Distances et isométries dans un espace affine euclidien

161

I) Distances et projections

1) Définitions et exemples

Déf 1 : Un espace affine $(\mathcal{E}, E)$ est dit euclidien si sa direction E est un espace vectoriel euclidien.

Déf 2 : Soit $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$ un espace affine euclidien.

- Si $(M,N) \in \mathcal{E}^2$: $d(M,N) := \|\overrightarrow{MN}\|$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur E. Il s'agit bien d'une distance.
- Si $M \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$, on définit la distance de M à $\mathcal{A}$ par $d(M,\mathcal{A}) := \inf\limits_{N\in\mathcal{A}} d(M,N) = \inf\limits_{N\in\mathcal{A}} \|\overrightarrow{MN}\|$

Déf 3 : Soient $(\mathcal{E}, E)$ un espace affine euclidien et $A \subset E$. On définit l'orthogonal de A par

$$A^\perp := \left\{ \vec{y} \in E,\ \forall \vec{x} \in A,\ \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \right\}$$

Prop 4 : Soit E un espace vectoriel euclidien

(i) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall \vec{x} \in E$, $\|u(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$ (u est orthogonal)
Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

(ii) Si A est un sous-espace vectoriel de E : $E = A \oplus A^\perp$

2) Exemples de calcul de distances.

Thm 5 : Soient $(\mathcal{E}, E)$ un espace affine euclidien, $(\mathcal{F}, F)$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, et $M \in \mathcal{E}$. Alors il existe un unique point $P \in \mathcal{F}$ tel que $d(M,\mathcal{F}) = d(M,P)$. Le point P est appelé projeté orthogonal de M sur $\mathcal{F}$ et vérifie :

$\forall N \in \mathcal{F}$, $\langle \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{NP} \rangle = 0$

Déf 6 : Soient E un espace préhilbertien, et $\mathcal{S} = (x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ un système de vecteurs de E.
La matrice de Gram associée à $\mathcal{S}$ est :

$$G(\mathcal{S}) = \left(\langle x_i, x_j \rangle \right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$$

Prop 7 : Si E est un espace préhilbertien réel, $x \in E$, et $\mathcal{S} = (x_i)_{1 \le i \le n}$ un système de vecteurs de E, alors on a :

$$\det(G(x, x_1, \dots, x_n)) = \|x - p_{\mathrm{Vect}(\mathcal{S})}(x)\|^2 \det(G(\mathcal{S}))$$

App 8 : Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité, on considère l'espace des variables aléatoires réelles L^2 centrées $L^2_0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \{ X \text{ v.a.r.}, \mathbb{E}[X] = 0 \text{ et } \mathbb{E}[X^2] < +\infty \}$
Alors $L^2_0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ muni de la covariance est un espace préhilbertien réel, et les matrices de covariance sont des matrices de Gram.

3) Résultats géométriques relatifs aux distances.

Prop 9 [Formule de Brahmagupta] Soit un quadrilatère inscriptible dans un cercle, de côtés a, b, c, d et d'aire $\mathcal{A}$. Alors :

$$\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad \text{où } p := \frac{a+b+c+d}{2}$$

Corollaire 10 [Formule de Héron] Soit un triangle de côtés a, b, c et d'aire $\mathcal{A}$. Alors:

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ où } p := \frac{a+b+c}{2}$$

II) Applications affines et isométries.

Déf 11: Soient $(\mathcal{E}_1, E_1)$ et $(\mathcal{E}_2, E_2)$ deux espaces affines euclidiens. Une application $f : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ est dite affine si:

$$\exists u_f \in \mathcal{L}(E_1, E_2), \forall M \in \mathcal{E}_1, \forall \vec{x} \in E_1, f(M+\vec{x}) = f(M) + u_f(\vec{x})$$

Lemme 12: Soient $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux espaces affines, et $f : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ une application. Alors f est affine si et seulement si f conserve les barycentres, i.e. pour tout système $(A_i, a_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ de points pondérés de $\mathcal{E}$ avec $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$, l'image $f(G)$ du barycentre G de ce système par f est le barycentre du système de points pondérés $(f(A_i), a_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$

Corollaire 13: Toute application $f : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ qui préserve les distances (i.e. $\forall (M,N) \in \mathcal{E}_1^2, d_2(f(M), f(N)) = d_1(M,N)$) est une application affine. Dans ce cas, f est appelée « isométrie (affine) ».

