Soit K un corps, E un K-ev de dim finie d, $u \in \mathcal{L}(E)$.

I POLYNÔMES D'ENDOMORPHISME

1 L'algèbre $K[u]$

DÉF 1: Soit $P \in K[X]$, on définit $P(u) := \sum_{i=0}^{d} a_i u^i$ (où $P = \sum_{i=1}^{d} a_i X^i$)

DÉF/PROP 2: $ev_u : \begin{array}{l} K[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ u \longmapsto P(u) \end{array}$ définit un morphisme d'algèbre.

DÉF/PROP 3: $\mathrm{Ker}(ev_u)$ est un idéal, appelé idéal annulateur de u, et $K[X]$ étant principal, il existe un unique $\pi_u \in K[X]$ unitaire tel que $(\pi_u) = \mathrm{Ker}\, ev_u$, appelé polynôme minimal de u.

RQ 4: $\forall P \in K[X], P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \Rightarrow \pi_u \mid P$

DÉF/PROP 5: $K[u] := \mathrm{Im}(ev_u)$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$, de dim finie $\deg(\pi_u)$.

EX 6: - Si u est un projecteur, non nul, alors $\pi_u = X(X-1)$
. Si u est nilpotente d'indice k, alors $\pi_u = X^k$

PROP 7: Par le premier théorème d'isomorphisme :

$$K[u] \simeq K[X]/(\pi_u) \quad \text{et si } \pi_u = P_1 \dots P_r$$

avec les P_i premiers entre eux deux à deux, alors

$$K[u] \overset{K\text{-alg}}{\simeq} K[X]/(P_1) \times \dots \times K[X]/(P_r)$$

EX 8: Si u projecteur : $K[u] \simeq K[X]/(X) \times K[X]/(X-1)$

COR 9 (de 5): $K[u]$ est fermé.

APP 10: $\exp(u) := \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} u^k \in K[u]$

DÉV 1 : $\forall A \in GL_d(\mathbb{C}), \exists P \in \mathbb{C}[X], A = \exp(P(A))$
En particulier, l'exponentielle est surjective.

PROP/APP 11: Si $P(u) = 0$ et $P(0) \neq 0$, alors $u \in GL(E)$, et u^{-1} s'exprime, grâce à P, comme élément de $K[u]$.

APP 12: (Calcul des puissances de u) Si $P(u) = 0$:
$\forall N, \quad u^N = (Q_N P)(u) + R_N(u)$, où (Q_N, R_N) est la division euclidienne de X^N par P. $\deg(R_N) < \deg(P)$.

THM 13: (Lemme de décomposition des noyaux)
Si $P = P_1 \dots P_r$ où les P_i sont premiers entre eux deux à deux, alors $\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i(u))$.

EX 14: . $E = \mathrm{Ker}(\pi_u) = \bigoplus_{i=1} \mathrm{Ker}(P_i(u))$

- Si u projecteur : $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Ker}(u - id)$.

2 Liens entre spectre et polynômes en u

PROP 15: Si P annule u, alors $Sp(u) \subset Rac(P)$

RQ 16: A priori : $Rac(P) \not\subset Sp(u)$

PROP 17: $Rac(\pi_u) = Sp(u)$

EX 18: Si . u est un projecteur : $Sp(u) = \{0, 1\}$
. u est nilpotente : $Sp(u) = \{0\}$

DÉF 19: $\forall A \in \mathcal{M}_n(K), \chi_A := \det(A - X I_d)$

RQ 20: Deux matrices semblables vérifient $\chi_{A'} = \chi_A$.
On peut donc définir $\chi_u := \chi_A$ où A est la matrice de u dans une base quelconque, le polynôme caractéristique de u.

FAIT 21 : $\chi_u(\lambda) = 0 \iff \lambda \in Sp(u)$

PROP 22 : Si α_λ est la multiplicité de λ dans χ_u, alors $1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq \alpha_\lambda$
$\forall \lambda \in Sp(u)$: multiplicité géométrique / algébrique de λ

THM 23 (de CAYLEY - HAMILTON) : $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

CSQ 24 : $\pi_u \mid \chi_u$ et $\deg(\pi_u) \leq \deg(\chi_u) = d$

II APPLICATION À LA RÉDUCTION D'ENDOMORPHISME

1 Diagonalisation

DÉF 25 : Un endomorphisme est diagonalisable s'il admet une base de vecteurs propres.

