(1)

153 Polynômes d'endomorphismes. Réduction d'un endomorphisme. Applications

E est K-e.v. de fini^n sur K (en général $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
$End_K(E)$ est une K-algèbre de dimension finie n^2

I Polynômes d'endomorphismes

A L'algèbre $K[u]$ $u \in End(E)$.

Déf (1) Soit $\varphi_u : K[X] \to End(E)$, $X \mapsto u$ le morphisme d'algèbre dont on note $P(u)$ l'image de $P(X)$.
On note $K[u] = \operatorname{Im} \varphi$ et $(\Pi_u) = \operatorname{Ker} \varphi$ où Π_u est unitaire
(Si $n=0$, $\Pi_u = 1$ et $\Pi_u \neq 0$ car $\dim K[u] < +\infty$)
Π_u est appelé le polynôme minimal de u.

Exemple Pour une homothétie $\lambda Id \in K[Id]$, $\Pi_{\lambda Id} = X - \lambda$, et réciproquement

Prop $K[u] \simeq K[X]/(\Pi_u)$ est une K-algèbre de dimension $\deg \Pi_u$ dont une base est $(u^k)_{k \in [0, \deg \Pi_u - 1]}$.

Prop Soit $P \in K[X]$. $P(u) \in GL(E) \Leftrightarrow P \wedge \Pi_u = 1$

Cor $u \in GL(E) \Leftrightarrow \exists P \in K[X]$, $P(u) = 0 \wedge P(0) \neq 0$
Si $\sum_{k \geq 0} \alpha_k u^k = 0$ où $\alpha_0 \neq 0$, alors $u^{-1} = \frac{1}{\alpha_0} \sum_{k \geq 0} \alpha_{k+1} u^k \in K[u]$

Application (Calcul de puissances) Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq b$
Si $(X-a)(X-b)(u) = 0$, alors $\forall m$, $u^m = \frac{a^m - b^m}{a-b} u + \frac{b a^m - a b^m}{b-a} Id$

B $K[X]$-modules

Déf. On munit E d'une structure de $K[X]$-module étendant l'action de K par $\forall x \in E$, $X.x := u(x)$.
On note E_u le module.

Rem : Une structure de $K[X]$ sur E est caractérisée par le morphisme d'algèbre $K[X] \to End E$, $X \mapsto (x \mapsto X.x)$ notée φ_u si $u : x \mapsto X.x$

Rem E_u est aussi un $K[X]/(\Pi_u)$-module

Prop Si F est un K-e.v., $\phi \in Hom(E_u, F_v)$ où $v \in End F$ ssi $\phi \in Hom(E, F)$ et $\phi \circ u = v \circ \phi$

Cor Si $v \in End E$, $E_u \simeq E_v$ ssi $u \sim v$ (semblables)

Rem $F \leq E$ stable par $u \Leftrightarrow F \leq E_u$

Exem $E_{\lambda Id} \underset{mod}{\overset{K[X]}{\simeq}} K^n$

Prop (Lemme des noyaux) Soient $P_1 \ldots P_\ell \in K[X]^\ell$ deux à deux premiers (comaximaux) tels que $\prod P_i(u) = 0$
Notons $E_i = \operatorname{Ker} P_i(u)$, $Q_i = \prod_{i \neq j} P_j$. Alors

$E_u = \bigoplus (E_i)_u$
$E_i = \operatorname{Im} Q_i(u)$
$\operatorname{Im} P_i(u) = \operatorname{Ker} Q_i(u)$

les s.e.v. sont stables et les projecteurs sur E_i sont polynomiaux en Q_i

Déf. On appelle sous espace cyclique de u associé à $x \in E$ le sous-module $\langle x \rangle_{E_u}$ qui est le plus petit sous espace stable par u contenant x. On le note aussi $E_{u,x}$

Rem $(u^i(x))_{i \in [0, \dim E_{u,x} - 1]}$ en est une base.