Prop 14: Soient $(\mathcal{E}_1, E_1)$ et $(\mathcal{E}_2, E_2)$ deux espaces affines euclidiens. Soit $(A; \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ un repère orthonormé de $\mathcal{E}_1$. Soit $f : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$. On a équivalence entre:

(i) f est une isométrie.

(ii) f est affine et $\forall \vec{x} \in E_1, \|u(\vec{x})\|_2 = \|\vec{x}\|_1$. On dit que u_f est orthogonale.

(iii) f est affine et $(f(A); u_f(\vec{e_1}), \dots, u_f(\vec{e_n}))$ est un repère orthonormé de $\mathcal{E}_2$.

App 15: Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une isométrie de l'espace affine $\mathbb{R}^n$. On suppose que f^n admet un point fixe. Alors f admet un point fixe.

Prop-Déf 16: Soient E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors: $\exists! u^* \in \mathcal{L}(E), \forall (x,y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$

L'endomorphisme u^* est appelé l'adjoint de u.

Prop 17: Soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ isométrie

(i) $u_f \circ u_f^* = u_f^* \circ u_f$ (c'est même une équivalence).

(ii) $\det(u_f) = \pm 1$.

(iii) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u_f. Alors $|\lambda| = 1$.

III - Classification des isométries affines

Dans toute la suite, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{E}_n$ est un espace affine de direction $\mathbb{R}^n$.

1) Groupes d'isométries en dimension n

Déf 18. $O(\mathcal{E}_n)$ est l'ensemble des isométries de $\mathcal{E}_n$ (groupe orthogonal)

- $O^+(\mathcal{E}_n) = \{ f \in O(\mathcal{E}_n) / \det(u_f) = 1 \}$ (groupe des déplacements) et $O^-(\mathcal{E}_n) = \{ f \in O(\mathcal{E}_n) / \det(u_f) = -1 \}$ (antidéplacements)

Déf 19: $O_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / A^T A = A A^T = I_n \}$ (matrices orthogonales)

$SO_n(\mathbb{R}) = \{ A \in O_n(\mathbb{R}) / \det(A) = 1 \}$ (groupe spécial orthogonal)

Prop 20: (i) $O(\mathcal{E}_n)$ est un groupe, et $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$

(ii) $O^+(\mathcal{E}_n)$ est un sous-groupe distingué de $O(\mathcal{E}_n)$.

Lemme 21: Soit $f \in O(\mathcal{E}_n)$. Alors $Ker(u_f - id) = Im(u_f - id)^{\perp}$.

Théorème 22: Soit $f \in O(\mathcal{E}_n)$. Alors f se décompose de manière unique sous la forme $f = t_{\vec{v}} \circ g$, où $\vec{v} \in Ker(u_f - id)$ et $g \in O(\mathcal{E}_n)$ admet un point fixe. De plus, $t_{\vec{v}}$ et g commutent.

Déf 23: Soit $(\mathcal{F}, F)$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}_n$. La symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{F}$ est :

$$S_{\mathcal{F}} : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n, \quad M \mapsto M + 2\,\overrightarrow{M p_{\mathcal{F}}(M)} \qquad \text{et alors} \quad u_{S_{\mathcal{F}}} : F \oplus F^{\perp} \to \mathbb{R}^n, \quad x_1 + x_2 \mapsto x_1 - x_2$$

$p_{\mathcal{F}}$ projection orthogonale

Prop 24: $s_{\mathcal{F}} \in O(\mathcal{E}_n)$ et $u_{S_{\mathcal{F}}}^2 = id$.

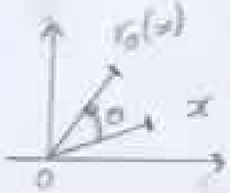
Déf 25: - $S_{\mathcal{H}}$ est une réflexion si $\mathcal{H}$ est un hyperplan : $\det(u_{S_{\mathcal{H}}}) = -1$.

- $S_{\mathcal{D}}$ est un retournement si $\mathcal{D}$ est de codimension 2.

DEV1 **Théorème 26:** - $O(\mathcal{E}_n)$ est engendré par les réflexions.
- $O^+(\mathcal{E}_n)$ est engendré par les retournements.

2) Isométries affines en dimension 2

Déf 27: Une rotation plane d'angle θ est définie par :
Sa matrice est : $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$.



Lemme 28: $R : (\mathbb{R}, +) \to (SO_2(\mathbb{R}), \times)$, $\theta \mapsto R(\theta)$ est un morphisme de groupes, qui induit un isomorphisme $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq SO_2(\mathbb{R})$.

En particulier, $SO_2(\mathbb{R}) = Im(R)$.

