181 (I) Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications

Cadre : $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension finie n
E l'espace vectoriel associé
I un ensemble fini d'indices

I. Barycentres

1) Définitions

Déf 1 : Un système de points pondérés est une suite finie de $\mathcal{E}\times K$. On note $((A_i, \alpha_i))_{i\in I}$.

Déf 2 : Fonction scalaire de Leibniz, vectorielle de Leibniz, pour $(A_i,\alpha_i)_{i\in I}$

$\varphi_s : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$, $M \mapsto \sum_{i\in I} \alpha_i MA_i^2$ $\qquad$ $\varphi_v : \mathcal{E} \to E$, $M \mapsto \sum_{i\in I} \alpha_i \vec{MA_i}$

Prop 3 : Deux cas sont possibles.
→ $\sum_{i\in I} \alpha_i = 0$, alors φ_v est constante
→ $\sum_{i\in I} \alpha_i \neq 0$, alors il existe G un point, unique, tel que $\varphi_v(G) = \vec{0}$.

Déf 4 : G est le barycentre de $((A_i,\alpha_i))_{i\in I}$, noté $bary((A_i,\alpha_i))$.

Déf 5 : Si α_i est indépendant de i, G est l'isobarycentre des $\{A_i, i\in I\}$.

Ex 6 : L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu de [AB].
L'isobarycentre de A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC.

Rq 7 : La notion de barycentre correspond à la notion physique de centre de gravité.

Prop 8 : Caractérisation du barycentre. Sont équivalentes :
a) $G = bary((A_i,\alpha_i))_{i\in I}$
b) $\sum_{i\in I} \alpha_i \vec{GA_i} = \vec{0}$
c) Il existe un point M tel que $\left(\sum_{i\in I}\alpha_i\right)\vec{MG} = \sum_{i\in I}\alpha_i \vec{MA_i}$.
d) Pour tout point M, on a $\left(\sum_{i\in I}\alpha_i\right)\vec{MG} = \sum_{i\in I}\alpha_i \vec{MA_i}$.

2) Propriétés $\quad G = bary((A_i,\alpha_i))_{i\in I}$

Prop 9 : Homogénéité : Pour tout scalaire λ non nul, $G = bary((A_i,\lambda\alpha_i))_{i\in I}$

Prop 10 : Commutativité : Pour σ une permutation de $\mathfrak{S}^I$,
$G = bary((A_{\sigma(i)},\alpha_{\sigma(i)}))_{i\in I}$

Prop 11 : Associativité : Soit $J \subset I$ tel que $\sum_{j\in J}\alpha_j \neq 0$, $B = bary(A_j,\alpha_j)_{j\in J}$
$G = bary\left((A_i,\alpha_i)_{i\in I\setminus J}, (B, \sum_{j\in J}\alpha_j)\right)$.

Application 12 : Place des points remarquables du triangle
a) Le centre de gravité d'un triangle est l'intersection des médianes.
b) le centre de gravité d'un tétraèdre est l'intersection des droites joignant les milieux des côtés opposés.

3) Lien avec les sous-espaces affines.

Thm 13 : Caractérisation des applications affines.
Soit f une application entre deux espaces affines de même dimension.
f est une application affine ssi elle conserve les alignements
ssi elle conserve les barycentres.

Prop 14 : Soit $S \subset \mathcal{E}$. Le sous-espace affine engendré par S est l'ensemble des barycentres des points de S.

Coro 15 : S est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ ssi S est stable par barycentration.

4) Repérage

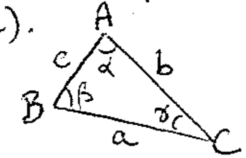
Déf 16 : Soient $(A_0,\dots,A_n) \in \mathcal{E}^n$. $(A_0,\dots,A_n)$ est un simplexe, ou repère affine, ou repère barycentrique ssi $(\vec{A_0A_1},\dots,\vec{A_0A_n})$ est une base de E.

Rq 17 : $(A_0,\dots,A_n)$ sert alors de base à l'espace affine $\mathcal{E}$.