Déf $v \in End E$ est cyclique ssi E_v est monogène
ssi $\exists x \in E$, $E = E_{v,x}$

Déf Soit $P \in K[X]$ unitaire. On appelle matrice compagnon associée à P la matrice

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & & -a_0 \\ 1 & & \vdots \\ (0) & \ddots & 1 \; -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Prop $v \in End E$ est cyclique
ssi $\exists \begin{cases} B \text{ base de } E \\ P \in K[X] \end{cases}$ $Mat_B u = C_P$ ssi $\deg \Pi_u = n$
ssi $Comm(u) = End E_u = K[u]$

C Polynôme caractéristique

Déf Le polynôme caractéristique χ_u de u est le poly de degré

$\chi_u(X) = \det(u - X\,\mathrm{Id})$ (où $u - X\mathrm{Id} \in \mathrm{End}_{K(X)}\, E \otimes_K K(X)$)

Prop $\chi_{C_P} = P$

Cor (Cayley Hamilton pour les endomorphismes cycliques) $\chi_{C_P}(C_P) = 0$

Prop Si $F \leq E_u$, $\chi_{u|F} \mid \chi_u$

Thm (Cayley Hamilton) $\chi_u(u) = 0$

Exem Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_A = -X(X-1)^2$ donc $A^3 - 2A^2 + A = 0$

Prop $\chi_u = (-1)^n(X^n - \mathrm{Tr}\,u\, X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det u)$

Cor u cyclique ssi $\chi_u = (-1)\Pi_u$

II Réduction

Appli: Si $K = \mathbb{R}$ et n impair, u admet (au moins) une valeur propre (cf infra)

D Spectre

Déf Soit $\lambda \in K$. On dit que λ est
- une valeur propre (ou spectrale) si $u - \lambda\mathrm{Id}$ est non inj (ssi non bij)
- une valeur régulière sinon.

On note $Sp(u)$ le spectre de u soit l'ensemble de ses valeurs propres

Déf Si $\lambda \in Sp(u)$, on appelle vecteur propre de u associé à λ tout $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Rem En dimension finie il en existe toujours. $\forall \lambda \in Sp\, u$

Déf Soit $\lambda \in Sp\, u$. On appelle sous-espace propre de u associé à λ $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(X-\lambda)(u)$ et sous-espace caractéristique de u associé à λ $E^{u,\lambda} = \mathrm{Ker}\,(X-\lambda)^n(u)$.

Rem On peut étendre la définition aux facteurs irréductibles R_i de Π_u : $E_{u,R_i} = \mathrm{Ker}\, R_i(u)$ et $E^{u,R_i} = \mathrm{Ker}\, R_i(u)^n$

Prop Les $(E^{u,\lambda})$ sont en somme directe et $E_u = \bigoplus_\lambda (E^\lambda)$

Prop $Sp\, u = \mathrm{Rac}\, \chi_u = \mathrm{Rac}\, \Pi_u$

Déf On appelle multiplicité minimale (resp. géométrique, resp. algébrique) associée à λ pour u la multiplicité de $X - \lambda$ dans Π_u (resp. $\dim E_\lambda$, resp. la multiplicité de $X - \lambda$ dans χ_u) et on la note $m_\lambda(u)$ (resp $n_\lambda(u)$, resp. $\alpha_\lambda(u)$)

Prop Soit $\lambda \in Sp\, u$ $\alpha_\lambda(u) = \dim E^{u,\lambda}$

Exem Pour la matrice nilpotente $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ (0) & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$, $m_0(A) = 2$, $n_0(A) = 3$, $\alpha_0(A) = 4$

E Critères de diagonalisation

Déf u est diagonalisable si une de ses matrices est semblable à une matrice diagonale.

Prop u est diagonalisable
ssi $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp u} E_{u,\lambda}$ ssi Π_u scindé et $\forall \lambda$, $n_\lambda(u) = \alpha_\lambda(u)$
ssi Π_u est scindé à racines simples
ssi $E_u \simeq K^n$
ssi $\exists p$ $K[u] \simeq K^p$ (nécessairement $p = \deg \Pi_u$)

Exem Soit $\Phi : v \in \mathrm{End}\, E \mapsto u \circ v$. Si u diagonalisable, alors Φ aussi.

Appli. Sur $K = \mathbb{F}_q$, u diagonalisable $\iff (X^q - X)(u) = 0$

F Critères de trigonalisation

Déf u est trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire

Prop u est trigonalisable
ssi il admet un polynôme annulateur scindé (sur K)
ssi χ_u est scindé (sur K)
ssi $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp u} E^{u,\lambda}$

Cor Si K est algébriquement clos (par exemple $K = \mathbb{C}$) alors tout endomorphisme $u \in \mathrm{End}\, E$ est trigonalisable

Prop Dans une base de trigonalisation de u, les valeurs propres de u apparaissent sur la diagonale de la matrice de u avec leur multiplicité algébrique.

Cor Si u est trigonalisable $\det u = \prod_{\lambda \in Sp u} \lambda$ et $\mathrm{Tr}\, u = \sum_{\lambda \in Sp u} \lambda$

Contre ex Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a 1 pour seule valeur propre et sa trace est $1 + 2\cos\frac{\pi}{3} \neq 1$.

