

Contexte. E est un espace affine euclidien de dimension finie. L'espace vectoriel associé est noté $\vec{E}$.

I) Caractérisation des isométries

1) Définitions

Déf 1. [Tau, 98] Une application $f: E \rightarrow E$ est une isométrie si elle est bijective, et si pour pour tous $M, N \in E$,

$$\| \overrightarrow{MN} \| = \| \overrightarrow{f(M)f(N)} \|.$$

Exemple 2. L'application $s: \mathbb{R}^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}^2(\mathbb{N})$ est une isométrie de $\mathbb{R}^2(\mathbb{N})$, espace de dimension infinie. On s'intéressera ici seulement aux espaces de dimension finie.

Caractérisation 3. [Tau, 99] $f: E \rightarrow E$ est une isométrie si, et seulement si, f est affine et sa partie linéaire $\vec{f} \in O(E)$.

Prop 4. [Tau, 98] Le morphisme $\varphi: Is(E) \rightarrow O(E)$ est un morphisme de groupes de noyau $\text{Tr}(E) = \{ \text{translations de } E \}$.

Déf 5. Pour $M \in E$, on définit $Is(E, M) = \{ f \in Is(E), f(M) = M \}$.

Prop 6. La restriction $\varphi|_{Is(E, M)}: Is(E, M) \rightarrow O(E)$ est un isomorphisme.

Déf 7. [Tau, 99] On définit les déplacements de E (resp anti-déplacements) par
 $Is^+(E) := \{ f \in Is(E), \vec{f} \in O^+(E) \}$
 (resp $Is^-(E) := \{ f \in Is(E), \vec{f} \in O^-(E) \}$)

Exemple 8. L'application $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{7}(3x+6y+2z+1) \\ \frac{1}{7}(-6x+2y+3z+5) \\ \frac{1}{7}(2x-5y+6z+2) \end{pmatrix}$ est un déplacement de $\mathbb{R}^3$.

Remarque 9. $Is^+(E)$ est un sous-groupe distingué de $Is(E)$, mais $Is^-(E)$ n'est pas un sous-groupe de $Is(E)$.

2) Étude de la partie linéaire, étude de $O(E)$

Thm 10. [P, 147] (Réduction dans une base orthonormée) Si $g \in O(E)$ il existe une base orthonormée β et $\theta_1, \dots, \theta_n \neq 0[\pi]$ tels que

$$\text{Mat}_\beta(g) = \begin{bmatrix} I_p & & 0 \\ & R_{\theta_1} & \\ 0 & & R_{\theta_n} \end{bmatrix}$$

où R_{θ_i} est la matrice d'une rotation de $\mathbb{R}^2$, et I_p est la matrice identité $p \times p$.

Exemple 11. (dans $\mathbb{R}^2$) la rotation $r(0, \frac{\pi}{3})$ a pour matrice $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.
 La symétrie axiale d'axe (Ox) a pour matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Application 12. $Is^+(E)$ est connexe par arcs, et $Is(E)$ a deux composantes connexes.

Déf 13. [P, 125] Soit $u \in O(E)$ tel que $u^2 = \text{id}$ ($E = E_+ \oplus E_-$).

Si $\dim E_+ = 1$, on dit que u est une réflexion.

Si $\dim E_+ = 2$, on dit que u est un renversement.

Exemple 14. (dans $\mathbb{R}^2$) la symétrie d'axe (Ox) est une réflexion. La symétrie centrale (de centre O) est un renversement (de matrice $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$).

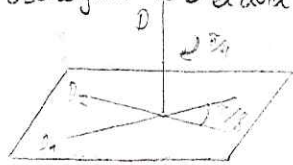
Prop 15. [P, 143] $O(E)$ est engendré par les réflexions. Tout élément de $O(E)$ est produit d'au plus $m = \dim(E)$ réflexions.

Exemple 16. (dans $\mathbb{R}^2$) la rotation $r(0, \pi) = s_D \circ s_{D'}$ où D et D' sont deux droites telles que $D \perp D'$ et $D \cap D' = \{O\}$.



Prop 17. [P, 143] Si $\dim E \geq 3$, $O^+(E)$ est engendré par les renversements. Tout élément de $O^+(E)$ est produit d'au plus $m = \dim E$ renversements.

Exemple 18. (dans $\mathbb{R}^3$) la rotation $r(D, \pi/4) = s_{D_1} \circ s_{D_2}$ où D_1 et D_2 sont deux droites du plan orthogonal à D et dont l'angle entre les deux vaut $\pi/2$.