Déf 18 : $(\alpha_0,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ est un système de coordonnées barycentriques de $M \in \mathcal{E}$ ssi $M = bary((A_i,\alpha_i))_{i\in I}$

Rq 19 : les coordonnées barycentriques sont définies à scalaire non nul près. Par homogénéité, on peut normaliser à $\sum_{i\in I}\alpha_i = 1$.
On a alors unicité des coordonnées.

Ex 20 : Coordonnées barycentriques de points remarquables du triangle ABC, dans le repère (A, B, C).
a) centre de gravité (1,1,1)
b) orthocentre $(\tan\alpha, \tan\beta, \tan\gamma)$
c) centre du cercle inscrit (a,b,c)



Application 21 : <u>Aire algébrique</u>. Soit ABC un triangle non plat, M un point tel qu'il n'y ait pas trois points alignés.

<u>Déf 21-1</u> : L'aire algébrique du triangle MBC est son aire affectée du signe $\oplus$ s'il a même orientation que ABC, $\ominus$ sinon.

<u>Prop 21-2</u> : Dans le repère barycentrique (A,B,C), les aires algébriques des triangles MBC, MCA et MAB forment un système de coordonnées barycentriques de M.

II. Convexité

1) Enveloppe convexe

<u>Déf 22</u> : Le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres de $((A,\lambda),(B,1-\lambda))$ pour $\lambda \in [0,1]$.

<u>Déf 23</u> : Une partie $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ est convexe <u>ssi</u> pour tous points A, B de $\mathcal{C}$, $[AB] \subset \mathcal{C}$.

<u>Prop 24</u> : $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ est convexe <u>ssi</u> $\mathcal{C}$ est stable par passage au barycentre.

<u>Prop 25</u> : Une intersection quelconque de convexes est convexe.

<u>Prop 26</u> : La somme de Minkowski $S+T$ de deux convexes est convexe.
Le produit cartésien de deux convexes est convexe.

<u>Prop 27</u> : L'image directe et l'image réciproque d'un convexe par une application affine sont convexes.

<u>Déf 28</u> : L'enveloppe convexe d'une partie $S \subset \mathcal{E}$ est l'intersection des convexes contenant S. C'est le plus petit convexe contenant S. On le note $\mathrm{Conv}(S)$.

<u>Prop 29</u> : L'enveloppe convexe de S est l'ensemble des barycentres à poids positifs des points de S.

<u>Thm 30</u>. <u>Carathéodory</u>. L'enveloppe convexe de $S \subset \mathcal{E}$ (non vide) est l'ensemble des barycentres à poids positifs d'au plus $n+1$ points de S.

Rq : On ne peut pas fixer $n+1$ points a priori :

en dim 2, 3 points ont pour enveloppe convexe un triangle, ce qui ne suffit pas dans le cas ci-dessus.

<u>Coro 31</u> : L'enveloppe convexe d'un compact est compacte.

DEV ★ Appli 31 bis.
Tout ss grp compact de $Gl_n(\mathbb{R})$ est conjugué à $O_n(\mathbb{R})$ ou ss grp

<u>Application 32</u> : <u>Théorème de Gauss-Lucas</u>.
Soit P un polynôme non constant à coefficients complexes.
★ Toute racine de P' est dans l'enveloppe convexe des racines de P.

<u>Application 33</u> : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule
★★ unité de $M_n(\mathbb{R})$ pour la norme subordonnée à la norme euclidienne.

2) <u>Topologie</u>

<u>Prop 34</u> : Tout convexe est connexe.

<u>Prop 35</u> : Si $\mathcal{C}$ est un convexe d'intérieur non vide, alors l'adhérence de $\mathcal{C}$ et l'intérieur de $\mathcal{C}$ sont des convexes de même intérieur et de même adhérence que $\mathcal{C}$.

<u>Prop 36</u> : - Toute droite passant par l'intérieur d'un convexe compact rencontre sa frontière en deux points
- Tout convexe compact est l'enveloppe convexe de sa frontière

<u>Thm 37</u> : <u>Helly</u>. Soit I un ensemble contenant au moins $n+2$ éléments, $\mathcal{F} = (A_i)_{i \in I}$ une famille de convexes telle que pour tout $J \subset I$ de cardinal $n+1$, $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$.
Alors, si les A_i sont compacts, ou si I est fini, $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

<u>Application 38</u> : Tout ensemble fini de segments du plan, admettant trois à trois une sécante commune, admet une sécante commune.

