

Motivation: Ut l'origine, problème en cartographie; g a-t-il des applications d'une droite (l'axe) sur un plan (cercle) qui conservent les longueurs? Non. Mais peut-être possible en ce qui concerne les angles.

I Géométrie euclidienne.

1) Dans le plan complexe.

Soit E le plan complexe affine et \bar{E} le plan complexe vectoriel. Chaque point A, B, C, D ou Z du plan E sera représenté par son affixe a, b, c, d ou z .

Def 1: Une droite définie par un point $A \in E$ et un vecteur $\vec{u} \in \bar{E}$ est $\{Z \in E \mid Z = a + \lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Def 2: Un cercle de rayon R et de centre O :

$$\{Z \in E \mid |Z - O|^2 = R^2\}$$

Application: L'ensemble des points $\pi \in E$ tels que $(\overline{\pi A}, \overline{\pi B}) = \theta [\pi]$ est une droite si $\theta = 0$ (π), et un cercle sinon.

Une condition nécessaire et suffisante pour que 3 points A, B et C soient alignés.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \end{pmatrix} = 0$$

Def 3: Le barycentrage de 4 points distincts A, B, C, D est:

$$\begin{aligned} \Gamma(A, B, C, D) &= a - c/b - d \\ &= a - d/b - c \end{aligned}$$

Th 4: 4 points sont cocycliques ou alignés ssi:

$$\Gamma(A, B, C, D) \in \mathbb{R}$$

Corollaire (Th de Ptolemée): 5: Un quadrilatère (A, B, C, D) est inscriptible dans un cercle ssi:

$$|c-a| \cdot |b-d| = |a-d| \cdot |b-c| + |a-b| \cdot |c-d|$$

2) Applications sur un \mathbb{C} -espace vectoriel.

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire de dimension n .

Def 6: $GL(E)$, l'ensemble des applications linéaires bijectives de E dans E , est un groupe.

Un point de vue matriciel, $u \in GL(E)$ si la matrice associée à u est un déterminant non nul.

Def 7: Soit $u \in GL(E)$ et est une isométrie linéaire si $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$. On note $U(E)$ l'ensemble des applications vérifiant cette condition.

Prop 8: Si $u \in U(E)$, alors $\det u \in \mathbb{C} \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

De plus $U(E)$ est un sous-groupe compact et connexe par arcs de $GL(E)$.

II Espace projectif sur le corps des complexes.

1) Espace projectif.

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie $n+1$.

Def 9: L'espace projectif associé à E , noté $\mathbb{P}(E)$, est:

$$\mathbb{P}(E) = E \setminus \{0\} / \sim, \text{ où } x \sim y \text{ ssi } \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{, } x = \lambda y$$

On notera $\pi: E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(E)$ la projection d'un élément non nul sur sa classe.

Rem: $\mathbb{P}(E)$ est aussi l'ensemble des droites vectorielles de E .

On pourra noter $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}) = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.

De plus, on définit la dimension: $\dim P(E) = \dim E - 1$

Exemples: $P^0(E)$ est un point projectif.

$P^1(E)$ est une droite projective.

Comment définir une base de l'espace projectif? Ici (e_0, \dots, e_n) est une base de E , alors $(p(e_0), \dots, p(e_n))$ n'est pas une donnée suffisante pour retrouver la base initiale (à un scalaire près). En ajoute donc un point.

Def 10. Un repère projectif est un système de points $\{P_0, \dots, P_{n+1}\}$ de $P(E)$ tel qu'il existe une base (e_0, \dots, e_n) de E et $\forall 0 \leq i \leq n, P_i = p(e_i)$ et $P_{n+1} = p(e_0 + \dots + e_n)$.

Exemple. Un repère projectif de $P_2(E)$ est constitué de trois points, comme: $(P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ (où $E \simeq \mathbb{R}^3$).

Def 11. Soient E et F deux espaces vectoriels, et $u: E \rightarrow F$ une application linéaire injective. Soit u induit une application $P(u)$ telle que $P(u) \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(e) \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit u est bijective, $P(u)$ est appelée une homographie.

Prop 12. Si $u, v \in GL(E)$, alors $P(u \circ v) = P(u) \circ P(v)$.

Ensemble des homographies de $P(E)$, noté $PG(E)$, est groupe.

Prop 13. Soient $P(E)$ et $P(E')$ deux espaces projectifs de dim n , avec pour repères projectifs respectifs (P_0, \dots, P_n) et (P'_0, \dots, P'_n) . Il existe une unique homographie $h: P(E) \rightarrow P(E')$ telle que $\forall i, h(P_i) = P'_i$.

