161

Distances et isométries d'un espace affine euclidien.

I - Espaces affines euclidiens, distance.

1 - Généralités

Déf 1 : Espace affine euclidien : $(\mathcal{E}, E)$ tel que E espace vectoriel euclidien de dimension n. Distance induite : $d(A,B) = \|\vec{AB}\|$

Ex 2 : $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Tous y sont isomorphes isométriquement.

Déf 2 : Soient $(\mathcal{F}, F)$ et $(\mathcal{G}, G)$ des sous-espaces affines de $(\mathcal{E}, E)$.
(i) On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont orthogonaux si $F \subset G^\perp$.
(ii) On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont supplémentaires orthogonaux si $F \subset G^\perp$.
(iii) On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont perpendiculaires si $F^\perp \subset G$

Déf 3 : (i) On appelle projection orthogonale de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ la projection ~~de~~ de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $F^\perp$.
(ii) On appelle symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{F}$ la symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à $F^\perp$.
Si $\mathrm{codim}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{F} = 1$: réflexion d'hyperplan $\mathcal{F}$
Si $\mathrm{codim}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{F} = 2$: retournement d'espace $\mathcal{F}$.

2 - Distance de sous-espaces, problèmes de distance.

Déf 4 : Soient $x_1, \dots, x_p \in E$. On définit $\mathrm{Gram}(x_1,\dots,x_p) = (\langle x_i, x_j\rangle)_{i,j}$ la matrice de Gram de la famille $(x_1,\dots,x_p)$ et $G(x_1,\dots,x_p) := \det \mathrm{Gram}(x_1,\dots,x_p)$ le déterminant de Gram de $(x_1,\dots,x_p)$.

Rq 5 : $\mathrm{Gram}(x_1,\dots,x_p) = {}^tXX$, $X = (x_1,\dots,x_p)$.

Rq 6 : $G(x_1,\dots,x_p)$ est invariant par transvection.

Prop 7 : Soient $(\mathcal{F},F)$ et $(\mathcal{G},G)$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$. Soit $A \in \mathcal{E}$.
(i) $\forall P \in \mathcal{F}$ et toute base $(\vec{e_1},\dots,\vec{e_r})$ de F, on a
$$\boxed{d(A,\mathcal{F})^2 = G(\vec{AP}, \vec{e_1},\dots,\vec{e_r}) / G(\vec{e_1},\dots,\vec{e_r})}$$
(ii) Si $(P,Q) \in \mathcal{F}\times\mathcal{G}$, si $(\vec{e_1},\dots,\vec{e_m})$ base de $F+G$, alors
$$\boxed{d(\mathcal{F},\mathcal{G})^2 = G(\vec{PQ}, \vec{e_1},\dots,\vec{e_m}) / G(\vec{e_1},\dots,\vec{e_m})}$$

Prop 8 : Distance à un hyperplan. $\mathcal{R} = (0, \vec{e_1},\dots,\vec{e_n})$ repère de $\mathcal{E}$.
Soit $(\mathcal{H}, H)$ un hyperplan de $\mathcal{E}$ et f affine non constante telle que $\mathcal{H} = f^{-1}(0)$. $f(m) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta$.
Alors si $a = (x_1,\dots,x_n)$ dans $\mathcal{R}$,
$$\boxed{d(a,\mathcal{H}) = \frac{|\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta|}{\sqrt{\alpha_1^2+\dots+\alpha_n^2}}}$$

Prop 9 : Soit $(a_1,\dots,a_{n+1})$ une base affine de $\mathcal{E}$.
(i) Pour $2 \le r \le n+1$, soit
$\mathcal{F}_r = \{m \in \mathcal{E} : d(a_1,m) = \dots = d(a_r,m)\}$
Alors $\mathcal{F}_r$ est un sous-espace de $\mathcal{E}$ de dimension $n-r+1$
(ii) Il existe une unique sphère de $\mathcal{E}$ contenant $a_1,\dots,a_{n+1}$

Conséquence : Par 3 points non alignés passe un unique cercle.

II - Isométries

1 - Rappels sur les isométries vectorielles.

Déf 9 : Isométrie $u \in \mathcal{L}(E)$: $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$. Notation $O(E)$ (groupe orthogonal). $O_n(\mathbb{R}) = O(\mathbb{R}^n) \simeq \{M \in GL_n(\mathbb{R}) : {}^tMM = I_n\}$

Rq 10 : La condition $u \in \mathcal{L}(E)$ est redondante.