Théorème 29: Classification des isométries en dimension 2

	Déplacements			Antidéplacements
Matrice	$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$-I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$R(\theta)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
f admet un point fixe A et $\vec{v} = \vec{0}$	$id_{\mathcal{E}_2}$	Symétrie selon A	Rotation d'angle θ	Réflexion
f n'admet pas de point fixe : $\vec{v} \neq \vec{0}$	Translation $t_{\vec{v}}$	/	/	Symétrie glissée

Exemple 30: Le groupe diédral D_n est un sous-groupe de $O(\mathcal{E}_2)$ de cardinal $2n$.

Théorème 31: Soit ABC un triangle. Il existe un unique point $I \in Int(ABC)$ tel que $AI + BI + CI = \min\limits_{J \in Int(ABC)} (AJ + BJ + CJ)$ DEV2

3) Isométries affines en dimension 3

Lemme 32: $O^+(\mathcal{E}_3) \simeq SO_3(\mathbb{R})$ est un groupe simple.

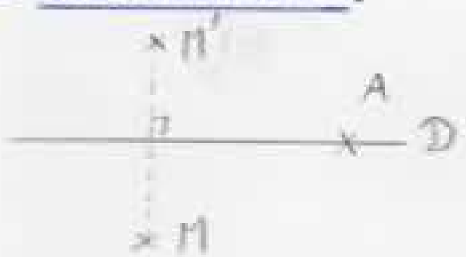
Théorème 33: Classification des isométries en dimension 3

	Déplacements		Antidéplacements	
Matrice	I_3	$\left(\begin{array}{c\|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R(\theta) \end{array}\right)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\left(\begin{array}{c\|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & R(\theta) \end{array}\right)$
f admet un point fixe A et $\vec{v} = \vec{0}$	$id_{\mathcal{E}_3}$	Rotation axiale	Réflexion	Rotation-symétrie
f n'admet pas de point fixe $\vec{v} \neq \vec{0}$	Translation $t_{\vec{v}}$	Vissage	Symétrie glissée	/

Annexe :

Dans toutes les figures, $M' = f(M)$.

- En dimension 2 :



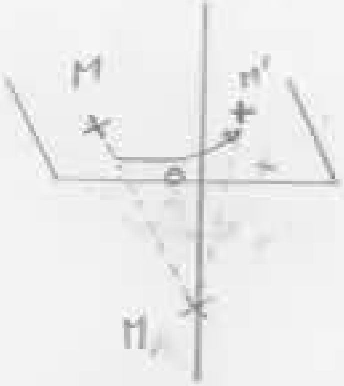
Réflexion par rapport à D (symétrie axiale)

Retournement par rapport à A (symétrie centrale)

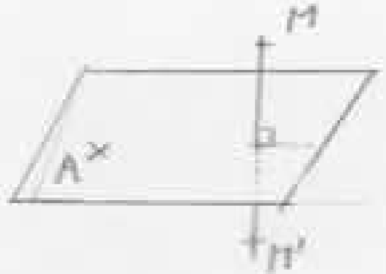
Rotation d'angle θ et de centre A

Symétrie glissée

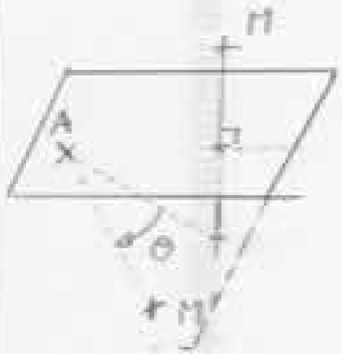
- En dimension 3 :



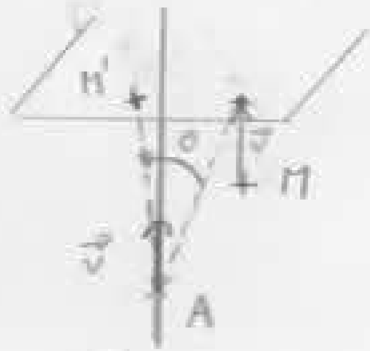
Rotation axiale



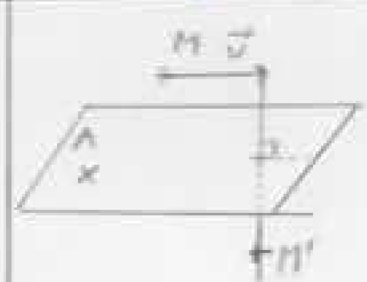
Réflexion



Rotation - symétrie



Vissage



Symétrie glissée