Th 14. $PG(L(E)) \simeq GL(E)/\mathbb{C}^*$

2) Etude de $P_2(\mathbb{C})$ (voir annexes).

Soit $S^2 :=$ sphère euclidienne de \mathbb{R}^3 , $N :=$ pôle nord de S^2 .

On identifie \mathbb{C} à $\{(x, y, 0) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$. On peut

définir la projection stéréographique $\pi: S^2 \setminus N \rightarrow \mathbb{C}$

Elle est continue, et on peut la prolonger par: $\pi(N) = \infty$, $S^2 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est la sphère de Riemann.

Prop 15. $P_2(\mathbb{C}) \simeq S^2$.

En effet, on a les bijections: $P^{-1}: S^2 \rightarrow P_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \xrightarrow{\pi^{-1}} S^2$

$\lambda \begin{pmatrix} y & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \mapsto \infty \mapsto N$

$\lambda \begin{pmatrix} z & 1 \\ 1 & z \end{pmatrix} \mapsto \frac{z+1}{1-\bar{z}}$ $\mapsto \pi^{-1} \left(\frac{z+1}{1-\bar{z}} \right)$

Def 16. Soient A, B, C, D distincts de $P_2(\mathbb{C})$. Soit h l'unique homographie qui envoie A, B, C sur $(\infty, 0, 1)$.

Le birapport de A, B, C, D est $[A, B, C, D] := h(D)$.

Prop 17. Les homographies conservent le birapport.

III Des applications sur le plan complexe et sur S^2 .

1) Applications conformes.

On pourra considérer $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 = \{\mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R} \cdot i\}$. D'où \mathbb{C} de \mathbb{C} .

Def 18. Une fonction $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, qui est \mathbb{R} -linéaire et injective, préserve les angles si:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, |x||y| \langle Tx, Ty \rangle = |Tx||Ty| \langle x, y \rangle.$$

Lemma 23: Soit $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ linéaire injective. On a équivalences

- 1) T préserve les angles
- 2) $\exists \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tel que $T\gamma = \alpha\gamma$ (homothétie) ou $T\gamma = \alpha\bar{\gamma}$
- 3) $\exists \lambda > 0, \forall (w, \eta) \in \mathbb{C}^2, \angle T\gamma, T\omega = \lambda \angle \gamma, \omega$.

Supposons f différentiable en c . On note

$$f(\gamma) = f(c) + T(\lambda) + R(f(\gamma)), \text{ où } \gamma = \lambda + c, \text{ avec } f'(c): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ continue et } T \text{ } \mathbb{R}\text{-linéaire}$$

Def 20: $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ est conforme si elle est holomorphe et si T_f préserve les angles.

Th 21: Si $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe et $\forall c \in D, f'(c) \neq 0$, alors f est conforme.

Interpretation géométrique (voir annexe 2): si γ_1 et γ_2 sont deux chemins de D , tel que $\gamma_1(t_1) = c = \gamma_2(t_2)$, alors

$$\angle \gamma_1'(t_1), \gamma_2'(t_2) = \angle \frac{\partial \text{Re} \gamma_1(t_1)}{\partial t}, \frac{\partial \text{Re} \gamma_2(t_2)}{\partial t}$$

Exemples d'applications conformes.

- immersion en \mathbb{R}^2 de puissance $k: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$

- similitudes de \mathbb{C} , définies par $\gamma \mapsto a\gamma + b$, où $a \neq 0$.

Def 22: Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$. On définit.

$$h_A(\gamma) = \frac{a\gamma + b}{c\gamma + d}, \text{ sur } \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}, \text{ c'est on a } h_A^{-1}(\gamma) = \frac{d\gamma + b}{c\gamma + d}$$

Prop 23: On a $h_A^{-1} \circ h_A = \text{Id}$ et $\{h_A, A \in GL_2(\mathbb{C})\} = PGL_2(\mathbb{C})$

De plus, h_A est holomorphe et $h_A|_{\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}}$ est conforme.

Def 24: $GL_2(\mathbb{C})$ permet de définir les similitudes complexes $\gamma_A: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$ par $\gamma_A \mapsto \frac{a\gamma + b}{c\gamma + d}$.

Def 25: Les homographies et les similitudes complexes sont le type simple universel.

Th 26: Les applications du groupe complexe sont exactement les bijections de \mathbb{R}^2 qui préservent les droites et les cercles. DVT

2) Étude des homographies.

