181 : Barycentres dans un espace affine de dimension finie ; convexité. Applications

Cadre : $\mathcal{E}$ est un espace affine réel de dimension n.

I Barycentres

[MER] Mercier, Géométrie pour le CAPES et l'agrégation.

1.1 Définitions et premières propriétés

DEF 1) Un point pondéré est un couple $(A,\lambda) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}$

2) Le barycentre de k points pondérés $\{(A_i,\lambda_i)\}_{i\in\{1..k\}}$ est défini pour $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \neq 0$ comme l'unique point $G \in \mathcal{E}$ tel que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

Remarque : C'est équivalent à $\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$ pour tout $O \in \mathcal{E}$. L'indépendance par rapport à O de cette relation permet d'écrire $G = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i$

Propriétés : On considère G précédemment défini. Alors

1) G est le barycentre des $\{(A_i, \alpha\lambda_i)\}_{i\in\{1..k\}}$ pour tout $\alpha \neq 0$
2) G est le barycentre des $\{(A_{\sigma(i)}, \lambda_{\sigma(i)})\}_{i\in\{1..k\}}$ pour toute permutation σ
3) Associativité : si $s = \sum_{i\in J} \lambda_i \neq 0$, et $g = \frac{1}{s}\sum_{i\in J} \lambda_i A_i$ alors G est le barycentre de $\{(A_i,\lambda_i)\}_{i \notin J} \cup \{(g,s)\}$

Def : L'isobarycentre de n points est le barycentre de ces points affectés tous du même coefficient non nul.

- L'isobarycentre de deux points est le milieu du segment défini par ces deux points

Applications : Points remarquables dans des figures géométriques

- Les médianes d'un triangle sont concourantes en l'isobarycentre des sommets.
- Les bissectrices d'un triangle ABC sont concourantes au centre du cercle inscrit. C'est le barycentre de $\{(A, BC), (B, AC), (C, AB)\}$
- L'isobarycentre des sommets d'un parallélogramme est le point d'intersection des diagonales
- L'isobarycentre des sommets d'un tétraèdre est le point d'intersection et le milieu des segments reliant les milieux de deux côtés opposés.

(cf Annexe)

1.2 Lien avec les espaces affines

Proposition : Le sous espace affine $\mathcal{E}$ engendré par une partie non vide $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ est l'ensemble des barycentres des points de $\mathcal{A}$

Corollaire : une partie non vide $F \subset \mathcal{E}$ est un sous espace affine si et seulement si elle est stable par barycentration

Exemple : - deux points A et B engendrent la droite (AB)

- trois points A, B et C non alignés engendrent le plan (ABC).

DEF / prop Coordonnées barycentriques.

$(A_0, \dots A_n) \in \mathcal{E}^{n+1}$ est une base affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots \overrightarrow{A_0A_n})$ est une base de $\vec{\mathcal{E}}$ espace vectoriel.

Pour $M \in \mathcal{E}$, il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\lambda_0, \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$ et $M = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i A_i$. Le $(n+1)$ uplet donne les coordonnées barycentriques de M dans le repère $(A_0, \dots A_n)$.

Interprétation en terme d'aire

Soit ABC un triangle donné, et M un point de son plan tel qu'il n'y ait pas trois points alignés.

def: L'aire algébrique du triangle MBC est son aire affectée du signe (+) si il a la même orientation que ABC, du signe (-) sinon.

Propriété: Dans le repère barycentrique (A,B,C), les aires algébriques des triangles MBC, MCA et MAB forment un système de coordonnées barycentrique de M.

II Convexité

2.1) Première approche

DEF • $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ est convexe si $\forall A,B \in \mathcal{A}^2$, $[AB] \in \mathcal{A}$

• Une combinaison convexe de n points est un barycentre à coefficients tous positifs.

Propriétés: • Si $\mathcal{A}$ est convexe, toute combinaison convexe de points de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}$.

• L'intérieur et l'adhérence d'une partie convexe est convexe.