Cor $n \in \mathrm{End}\, E$ est nilpotent ssi $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Tr}\, n^k = 0$

G Réduction simultanée

Prop : Si u et v sont des endomorphismes qui commutent, et qu'ils sont diagonalisables (resp. trigonalisables) alors il sont diagonalisable (resp. trigonalisable) dans une même base (ou simultanément).

Rem 2 endomorphismes simultanément diagonalisables commutent

Contreex : $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$ ne commutent pas.

Appli $GL_n(K) \not\cong GL_m(K)$ si $n \neq m$ et $\mathrm{char}\, K \neq 2$

III Invariants & Décompositions

H Semi simplicité

Déf u est simple ssi E_u n'admet pas de sous-module non triviaux
semi-simple ssi E_u est semi-simple
ssi tout $F \leq E$ u-stable admet un supplémentaire u-stable

Rem Si χ_u scindé, (u semi simple) $\Leftrightarrow$ (u diagonalisable)

Thm (Décomposition de Dunford) Si χ_u est scindé il existe un unique $(d,n) \in (\mathrm{End}\, E)^2$ tel que (i) $dn = nd$ (ii) $u = d + n$ (iii) d est diagonalisable (iv) n est nilpotent

En outre $(d,n) \in K[u]^2$

Appli u diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\exp u$ diagonalisable

Exemp Si $A = \begin{pmatrix}1&0&1\\-6&-7&-7\\4&4&5\end{pmatrix}$, $\mathrm{Sp}\, A = \{1,-1\}$. Par Bézout les projecteurs caractéristiques sont $P_{-1}(A) = \frac{1}{4}(A-I)^2$ et $P_1(A) = (A+I)\left(\frac{3I-A}{4}\right)$

donc $D = -P_{-1}(A) + P_1(A)$ et $N = A - D \in$.

Lemme Si Π_u irréductible alors u semi-simple

Prop u semi-simple $\Leftrightarrow$ Π_u est sans facteur (irréductible) carré
$\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}$, $K[u] \simeq \prod_{i \leq p} K_i$ où K_i corps

I Invariants de Frobenius

(admis)
Thm (Structure des modules de torsion de type fini sur un anneau principal). Soit A principal et M un A-Module de type fini de torsion. Il existe un unique $s \in \mathbb{N}$, et des uniques $(P_i) \in A^s$ (à inversible près) tels que $M \simeq \bigoplus A/(P_i)$ et $(P_1) \subset \ldots \subset (P_s)$

Cor (Réduction de Frobenius). Il ex $s \in [1, \dim]$ unique et $(P_1 \ldots P_s) \in K[X]$ unitaires uniques (non constants) tels que $E_u \simeq \bigoplus K[X]/(P_i)$ et $P_s | \ldots | P_1$.

Déf Les $(P_1 \ldots P_s)$ du cor précédent sont les invariants de similitude (de Frobenius) de u.

J Réduction de Jordan

Rem Par théorème chinois, $E_u \simeq \bigoplus_{i \in I} K[X]/(R_i^{k_i})$ où R_i irréductible

Déf Le bloc de Jordan $J_{\lambda,k} \in \mathcal{M}_k(K)$ (où $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in K$) est

$$J_{\lambda,k} = \begin{pmatrix}\lambda & 1 & (0) \\ & \ddots & 1 \\ (0) & & \lambda\end{pmatrix}.$$

Prop $\chi_{J_{\lambda,k}} = (X-\lambda)^k = \Pi_{J_{\lambda,k}}$ donc $J_{\lambda,k} \sim C_{(X-\lambda)^k}$

Thm (Réduction de Jordan)
Si χ_u est scindé, alors il existe $\ell \in \mathbb{N}$ unique et $(\lambda_1 \ldots \lambda_\ell) \in K^\ell$ uniques à permutations près, pour tout i, un $j_i \in \mathbb{N}$ et une famille d'entiers

$n_{i,1} \geq n_{i,2} \geq \ldots \geq n_{i,j_i} > 0$

tels qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathop{\mathrm{diag}}_{i \in [1,\ell]}\left(\mathrm{diag}(J_{\lambda_i, n_{i,1}}, \ldots, J_{\lambda_i, n_{i,j_i}})\right)$$

Appli $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. $(A^k)_k$ bornée
$\Leftrightarrow$ $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\, A$, $|\lambda| < 1$
ou $|\lambda| = 1$ et $m_\lambda(A) = \chi_\lambda(A)$