Application 19. $O^+(3, \mathbb{R})$ est simple développement 1

3) Classification des isométries en dimensions 2 et 3

Prop 20. [Fr, 195] (forme réduite d'une isométrie) Soit f une isométrie de E . Alors il existe un unique couple (g, a) avec $g \in Is(E)$ et $a \in E$ tels que

- 1) $f = g \circ t_a = t_a \circ g$.
- 2) L'ensemble F des points fixes de g est non-vidé, et $a \in F$.

Classification dans le plan

Points fixes	Nature	$Is^+(E)/Is^-(E)$
E	identité	+
droite	symétrie axiale	-
point	rotation	+
$\emptyset$	translation	+
$\emptyset$	symétrie glissée	-

Classification dans l'espace

Points fixes	Nature	$Is^+(E)/Is^-(E)$
E	identité	+
plan	réflexion	-
droite	rotation	+
point	symétrie-rotation	-
$\emptyset$	translation	+
$\emptyset$	visage	+
$\emptyset$	réflexion glissée	-

II) Géométrie des solides platoniciens

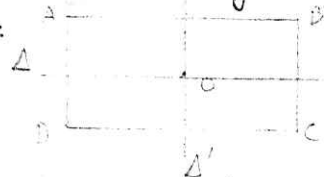
1) Groupe d'isométries conservant une partie

Déf 21. Soit $A \subset E$. On appelle groupe d'isométries de A le groupe $Is(A) = \{g \in Is(E), g(A) = A\}$.

Exemple 22. Le groupe d'isométries d'un rectangle (non-carré) est isomorphe au groupe de Klein:

$$Is(ABCD) = \{id, s_0, s_A, s_C\}$$

$$\cong \langle s_A \rangle \times \langle s_C \rangle$$



Remarque 23. Si A est finie, $Is(A)$ fixe l'isobarycentre des points de A .

Prop 24. Si A est une partie finie du plan de cardinal n , alors $|Is^+(A)| \leq n$ et $|Is(A)| \leq 2n$.

Prop / Déf 25. Si P_n est le polygone régulier à n sommets, alors $Is(P_n) \cong D_n$ (le groupe diédral d'ordre $2n$).

2) Les polyèdres réguliers

Déf 26. [JF, 358] Un polyèdre ^{convexe} est une intersection finie de demi-espaces ^(fermés) de X .

Remarque 27. On peut donc considérer des polyèdres infinis.

Déf 28. Un polytope est un polyèdre convexe compact d'intérieur non-vidé.

Exemple 29. Un cube est un polytope comme intersection de 4 demi-espaces.

Déf 30. [JF, 360] Soit P un polytope de dimension d , et

4) Soit P un autre polynôme régulier de degré n , et F' de degré $n-1$. Si G est une courbure telle que $G(F) = F'$ et si $G(P) \neq P'$ sont deux

4) Soit P un autre polynôme régulier de degré n , et F' de degré $n-1$.
Sont égaux.

Spent 2 days.

3) Tous les angles dièdres entre deux faces adjacentes (de la même

2) Toutes les faces de dimension i sont isométriques

1) Faut un politique régulière de dimension :

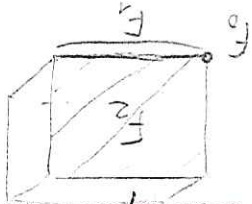
dimension d , et F une base de dimension i de $\mathcal{F}$. Alors,

Brav. 36. [5F, 369] Soit f un polynôme régulier de

Remarque 35. En dimension 3, on parle de solide platycédrique.

d'immédiate agit bruyamment en les drogeaux.

Def 34. On dit qu'un polynôme est régulier si son groupe



Exemple 33. Un diagramme du cube: (F_0, F_1, F_2)

$$\partial F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{d-1}.$$

d-uptet $(F_0, F_1, \dots, F_{d-1})$ où F_i est une force de dimension i

Def 32. [5F, 368] On appelle *diagramme de P* un

diodes de F et F' l'angle mon-orienté des sections etc.

Or appelle angle

of a (non-0) non-mul. in vector orthogonal to $f(\text{supp } f')$ at

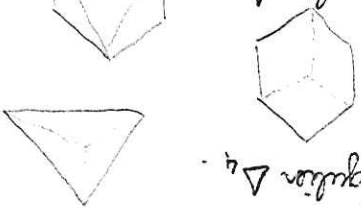
Def 31. [3F, 369] Soit F et F' deux faces de P de dimension $d-1$.