• L'intersection de deux parties convexes est convexe.

Exemples de parties convexes:

- Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
- Les boules et les sous espaces d'un espace vectoriel normé sont convexes
- Un sous espace affine est un espace convexe.

DVP 1

Application:
Soit $\mathcal{E}$ un espace euclidien de dimension n et H un sous groupe compact de GL(E). Si K est un convexe compact de $\mathcal{E}$ tel que $u(K) \subset K$ pour tout $u \in H$, alors $\exists a \in K \mid u(a) = a$ pour tout $u \in H$

2.2) Enveloppe convexe et points extrémaux [TAU]
Tauvel, Géométrie

DEF Enveloppe convexe: Cv(A) est le plus petit convexe contenant tous les points de A

Propriété: Cv(A) est l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A.

Application Théorème de Lucas
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Alors toutes les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

DVP 2

Théorème de Carathéodory
Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$. Tout élément de $Cv(\mathcal{A})$ s'écrit comme combinaison convexe de K points de $\mathcal{A}$, avec $K \leq 1 + \dim \mathcal{E}$

Corollaire:
Si $\mathcal{A}$ est compact, alors Cv(A) aussi
Si $\mathcal{A}$ est borné, alors Cv(A) aussi et $\delta(\mathcal{A}) = \delta(Cv(\mathcal{A}))$

DEF: $\mathcal{A}$ est un convexe de $\mathcal{E}$.

• $M \in \mathcal{A}$ est un point extrémal si et seulement si
$M = tP + (1-t)Q$, $t \in [0,1]$ et $P,Q \in \mathcal{A} \Rightarrow M = P$ ou $M = Q$

• L'ensemble des points extrémaux est noté $Ext(\mathcal{A})$

Proposition Théorème de Krein Milman
Pour tout convexe compact non vide $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}$,
$\mathcal{A} = Cv(Ext(\mathcal{A}))$

Application : Démonstration du fait que l'enveloppe convexe de $O(n)$ dans $M_n(\mathbb{R})$ est la boule unité

2.3) Une caractérisation des convexes

Lemme : Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ non vide, $P \in \mathcal{E}$. $\delta = d(P, \mathcal{A})$

- Si $\mathcal{A}$ est fermé, il existe $A \in \mathcal{A}$ | $\delta = PA$.
- Si $\mathcal{A}$ est convexe, il existe au plus un $A \in \mathcal{A}$ tel que $\delta = AP$.

On va à présent démontrer une réciproque de ce lemme.

Corollaire (Projection)
Si $\mathcal{A}$ est un convexe fermé, il existe un unique $A \in \mathcal{A}$ tel que $\delta = AP$, appelé le projeté de P sur $\mathcal{A}$.

Propriété : Le projeté de P sur $\mathcal{A}$ est l'unique point B de $\mathcal{A}$ tel que $(\vec{BP}, \vec{PM}) \leq 0$ pour tout $M \in \mathcal{A}$

Lemme : Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ un fermé, $(P,Q) \in A^2$ $R \in]PQ[$ et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\overline{B(R,\rho)} \cap \mathcal{A} = \emptyset$.
Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des boules fermées S de $\mathcal{E}$ telles que $\mathring{S} \cap \mathcal{A} = \emptyset$ et $\overline{B(R,\rho)} \subset S$. Alors $\mathcal{F}$ admet un élément de rayon maximal.

Théorème de Motzkin
Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ fermée non vide. On suppose que pour tout $P \in \mathcal{E}$, il existe un unique $Q \subset \mathcal{A}$ tel que $PQ = d(P, \mathcal{A})$. Alors $\mathcal{A}$ est convexe.