THM/ÉQU 26 : (i) u est diagonalisable
(ii) Il existe P annulateur de u scindé à racines simples.
(iii) π_u est scindé à racines simples.
(iv) χ_u est scindé et $\forall \lambda \in Sp(u)$, $\dim(E_\lambda(u)) = \alpha_\lambda$.

EX 27 : Les projecteurs sont diagonalisables.

APP 28 : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'ordre fini est diagonalisable.

APP 29 : Partant d'un système $X_{n+1} = AX_n$ déduit de la déf d'une suite récurrente linéaire à coefficients constants, ou $X' = AX$, équation différentielle linéaire homogène à c.c., si A est diagonalisable, un changement de base permet de se ramener à la résolution élémentaire de $Y'_{(n)} = DY$, $Y = \exp(D)Y(0)$.

APP 30 : Si A se diagonalise en D par matrice de passage P, $\exp(A) = P^{-1}\exp(D)P$ où l'exp. de $D = \mathrm{diag}(d_i)_{i=1}^{d}$ est $\mathrm{Diag}(e^{d_i})_{i=1}^{d}$.

2 Trigonalisation

DÉF 31 : $u \in \mathcal{L}(E)$ st trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice st triangulaire supérieure.

THM/EQU 32 : (i) u st trigonalisable
(ii) χ_u st scindé (iii) π_u st scindé
(iv) $\exists P \in K[X]$ scindé tq $P(u) = 0$.

Ex 33 : Les endomorphismes nilpotents sont trigonalisables.

Cor 34 : Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev st trigonalisable.

App 35 : L'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

App 36 : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$.

3 Décomposition de Dunford

Prop 37 : Si χ_u st scindé, il existe un unique couple (d, n) d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $\begin{cases} u = d + n \\ d \text{ est diagonalisable, } n \text{ nilpotent,} \\ dn = nd \end{cases}$ appelé décomposition de Dunford de u.

Prop 38 : On a alors $d, n \in K[u]$.

Ex 39 : La décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ st $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

C-ex 40 : Celle de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ n'st pas $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

App 41 : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exp(A)$ st diagonalisable ssi A l'est.

App 42 : Si $A = D+N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut calculer $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$.

$\boxed{\text{DEV 2}}$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La suite définie par

$$\begin{cases} A_0 = A \\ A_{n+1} = A_n - P(A_n)P'(A_n)^{-1} \end{cases} \quad \text{où} \quad P = \frac{\chi_A}{\chi_A \wedge \chi_A'}$$

est stationnaire et converge vers D la partie diagonalisable de la décomposition de A.

4) Réduction de Jordan

Déf 43 : Le bloc de Jordan de taille n associé à $\lambda \in K$ est $J_{\lambda,n} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$.

Prop 44 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tq χ_u est scindé. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale avec des blocs de Jordan. De plus, ces blocs sont indépendants de la base choisie et ils caractérisent la classe de similitude de u.

Rq 45 Les blocs de Jordan associés à une valeur propre $\lambda \in K$ de u peuvent se calculer à l'aide des valeurs $\dim(\ker(u - \lambda id_E)^k)$, $k \in \mathbb{N}$.

App 46 : Si χ_M est scindé, M et M^T sont semblables.

App 47 : Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A^k \xrightarrow[k\to\infty]{} B$, alors il existe $C \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in]0,1[$ tq $\|A^k - B\|_\infty \leq C\lambda^k$.

App 48 : (Thm de Liapunov)
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a l'équivalence :
(i) $\exp(tA) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ (ii) $Sp(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C},\ Re(\lambda) < 0\}$.

App 49 : On a l'équivalence :
(i) $(\exp(tA))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est bornée
(ii) $\forall \lambda \in Sp(A)$ $Re(\lambda) < 0$ ou $Re(\lambda) = 0$ et $\dim(\ker(A-\lambda I))$ est la multiplicité de λ dans χ_A.

5) Réduction de Frobenius

Prop 50 : Soit u un endomorphisme de E. Il existe une suite de polynômes unitaires $P_1, \dots, P_r$ et une décomposition en sous-espaces stables par u
$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ tq $P_r | P_{r-1} | \dots | P_1$ et l'endomorphisme induit u_{E_i} est cyclique de polynôme minimal P_i.
De plus, les P_i sont uniques et ils caractérisent la classe de similitude de u.

Références :

- Algèbre - Gourdon.
- Algèbre pour la L3 - Risler/Boyer (dév 2).
- Algèbre linéaire - Mansuy & Mneimné.
- Algèbre : le grand combat - Berhuy.