$\text{Fr}(E_i) \cap P$ est orthogonal face de P de dimension $d-1$.

$$P = \bigcap_{i=1}^n R_i \text{ son écriture minimale comme intersection de deux}$$

le même demi-espace, alors $\sigma(p) = p$.

Prøp 37. $[Au, 118]$ Ily a cinq solides platinumiens:



Le tétraèdre régulier Δ_4 .

the curve C_6 .

Octobris 1898.

P_{12} je dedukčné

• L'icosaèdre Δ_{20}

Développement n°2

Existence de l'isométrie régulière.



3) Isométries des solides platoniciens

3) Tensión de las soldaduras

Ex 38. $I_0(\Delta_4) \cong \mathbb{Z}_4$

$$(87) \Gamma \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong (90) \Gamma \quad [49, 363]$$
$$I_3(\Delta^2) \approx \chi^2 \times I_3(\phi^2)$$

Application 39. Nombre de coloriage du cube développé

[H₂g₂] Coldon Grenon, Histoire hétérodoxe de groupes et de générations.
(Calvage & Moutet).

[Au] Audin, Géométrie, (pages 34)

Chapitre 10

$SO_3(\mathbb{R})$ est simple

Références : Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie*, p237

Leçons : 103, 160

On va commencer par prouver quelques propriétés sur $SO_n(\mathbb{R})$ que l'on utilisera dans la suite pour prouver la simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$. On conclura sur l'éventuelle simplicité des autres groupes spéciaux orthogonaux.

Théorème.

$SO_n(\mathbb{R})$ est compact et connexe (par arcs).

Démonstration. 1) On pose l'application ϕ qui à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe tMM . Elle est continue car chacune des composantes est un polynôme en les coefficients de la matrice en entrée. Donc $SO_n(\mathbb{R}) = \phi^{-1}\{I_n\} \cap \det^{-1}\{1\}$ est fermé.

D'autre part, on prend la norme liée au produit scalaire $(A, B) = \text{Tr}({}^tAB)$ sur l'espace des matrices et on remarque que $\|M\| = \sqrt{\text{Tr}({}^tMM)} = \sqrt{n}$ pour $M \in SO_n(\mathbb{R})$. Donc $SO_n(\mathbb{R})$ est borné (pour toute norme car elles sont équivalentes).

Comme on est en dimension finie, $SO_n(\mathbb{R})$ est compact.

2) Continuons avec la connexité. Soit $M \in SO_n(\mathbb{R})$, on va créer un chemin continu liant M à I_n . Ainsi on pourra relier deux matrices par un chemin continu en passant par l'identité.

Le théorème de réduction donne l'existence d'une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$M = P \begin{pmatrix} I_r & & & \\ & -I_{2p} & & \\ & & R_{\theta_1} & \\ & & & \ddots \\ & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix} {}^tP \text{ avec } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

$$\text{On pose alors pour } t \in [0, 1], N(t) = \begin{pmatrix} I_r & & & \\ & R_{t\pi} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_{t\pi} \\ & & & & R_{t\theta_1} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & R_{t\theta_s} \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\gamma(t) := PN(t){}^tP$ est une application continue de $[0, 1]$ dans $SO_n(\mathbb{R})$ qui relie M à I_n . □

On peut maintenant prouver le théorème suivant.

Théorème.

$SO_3(\mathbb{R})$ est un groupe simple.

Démonstration. Soit $H \triangleleft \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ non trivial, il nous faut montrer que $H = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Or les retournements engendrent $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})^1$. De plus, ils sont conjugués dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ (donc l'ensemble des retournements est stable par automorphisme intérieur). On en déduit que si H contient un retournement, comme il est distingué, il les contient tout et donc $H = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

- Pourquoi les retournements sont-ils conjugués?

Soient r_D et $r_{D'}$ deux retournements de droites respectives D et D' . On pose d et d' deux vecteurs unitaires engendrant chacun leur droite associée. On peut ensuite trouver une base orthonormée de $D^\perp : (e_1, e_2)$ (et de même on peut trouver (e'_1, e'_2) base de $D'^\perp$). Finalement on obtient deux bases orthonormées (d, e_1, e_2) et (d', e'_1, e'_2) . La matrice de passage de l'une à l'autre est donc orthogonale. Quitte à poser $d'' = -d'$, on a une matrice de passage de déterminant 1, donc dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

- Pourquoi H contient-il un retournement?