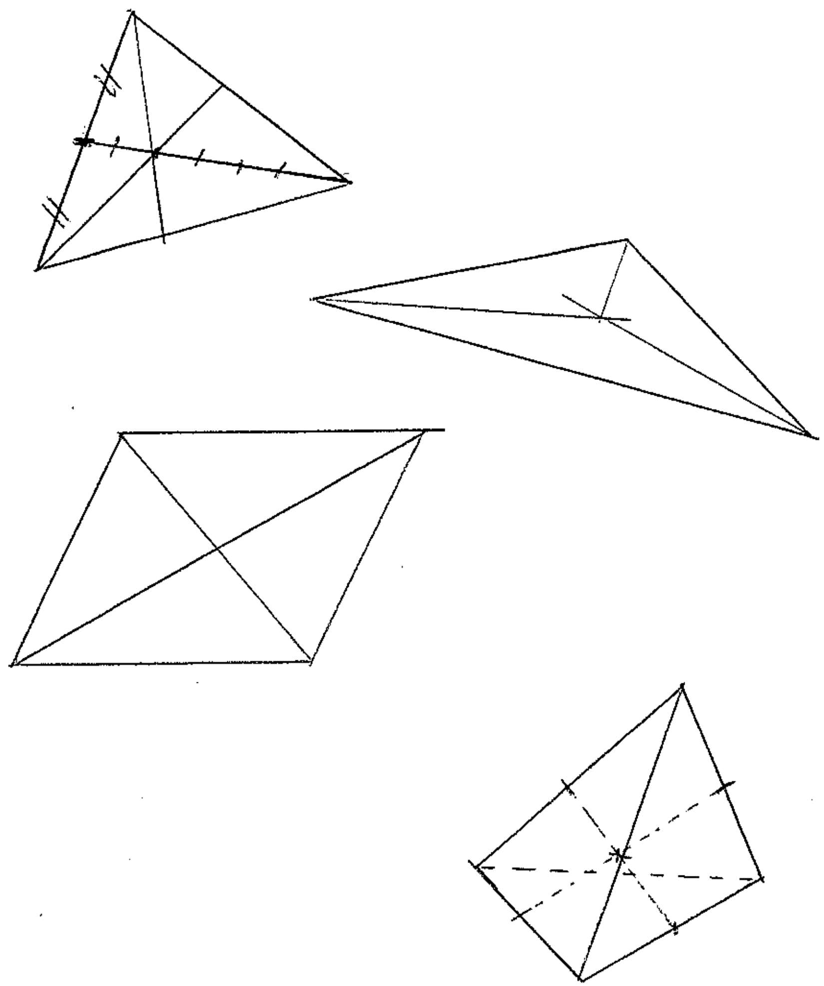
Contre exemple : si $\mathcal{A}$ est la sphère unité de $\mathcal{E}$, alors pour tout $P \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$, la propriété est vérifiée, cependant $\mathcal{A}$ n'est pas convexe.

2.4) Séparation des convexe

Théorème : Hahn Banach en dimension finie
Soit $\mathcal{A}$ un ouvert convexe non vide et $\mathcal{L}$ un sous espace de $\mathcal{E}$ tels que $\mathcal{A} \cap \mathcal{L} = \emptyset$. Alors, il existe un hyperplan H de $\mathcal{E}$ vérifiant $\mathcal{L} \subset H$ et $\mathcal{A} \cap H = \emptyset$.

DEF : Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des parties de $\mathcal{E}$ et H un hyperplan de $\mathcal{E}$
- H sépare $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ si $\mathcal{A}$ est contenu dans l'un et $\mathcal{B}$ dans l'autre des demi-espaces fermés déterminés par H
- H sépare strictement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ si les demi espaces ouverts séparent $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$

Application Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des convexes non vide disjoints de $\mathcal{E}$.
(i) si $\mathcal{A}$ est ouvert, il existe un hyperplan séparant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$
(ii) si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont ouverts, il existe un hyperplan les séparant strictement
(iii) si $\mathcal{A}$ est compact et $\mathcal{B}$ fermé, il existe un hyperplan séparant strictement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$
(iv) si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont fermés, il existe un hyperplan qui les sépare.



2

Tisseron: Géométrie affine, euclidienne et projective