Ex 11 : Id ; $E = \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{i\theta}z$. Si $F \subset E$ sev, $s : \begin{array}{l} E = F\oplus F^\perp \longrightarrow E \\ u+v \mapsto u-v\end{array}$ symétrie orthogonale (vectorielle). Si F est un hyperplan, on parle de réflexion orthogonale (vectorielle).

Déf 12 : $O^+(E) = SO(E) = \{f \in O(E) : \det f = 1\}$ (isométries directes)
$O^-(E) = \{f \in O(E) : \det f = -1\}$. (isométries indirectes)

Prop 13 : $O^+(E)$ et $O^-(E)$ sont les deux composantes connexes par arcs de $O(E)$.

Prop 14 : $\forall u \in O(E)$, u s'écrit comme composée d'au plus n réflexions.

Prop 15 : Réduction des isométries.
① $\forall M \in O_2(\mathbb{R})$, $\exists \theta \in \mathbb{R}$: $M = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ (rotation) ou
$M = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ (réflexion).

→

② $\forall M \in O_3(\mathbb{R}), \exists P \in O_n(\mathbb{R}); \theta \in \mathbb{R}$:

$$\underbrace{P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{réflexion}}, \text{ ou } \underbrace{P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{rotation}} \text{ ou } \underbrace{P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{anti-rotation } (\sin\theta \neq 0)}.$$

③ $\forall M \in O_n(\mathbb{R}), \exists P \in O_n(\mathbb{R}), \exists \theta_1, \dots, \theta_s \in \mathbb{R}$:

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & R(\theta_1) \\ 0 & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & R(\theta_s) \end{pmatrix} \text{ où } R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Prop 16 : L'application $\mathbb{R} \to O^+(2), \theta \mapsto R(\theta)$ induit un isomorphisme de groupes $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}} \to O^+(2)$.

Prop 17 : Si $u, v \in E$, $\|u\| = \|v\| = 1$, il existe une unique rotation $R(\theta)$ qui envoie u sur v. θ est appelé une mesure d'angle du couple (u, v).

Def 18 : Relation sur $\mathbb{R}^2$ $(u,v) \mathcal{R} (u',v') \iff \exists f \in O_2^+(\mathbb{R}) : f(u) = u'$, $f(v) = v'$

La classe d'équivalence de (u,v) est appelée angle orienté (de vecteurs) de u et v.

Prop 19 : Les réflexions (vectorielles) renversent les angles orientés de vecteurs (i.e. $(u,v) \mapsto (v,u)$).

e - Isométries affines.

Def 20 : Isométrie affine : $\mathcal{E}$ affine euclidien, $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que $\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ $(d(f(A), f(B)) = d(A,B))$.

Prop 21 : (i) Si f est une isométrie affine, f est une application affine.
(ii) Si f est une isométrie affine, $\vec{f}$ (app° vectorielle) est une isométrie vectorielle.

Def 22 : On note $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ le groupe des isométries affines, $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ le sous-groupe des déplacements $(\vec{f} \in O^+(E))$, $\mathrm{Isom}^-(\mathcal{E})$ l'ensemble des anti-déplacements $(\vec{f} \in O^-(E))$.

Exemple 23 : Les symétries orthogonales sont des anti-déplacements. Id est un déplacement.

Def 24 : Si $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$
- φ est une translation si $\varphi(A) = A + \vec{u}$ $\forall A$ (on note $\varphi = t_{\vec{u}}$).
- φ est une rotation si $\varphi \in \mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ et dim $\mathcal{E} = 2$ (voir 3)

Prop 25 : Toute isométrie de $\mathcal{E}$ est composée de $p \leq n+1$ réflexions.

Prop 26 : Forme réduite des isométries

$\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$. Il existe $\psi \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ et t_v, $v \in E$ tq
(i) $\mathcal{F} = \{$points fixes de $\psi\} \neq \emptyset$
(ii) $v \in F$
(iii) $\varphi = t_{\vec{v}} \circ \psi = \psi \circ t_{\vec{v}}$. Un tel couple $(\vec{v}, \psi)$ est unique

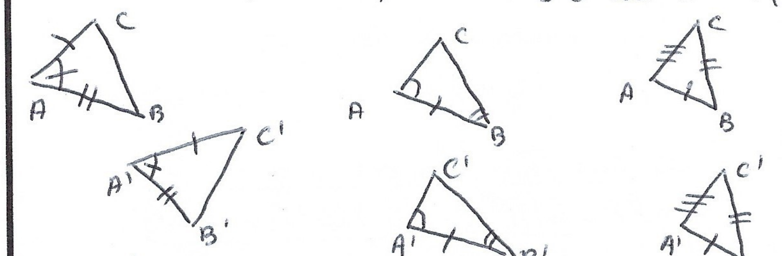
Def 27 : Angles orientés de droites $(n=2)$. On introduit $(u,u') \mathcal{R}_2 (v,v') \iff \begin{cases} (u,u') \mathcal{R}_1 (v,v') \\ (u,u') \mathcal{R}_1 (-v,v') \end{cases}$ u, u' unitaires dirigeant D et D'.