Soit $h \in H$ non trivial, on pose $\phi : \begin{array}{ccc} \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}(ghg^{-1}h^{-1}) \end{array}$

- $\phi(I_3) = 3$ donc $3 \in \mathrm{Im}(\phi)$,
- $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est connexe donc $\phi(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}))$ est un intervalle contenant 3,
- $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est compact donc $\phi(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})) = [a, b]$ avec $a \leq 3 \leq b$,
- la trace d'un élément de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est de la forme $1 + 2\cos(\theta)$, donc $\phi(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})) = [a, 3]$ avec $a \in [-1, 3]$.

Supposons que $a = 3$, alors $\forall g \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, $ghg^{-1}h^{-1} = I_3$ (le théorème de réduction donne qu'il y a une unique matrice de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ de trace 3). Donc $h \in Z(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})) = I_3^2$. C'est absurde!

Donc $a < 3$, donc il existe $n \in \mathbb{N}^\bullet$ tel que $a < 1 + 2\cos(\frac{\pi}{n}) < 3$ (car $3 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 2\cos(\frac{\pi}{n})$). On note g_n tel que $\phi(g_n) = 1 + 2\cos(\frac{\pi}{n})$. Alors $h_n := g_n h g_n^{-1} h^{-1} \in H$ (car $h^{-1} \in H$ et $g_n h g_n^{-1} \in H$ car H est distingué) et est une rotation d'angle $\pm \frac{\pi}{n}$.
Donc h_n^n est dans H et est une rotation d'angle π , donc un retournement. $\square$

Remarque : qu'en est-il des autres groupes spéciaux orthogonaux?

Si n est pair, $\langle \pm I_n \rangle \triangleleft \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ n'est pas simple. On pose ainsi naturellement les groupes $\mathrm{PSO}_n(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) / \langle \pm I_n \rangle & \text{si } n \text{ est pair} \\ \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

On peut alors montrer (mais c'est difficile) que $\mathrm{PSO}_n(\mathbb{R})$ est simple pour $n = 3$ et $n \geq 5$. C'est faux pour $n = 4$ car $\mathrm{PSO}_4(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ (en le faisant agir sur les quaternions, fait dans H2G2). Pour $n = 2$, $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est abélien donc $\mathrm{PSO}_2(\mathbb{R})$ aussi; en particulier, il n'est pas simple.

1. On admettra que les retournements engendrent $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\bullet$

2. En effet, soit $u \in Z(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}))$, alors pour toute droite D de l'espace, si on note r_D le retournement de droite D , on a

Isométries du cube

Arnaud GIRAND

5 juillet 2012

Référence :

— [Ale99], p. 64–66

On considère le cube C_6 centré en l'origine O canonique de l'espace $\mathbb{R}^3$ (cf. figure). On note G le sous-groupe des isométries affines de l'espace conservant C_6 et G^+ le sous-groupe de G formé des transformations de déterminant positif.

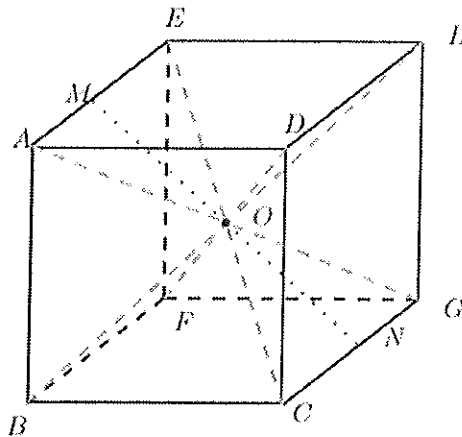


FIGURE 1 – Le cube C_6

Notons $\mathcal{D} := \{D_1, \dots, D_4\}$ l'ensemble des grandes diagonales (i.e passant par O) de C_6 (en orange sur la figure). Alors, comme G conserve les distances, que la longueur commune à chaque élément de $\mathcal{D}$ est la plus grande distance possible entre deux points du cube et que cette propriété caractérise $\mathcal{D}$, G agit sur $\mathcal{D}$. Ceci nous livre un morphisme de groupes :

$$\rho : G \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{D}) \cong \mathfrak{S}_4$$

Une symétrie axiale (on rotation d'angle π) par rapport à un axe reliant les milieux de deux côtés et passant par O réalise (au sens de ρ) une transposition ; par exemple, la symétrie par rapport à (MN) échange $[AG]$ et $[CE]$. Ainsi, comme on peut réaliser toutes les transpositions de $\mathfrak{S}_4$, ρ est surjectif.

