{k} (\omega^{a_i})^{u_i} = 1$.
Contradiction ! On en déduit donc que la multiplicité du pôle $\omega \neq 1$ est strictement inférieure à k.
Notons $\mathcal{P} = \{\omega_1, \dots, \omega_p\}$ l'ensemble des pôles de $f(X)$, avec $\omega_1 = 1$.
Par décomposition en éléments simples, il existe $c_{i,j} \in \mathbb{C}$ pour $i \in [\![1, p]\!]$, $j \in [\![1, k-1]\!]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, tels que :

$$f(X) = \frac{\alpha}{(1 - X)^k} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq k-1}} \frac{c_{i,j}}{(\omega_i - X)^j}$$

Étape 3 : Développons en série formelle les éléments simples de $f(X)$.

En effet, pour $\omega \in \mathcal{P}$ et $j \in [\![1, k]\!]$, $\frac{1}{(\omega - X)^j}$ est développable en série formelle. Ses coefficients s'obtiennent en dérivant $(j-1)$ fois le développement en série formelle de $\frac{1}{\omega - X}$.
On a :

$$\frac{1}{\omega - X} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{1 - \frac{X}{\omega}} = \frac{1}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{X}{\omega} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{\omega^{n+1}}$$

Puis, pour $j \in [\![1, k]\!]$,

$$\frac{(j-1)!}{(\omega - X)^j} = \sum_{n=j-1}^{\infty} n(n-1) \dots (n-j+2) \frac{X^{n-j+1}}{\omega^{n+1}}$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{(\omega - X)^j} = \sum_{n=j-1}^{\infty} \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!} \frac{X^{n-j+1}}{\omega^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+j-1)!}{(j-1)!n!} \frac{X^n}{\omega^{n+j}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{n} \frac{X^n}{\omega^{n+j}}$$

Ainsi :

$$f(X) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} X^n + \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq k-1}} c_{i,j} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{n} \frac{X^n}{\omega^{n+j}} \right)$$

Étape 4 : Déduisons-en un équivalent de u_n en l'infini.

La dernière expression de $f(X)$ nous fournit, par unicité du développement en série formelle :

$$u_n = \alpha \binom{n+k-1}{n} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq k-1}} c_{i,j} \binom{n+j-1}{n} \frac{1}{\omega^{n+j}}$$

Or, pour $r \in \mathbb{N}^*$, on a : $\binom{n+r-1}{n} = \frac{(n+r-1)\dots(+1)}{(r-1)!} \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{n^{r-1}}{(r-1)!}$.
Ainsi, $\alpha \binom{n+r-1}{n} \underset{n \to \infty}{\sim} \alpha \frac{n^{r-1}}{(r-1)!}$
Et $\forall i \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![1 - k - 1]\!], c_{i,j} \binom{n+j-1}{n} \frac{1}{\omega^{n+j}} = o\left(n^{k-1}\right)$, car les pôles de $\mathcal{P}$ sont des racines de l'unité, donc de module 1.
Par conséquent,

$$u_n \underset{n \to \infty}{\sim} \alpha \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

Reste à calculer α.
Pour cela, on multiplie $f(X)$ par $(1 - X)^k$ et on substitue 1 à X :

$$\begin{aligned} (1 - X)^k f(X) &= \prod_{i=1}^{k} \frac{1 - X}{1 - X^{a_i}} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 + X + \dots + X^{a_i - 1}} \\ \alpha + 0 &= \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} \end{aligned}$$

D'où :

$$u_n \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{a_1 \dots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

■

Références

[X-ENS An2] S. FRANCINOU, H. GIANELLA et S. NICOLAS – *Oraux X-ENS Analyse 2*, 2[e] éd., Cassini, 2009.

DEV 2

*** Proposition :**

Soit $n \geq 3$ un entier et $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$P^n + Q^n = R^n$$

Alors $\exists\, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda^n + \mu^n = \nu^n$

$\exists\, D \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = \lambda D \quad Q = \mu D \quad R = \nu D$

*** Démonstration :**

→ Remarquons que si $D \in \mathbb{C}[X]$ divise deux des trois polynômes en jeu, alors D divise le troisième.

Quitte à diviser par D on peut supposer P, Q et R 2 à 2 premier entre eux.

Pour montrer la proposition il faut donc montrer que P, Q et R sont des constantes.

→ Notons $m := \max(\deg(P), \deg(Q), \deg(R))$ et supposons par l'absurde que $m > 0$.

→ Remarquons que $P^n + Q^n = R^n \iff P^n = \left(e^{i\pi/n} Q\right)^n + R^n$

$$\iff Q^n = \left(e^{i\pi/n} P\right)^n + R^n$$

Les rôles de P, Q et R sont donc symétriques.

On peut donc supposer $m = \deg(P) = \deg(Q)$

$$\deg(R) \leq m.$$

→ $P^n + Q^n = R^n$ (dans $\mathbb{C}[X]$) $\iff \left(\frac{P}{R}\right)^n + \left(\frac{Q}{R}\right)^n = 1$ (dans $\mathbb{C}(X)$)

On ~~divise~~ dérive la relation précédente

$$n\left(\frac{P}{R}\right)^{n-1} \frac{P'R - PR'}{R^2} + n\left(\frac{Q}{R}\right)^{n-1} \frac{Q'R - QR'}{R^2} = 0$$

$$\iff \frac{P'R - PR'}{Q^{n-1}} = \frac{R'Q - RQ'}{P^{n-1}} = F \in \mathbb{C}(X)$$

On distingue 2 cas :

Cas 1 : $F = 0$

Alors $P'R - R'P = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{P'}{P} = \frac{R'}{R}$$

Si on note $P = \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{\alpha_i}$ $\quad R = \prod_{i=1}^{r} (X - b_i)^{\beta_i}$

Alors $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{X - a_i} = \frac{R'}{R} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\beta_i}{X - b_i}$

L'unicité de la décomposition en élément simple nous assure alors que $\frac{1}{X - a_1}$ (par exemple) est un des éléments de la décomposition en élément simple de $\frac{R'}{R}$

Alors $X - a_1 \mid P$ et $X - a_1 \mid R$

Or $P \wedge R = 1$ par hypothèse. Contradiction

Cas 2 : $F \neq 0$

$$F = \frac{P'R - PR'}{Q^{n-1}} = \frac{RQ' - R'Q}{P^{n-1}}$$

Donc les pôles de F sont les zéros common de P et Q. Or $P \wedge Q = 1$, donc F n'admet pas de pôle.

Or $F \in \mathbb{C}(X)$, donc F n'admet pas de pôle

$$\Rightarrow F \in \mathbb{C}[X]$$

Donc $\deg(Q^{n-1}) \leq \deg(P'R - PR')$

$$\Rightarrow (n-1)m \leq m - 1 + m$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq m(3-n)$$

Or $n \geq 3$ donc $1 \leq 0$ Contradiction

$\square$