3) <u>Hyperplans</u>

<u>Déf 39</u> : Soit $\mathcal{C} \in \mathcal{E}$ un convexe. $\mathcal{H}$ est un hyperplan d'appui pour $\mathcal{C}$ <u>ssi</u> $\mathcal{H}$ contient un point de $\mathcal{C}$ ∪ $\mathcal{H}$ délimite un demi-espace fermé contenant $\mathcal{C}$.

<u>Thm 40</u> : <u>Projection sur un convexe fermé</u>
Soient $\mathcal{C}$ un convexe fermé non vide et A un point de $\mathcal{E} \setminus \mathcal{C}$.
1. Il existe un unique point P, projeté de A sur $\mathcal{C}$ tel que $PA = d(A, C)$
2. L'hyperplan contenant P et orthogonal à $\overrightarrow{PA}$ est un hyperplan d'appui qui sépare A et $\mathcal{C}$.

DEV ★★ Appli 32 bis.
$P \in \mathbb{C}[X]$ $n = \deg P$. (Bernstein)
$\sup\{|P'(z)| \,;\, |z| \leq 1\} \leq n \sup\{|P(z)|, |z| \leq 1\}$

Rq 41 : $\mathcal{C}$ fermé donne l'existence du projeté
$\mathcal{C}$ convexe donne l'unicité d'un tel point.

Coro 42 : Un convexe fermé est l'intersection des demi-espaces fermés le contenant.

Thm 43 : Motzkin.
Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ une partie fermée non vide.
Si pour tout point $A \in \mathcal{E}$, il existe un unique point $P \in \mathcal{C}$ tel que $AP = d(A, \mathcal{C})$, alors $\mathcal{C}$ est convexe !

Thm 44 : Hahn Banach géométrique
Soit $\mathcal{C}$ un convexe ouvert non vide
$\mathcal{L}$ un sous-espace de $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{C} \cap \mathcal{L} = \emptyset$.
Alors il existe un hyperplan $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$ tel que
$\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ et $\mathcal{C} \cap \mathcal{H} = \emptyset$.

Déf 45 : Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ des parties de $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathcal{E}$.
- $\mathcal{H}$ sépare $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ si $\mathcal{C}_1$ est contenu dans l'un et $\mathcal{C}_2$ dans l'autre demi-espace fermé délimités par $\mathcal{H}$
- $\mathcal{H}$ sépare strictement $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ si les demi-espaces ouverts séparent $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Application 46. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ des convexes non vides disjoints
a) $\mathcal{C}_1$ ouvert $\Rightarrow$ il existe un hyperplan séparant $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$
b) $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ouverts $\Rightarrow$ il existe un hyperplan les séparant strictement
c) $\mathcal{C}_1$ compact et $\mathcal{C}_2$ fermé $\Rightarrow$ il existe un hyperplan les séparant strictement
d) $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ fermés $\Rightarrow$ il existe un hyperplan les séparant.

4) Points extrémaux

Déf 47 : Soit $\mathcal{C}$ un convexe et $M \in \mathcal{E}$.
M est extrémal si M n'est pas combinaison non triviale de points de $\mathcal{C}$.

Déf 48 : On note $Ext(\mathcal{C})$ l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{C}$.

Prop 49 : Soit M un point d'un convexe $\mathcal{C}$. Sont équivalentes
a) M est extrémal
b) $\mathcal{C} \setminus \{M\}$ est convexe
c) M n'est pas contenu dans un segment d'extrémités dans $\mathcal{C}$ et distinctes de M.

Thm 50 : Krein-Millman.
Tout convexe compact est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Rq 51 : le théorème de Krein Millman donne l'existence de points extrémaux d'un compact convexe.

Ex 52 : $O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des points extrémaux de la boule unité de $M_n(\mathbb{R})$.

Références

Mercier, Cours de géométrie, Préparation au CAPES et à l'agrégation
Tauvel, Géométrie
Berger, Géométrie
Goblot, Thèmes de Géométrie
Szpirglas, Algèbre L3.