Soit à présent $f \in \ker(\rho)$, que l'on suppose différente de l'identité. En pratique, cela signifie que $\forall i \in [4]$, $f(D_i) = D_i$ mais qu'il existe un indice i_0 tel que f échange les sommets de D_{i_0} . On peut, sans perdre de généralité¹ supposer que $f(A) = G$. Alors $f(B) \in \{B, H\}$ et $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$ donc on a nécessairement $f(B) = H$. En itérant ce procédé, on trouve que f échange les sommets de toutes les grandes diagonales de C_6 , ergo f est la symétrie s_O par rapport à l'origine (car elle lui est égale sur les sommets donc sur tout le cube qui est l'enveloppe convexe de ces derniers). On en déduit donc que :

$$\ker(\rho) = \{\text{id}_{\mathbb{R}^3}, s_O\}$$

De fait on obtient un isomorphisme :

$$G/\{\text{id}_{\mathbb{R}^3}, s_O\} \cong \mathfrak{S}_4$$

1. Car après tout, qu'est-ce qu'un nom ?

Les classes modulo $\ker(\rho)$ sont de la forme $\{f, s_0 \circ f\}$. Or $\det(s_0 \circ f) = \det(s_0) \det(f) = -\det(f)$. De fait, chaque classe d'équivalence contient exactement un déplacement (et un antidéplacement), ce qui signifie que :

$$G/\{\text{id}_{\mathbb{R}^3}, s_O\} \cong G^+$$

On en déduit alors par composition que :

$$G^+ \cong \mathfrak{S}_4 \quad (1)$$

On remarque à présent que, si on pose $\mathbf{C} := \langle s_O \rangle = \{\text{id}_{\mathbb{R}^3}, s_O\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on a :

$|G| = |G^+| |\mathbf{C}|$, égalité obtenue car $\mathbf{C} = \ker(\rho)$ et que $G/\ker(\rho) \cong \mathfrak{S}_4 \cong G^+$ d'après ce qui précède ;

$G^+ \cap \mathbf{C} = \{\text{id}_{\mathbb{R}^3}\}$ car $\det(s_O) = -1$;

$G^+ \triangleleft G$ car $(G : G^+) = 2$;

De fait on a :

$$G \cong G^+ \rtimes \mathbf{C}$$

De plus, $\mathbf{C} \triangleleft G$ car $\mathbf{C} = \ker(\rho)$. En particulier, si $a \in G$, $as_O = as_Oa^{-1}a \in \{a, s_Oa\}$ et comme s_O est inversible on a nécessairement $as_O = s_Oa$. La conjugaison par $\mathbf{C}$ étant triviale, le produit semi-direct interne ci-dessus est direct.

In fine, on a l'isomorphisme suivant :

$$G \cong G^+ \times \mathbf{C} \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad (2)$$

Détails supplémentaires :

On peut donner un "dictionnaire" de l'isomorphisme $G^+ \cong \mathfrak{S}_4$.

- * L'identité ... Ahem.
- * Les transpositions sont réalisées comme on l'a vu par les retournements d'axes joignant les milieux de deux côtés en passant par O .
- * Les 3-cycles sont réalisés par les rotations d'angle (géométrique) $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'une des diagonales. Par exemple, le 3-cycle (123) (où l'on identifie *naturellement*² $\mathfrak{S}_4(\mathcal{D})$ à $\mathfrak{S}_4$ via $D_i \mapsto i$) a pour axe D_4 .
- * Les 4-cycles correspondent quant à eux aux rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour d'un axe orthogonal à 2 faces du cube.
- * Les doubles transpositions sont réalisés par le carré de l'une des rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ ci-dessus.

Au final on a :

- ▷ 6 axes d'ordre 2 (pour 6 transpositions) ;
- ▷ 4 axes d'ordre 3 (pour 8 3-cycles : une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et une d'angle $-\frac{2\pi}{3}$) ;
- ▷ 3 axes d'ordre 4 (pour 6 4-cycles).

Références

[Ale99] Michel Alessandri. *Thèmes de géométrie*. Dunod, 1999.

2. Ne soyons pas tordus ...

Formule de Burnside et Applications Combinatoires

Neumann-Stay-Thompson, *Groups and Geometry*, page 100

Coloriage du cube

3

Théorème : Soit X un ensemble fini et G un groupe fini agissant sur X . Pour tout $g \in G$, on pose

$$\text{Fix}_X(g) = \{x \in X / g(x) = x\}$$

On note $\text{Orb}_X(G)$ l'ensemble des G -orbites dans X .