Les classes d'équivalences pour $\mathcal{R}_2$ sont les angles orientés (de (D,D')).

Prop 28 : Les réflexions renversent les angles orientés de droites.

Prop 29 : On définit les angles géométriques en identifiant (u,v) à (v,u). Les isométries conservent les angles géométriques.

Application 30 : Cas d'isométries des triangles : A,B,C ; $A'B'C'$ deux triangles. (1) $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\hat{A} = \hat{A'}$
(2) $AB = A'B'$, $\hat{A} = \hat{A'}$ et $\hat{B} = \hat{B'}$.
(3) $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $CA = C'A'$.
Alors si on a (1), (2) ou (3), ABC et $A'B'C'$ sont isométriques



(1) (2) (3).

III - Classification en dimensions 2 et 3.

1 - Dimension 2

φ	translation	rotation	réflexion	symétrie glissée
points fixes	aucun	un unique	une droite	aucun
écriture en produit de réflexions	2 droites parallèles	2 droites sécantes	une droite	3 droites
$\mathbb{C}$	$z \mapsto z+b$	$z \mapsto az+b$, $\lvert a\rvert=1$, $a \neq 1$	$z \mapsto a\bar{z}+b$, $\lvert a\rvert=1$, $a\bar{b}+b=0$	$z \mapsto a\bar{z}+b$, $\lvert a\rvert=1$, $a\bar{z}+b \neq 0$.

2 - Dimension 3

φ	translation	réflexion	rotation	symétrie glissée
type	$\varphi(A)=A+\vec{u}$	plan affine $\mathcal{P}$	axe $\mathcal{D}$	$\varphi = t_{\vec v} \circ \psi = \psi \circ t_{\vec v}$, ψ réflexion
points fixes	aucun	$\mathcal{P}$	$\mathcal{D}$	aucun.

φ	vissage	anti-rotation
type	$\varphi = t_{\vec v} \circ \psi = \psi \circ t_{\vec v}$, ψ rotation axe $\mathcal{D}$	$\varphi = f \circ g$, f rotation, g symétrie centre A
points fixes	aucun.	A

Developpement 1 : Il existe un isomorphisme explicite $G/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$ (G désigne le groupe des quaternions de norme 1).

IV - Exemples de groupes d'isométries

1 - Groupes d'isométrie préservant une figure du plan.

Prop 31 : Si G est un sous-groupe fini de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$, il existe $A \in \mathcal{E}$ tel que $\forall \varphi \in G$, φ fixe A.

Prop 32 : Le groupe des déplacements qui préserve une partie bornée du plan est commutatif.

Corollaire 33 : Le groupe des déplacements qui préserve un polygône régulier est fini, commutatif et admet un point fixe.

Ex 34 : Le groupe des isométries du plan qui préserve le cercle est isomorphe à $O(2)$.

Ex 35 : Le groupe des isométries du plan qui préservent un polygône régulier est le groupe diédral D_{2n} (n côtés).

2 - Groupes d'isométries du cube et du tétraèdre.

Prop 36 : Le groupe des isométries affines préservant un cube est isomorphe à $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Prop 37 : Le groupe des isométries du tétraèdre est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

3 - Groupes de pavages directs du plan

Def 38 : Un groupe cristallographique direct du plan est un sous-groupe $G \subset Is^+(\mathbb{R}^2)$ tel qu'il existe $P \subset \mathbb{R}^2$ compact, connexe, d'intérieur non vide tel que

(i) $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{g \in G} g(P)$ et (ii) $\forall g, h \in G$, $g(\mathring{P}) \cap h(\mathring{P}) \neq \emptyset \Rightarrow g(P) = h(P)$

Théorème 39 (Dev 2) : Il existe exactement 5 classes d'isomorphismes de groupes cristallographiques directs de $\mathbb{R}^2$

Références : TAUVEL, Cours de géométrie
AUDIN, Géométrie
BERGER, Géométrie
PERRIN, Cours d'algèbre.