Alors

$$|\text{Orb}_X(G)| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_X(g)|$$

Preuve : Supposons dans un premier temps que G agisse transitivement sur X . Posons

$$S = \{(x, g) \in X \times G / g(x) = x\}$$

D'une part, on a $|S| = \sum_{g \in G} |\text{Fix}_X(g)|$. D'autre part, on a $|S| = \sum_{x \in X} |G_x|$ où $G_x = \{g \in G / g(x) = x\}$ est le stabilisateur de x .

D'après le Théorème de Lagrange, comme X est un espace G -transitif, on a $|G_x| = \frac{|G|}{|X|}$

$$\text{D'où } |S| = \sum_{x \in X} |G_x| = |X| \frac{|G|}{|X|} = |G|. \text{ Ainsi } 1 = |\text{Orb}_X(G)| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_X(g)|.$$

Supposons à présent que les G -orbites de X soient $X_1, \dots, X_k$. Alors

$$\text{Fix}_X(g) = \bigcup_{i=1}^k \text{Fix}_{X_i}(g) \quad \text{et} \quad |\text{Fix}_X(g)| = \sum_{i=1}^k |\text{Fix}_{X_i}(g)|$$

$$\text{D'où } \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_X(g)| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i=1}^k |\text{Fix}_{X_i}(g)| = \sum_{i=1}^k \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_{X_i}(g)| = \sum_{i=1}^k 1 = k = |\text{Orb}_X(G)|$$

Application : De combien de manières différentes peut-on colorier un cube avec les couleurs rouge, blanc et bleu ?

Il y a 3 couleurs et 6 faces : a priori 3^6 manières de colorier le cube. Mais certains coloriage(s) sont les mêmes lorsqu'ils sont dans la même orbite du groupe de rotation G du cube agissant sur X l'ensemble des 3^6 coloriage(s) possibles.

On cherche donc le nombre d'orbites de G sur X . Pour utiliser Burnside, on doit savoir pour chaque rotation g du cube, combien de coloriage(s) elle laisse fixe(s).

Prenons par exemple π rotation autour d'un axe passant par les milieux de côtés opposés du cube. Cette rotation échange la face du haut avec la face est, la face du bas avec la face ouest, la face du nord avec la face sud. Ainsi, si le cube "tourné" veut être indistinguable du cube initial, alors :

$$\text{Haut} = \text{Est} \quad , \quad \text{Bas} = \text{Ouest} \quad , \quad \text{Nord} = \text{Sud}$$

Il y a ainsi 3^3 coloriage(s) de X qui sont fixés par une telle rotation. De même pour les autres types de rotations, on peut obtenir le tableau suivant :

Rotation	Nombre de rotations	Nombre de coloriage(s) fixés par 1 rotation	Contribution à $\sum \text{Fix}_X(g) $
Id	1	3^6	729
Axes par sommets diag. opposés, angles $\pm \frac{2\pi}{3}$	8	3^2	72
Axes par milieux des côtés opposés, angle π	6	3^3	162
Axes par centres des faces opposées, angle π	3	3^1	243
Axes par centres des faces opposées, angles $\pm \frac{\pi}{2}$	6	3^3	162
Total :	24		1368

$$\text{Donc } |\text{Orb}_X(G)| = \frac{1}{|G|} \sum |\text{Fix}_X(g)| = \frac{1368}{24} = 57.$$

Référence : Jean Fresnel, Méthodes modernes en géométrie p.370-375, édition Hermann.

Dans toute la suite, ϵ désignera un espace affine de dimension fini

1 Introduction

Nous nous attacherons ici à démontrer un fait généralement omis par la majorité des auteurs, c'est-à-dire l'existence des polyèdres réguliers à 20 et 12 faces.

En effet, s'il est bien connu depuis des temps immémoriaux qu'il ne peut y avoir que 5 polyèdres réguliers et pas plus, rien ne garantit leur existence. Certains individus perfides (ou physiciens) pourraient arguer que l'on peut très bien construire le dodécaèdre dans le monde réel. Mais rien n'empêche que la dite construction soit en fait une belle approximation et qu'un individu très, très... rigoureux et doté d'un appareil de mesure suffisamment précis puisse démontrer qu'il ne s'agit pas d'un polyèdre régulier. En réalité, il n'en est rien.

2 Quelques précisions

On précise dans cette partie les notions intuitives de polyèdres, faces, et on définit correctement la régularité d'un polyèdre

Définition 1. Un polyèdre convexe de ϵ est une partie, intersection finie de demi espaces (fermés) de ϵ . Un polytope est un polyèdre convexe compact d'intérieur non vide (dans ϵ)

Remarque. Bien entendu, la notion intuitive de polyèdre, correspond à celle de polytope, telle qu'elle est définie ci-dessus. Cependant, le mot polyèdre étant plus que répandu dans le langage courant, on confondra les deux définitions.

Passons au théorème-définition suivant:

Définition 2. Soit P un polyèdre convexe d'intérieur non-vide avec $P \neq \epsilon$ et supposons que

$$P = \bigcap_{i=1}^n R_i$$

soit une écriture minimale de P comme intersection de demi-espaces fermés.

Alors les demi-espaces R_i sont déterminés de façon unique. Soit $H_i = \partial R_i$, alors $H_i \cap P$ est un polyèdre convexe de H_i , d'intérieur non-vide. On a de plus

$$\partial P = \bigcup_{i=1}^n (H_i \cap P)$$

Les $H_i \cap P$ sont appelés les faces de P .

Définition 3. Soit P un polytope de ϵ , on appelle drapeau de P un d -uplet $(F_0, \dots, F_{d-1})$ où F_i est une face de dimension i et où $F_0 \subset \dots \subset F_{d-1}$. On note $\text{Is}(P)$ les groupe d'isométries de P . L'image d'une face de dimension i est une face de dimension i . On dit que le polytope P est régulier si $\text{Is}(P)$ opère transitivement sur les drapeaux.

3 Démonstration de l'existence de l'icosaèdre

Théorème 3.1. Soit P un polytope de ϵ . Les propositions suivantes sont équivalentes:

- (i) Le polytope P est régulier.
- (ii) Les faces F de dimension $d-1$ de P sont des polytopes réguliers de $V(F)$ et sont isométriques entre elles; de plus les angles dièdres des faces de dimension $d-1$ sont égaux.

(iii) Les faces F de dimension $d-1$ sont des polytopes réguliers de $V(P)$ et pour tout sommet x de P les extrémités des arêtes issues de x (autres que x) sont dans un hyperplan H_x et $H_x \cap P$ est un polytope régulier de H_x .

Preuve 1. i) $\Rightarrow$ ii) Ceci découle directement des propositions du plan

i) $\Rightarrow$ iii) (en dimension 3)

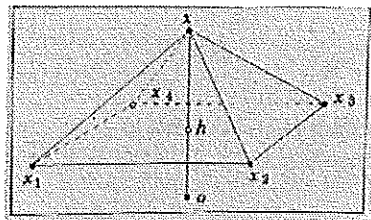


Figure 1: Représentation du sommet x dans le cas où $r = 4$

Soit x un sommet de P

Montrons d'abord que les extrémités des segments partant de x sont dans un même hyperplan. On note r le nombre d'arêtes qui partent du sommet x . On peut ordonner les faces de dimension 2 passant par x en les notant $I_1, \dots, I_r$ de façon à ce que:

$$\begin{cases} I_r \cap I_1 = [x, x_1] \\ I_i \cap I_{i+1} = [x, x_{i+1}] \quad \forall i \in 1, \dots, r-1 \end{cases}$$

Soient o le centre de P (son isobarycentre), H l'hyperplan orthogonal à droite (Ox) et passant par x_1 . Il coupe (Ox) en h . En considérant les drapeaux $D_1 : x \in [x, x_1] \subset F_1$ et $D_i : x \in [x, x_i] \subset F_i$ pour $i \in 1, \dots, r$, on sait par définition de la régularité de P qu'il existe $g \in Is(P)$ telle que:

$$\begin{cases} g(x) = x \\ g(x_i) = x_i, \text{ par transitivité de l'action de } Is(P) \text{ sur les drapeaux} \\ g(o) = o, \text{ puisque } o \text{ est l'isobarycentre de } P \end{cases}$$

La droite (Ox) est donc conservée et comme une isométrie conserve les distances, on a aussi $g(h) = h$. On a donc que la droite normale au plan H est conservée par g qui entraîne que H est envoyé sur un plan orthogonal à H . Mais $g(h) = h$ donc $g(H) = H$. En particulier $g(x_1) = x_1 \in H$.

Il suffit maintenant pour conclure de montrer que $H \cap P$ est régulier dans H . En considérant les drapeaux D_i et D_j selon la notation précédentes. Remarquons que renumérotées selon le paragraphe précédent, on a que $x, x_i, x_{i+1} \in I_i$ et $x, x_j, x_{j+1} \in I_j$. Encore par transitivité de l'action de $Is(P)$ sur les drapeaux

$$\text{qu'il existe une isométrie de } P, g \text{ telle que: } \begin{cases} g(x) = x \\ g(x_i) = x_j \\ g(x_{i+1}) = x_{j+1} \end{cases}$$

On a donc que g envoie le drapeau $(x, [x, x_{i+1}])$ sur $(x, [x, x_{j+1}])$. En plus le même raisonnement que précédemment implique que $g(H) = H$. Mais $g(P) = P$ par définition de $Is(P)$. Ainsi, on a bien que $g(H \cap P) = H \cap P$ et ainsi $g \in Is(H \cap P)$. On a donc que $H \cap P$ est régulier.

iii) $\Rightarrow$ ii) en dimension. Avec les notations précédentes, les faces I_1 et I_2 ont en commun l'arête $[x, x_2]$; comme I_1 et I_2 sont réguliers on a $\|x - x_1\| = \|x - x_2\| = \|x - x_3\|$. De plus comme $H \cap P$ est régulier, on a $\|x_1 - x_2\| = \|x_2 - x_3\|$. Cela montre que les triangles (x, x_1, x_2) , $(x, x_2, x_3 - x)$ sont isométriques et ainsi les angles $(x_1 - x, x_2 - x)$ et $(x_2 - x, x_3)$. Il suit de cela que les faces de dimensions de dimensions 2 de P ayant un sommet x en commun sont isométriques. Or on peut montrer (voir Méthodes modernes en géométrie) que pour P un polytope, il existe une chaîne finie de faces reliant deux faces de même dimension. Ce qui permet de conclure.

ii) $\Rightarrow$ i) Soient $D : (s, A, F)$ et $D' : (s', A', F')$. Comme les faces sont isométriques il existe une isométrie g telle que:

$$\begin{cases} g(s) = s' \\ g(A) = A' \\ g(F) = F' \end{cases}$$

On peut de plus choisir g telle que $g(P)$ et P soient dans le même demi-espace. On peut alors conclure en utilisant le théorème (5.2.1.6) de Méthodes modernes en géométrie que $g(P) = P$, ce qui permet de

conclure.

Venons en maintenant au sujet principal, c'est à dire l'existence de l'isocaèdre. Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. On va inscrire les point d'un icosaèdre (dont on va montrer qu'il est régulier)

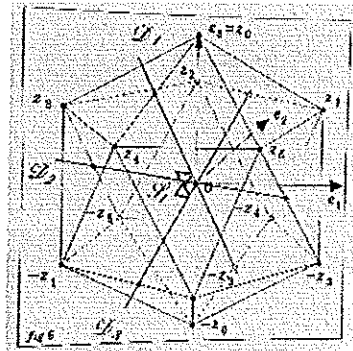


Figure 2: Icosaèdre

dans la sphère de rayon 1. On note les points, $z_0 = e_3$ et $\forall k \in \{0, 4\}$ $z_{k+1} = \cos(\frac{2\pi k}{5})e_1 + \sin(\frac{2\pi k}{5})e_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}e_3$. On note $\mathcal{S} = \{\pm z_k | 0 \neq 5\}$, il reste à montrer que l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}$ est régulière. D'abord remarquons que $\|z_k\| = 1 \forall k$. Soit r_0 la rotation d'axe orienté définie par l'axe z_0 et de mesure d'angle $\frac{2\pi}{5}$ alors

$$z_{k+1} = r_0^k(z_1)$$

pour $0 \neq k \neq 4$. Ainsi P est stable par r_0 . Un simple calcul permet de montrer que toutes les arêtes ont la même longueur. Il s'en suit que les faces sont toutes des triangles équilatéraux isométriques. Clairement l'action de r_0 montre que $z_1, \dots, z_5$ sont la suite des sommets d'un pentagone régulier. Il reste à montrer qu'il en est de même pour $z_0, z_5, -z_3, -z_4, -z_2$. Cela vient du fait que z_1 est orthogonal aux vecteurs $z_0 - z_2, z_0 + z_4, z_0 + z_3, z_0 - z_5$. Ainsi $z_0, z_5, -z_3, -z_4, -z_2$ appartient à un plan affine orthogonal à z_1 . L'action de r_0 et le théorème précédent permettent de conclure.

A l'oral on ne dit pas que $z_1 = (1, 0, 0)$

et que c'est linéaire

1. Le dessin de l'isocaèdre sur un plan plus qu'un 18 min.