Def 27: Soit h une homographie. h est dite circulaire si $h \circ \gamma = \gamma$.

Prop 28: Une homographie a un ou deux points fixes.

Prop 29: $PGL_2(\mathbb{C})$ est engendré par l'immersion $\gamma \mapsto \frac{z}{z}$ et les similitudes $\gamma \mapsto a\gamma + b$ (où $a \neq 0$).

On définit le demi-plan de Poincaré:

$$S = \{ \gamma \in \mathbb{C} : \text{Im}(\gamma) > 0 \}.$$

Th 30: $SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par deux éléments:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ On se voit en faisant agir}$$

$SL_2(\mathbb{Z})$ sur S par l'action définie par les homographies

Def 31: Les automorphismes de D sont les applications $h: D \rightarrow D$ holomorphes et d'inverse holomorphe. On note cet ensemble $\text{Aut}(D)$, c'est un groupe.

Th (MOMSI): Tout auto-omorphisme de D est une similitude.

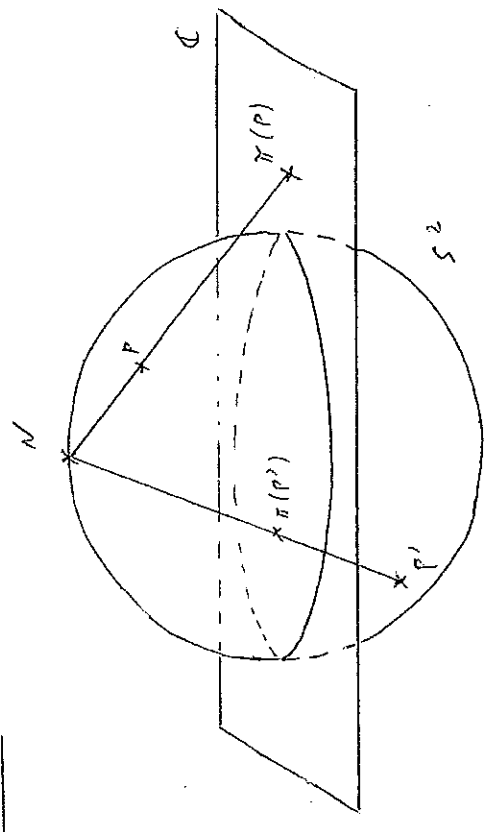
Th 32: $\text{Aut}(S^2) = PGL_2(S^2)$.

Lemma 33: Soit $P \in X$ et $Q \in Y$. Soit σ agit transitivement sur X et que σ agit sur Y tel que $P \sigma = \{ \sigma \in N, \sigma \cdot a = a \} \subset G$, alors $G = P \cdot N$. P est appelé le groupe d'isotropie de a .

Lemma 34: Soit un homomorphisme de S^2 laissant fixe le point ∞ est une similitude.

DVT

Annexe 1.



Projection de S^2 sur C

Annexe 2.

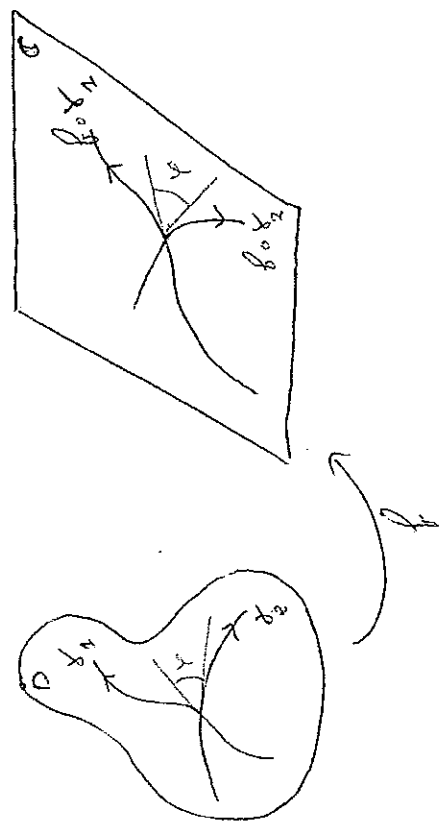


Illustration des conséquences d'une application continue

Références:

Motivation : Remmert; Theory of complex numbers.

I 1) Enigman; La géométrie des nombres complexes.
 Atiyah; La leçon de géométrie à l'école de l'agrégation.
 2) Cisseron; Géométrie affine, projective et euclidienne.

II 1) Lamuel; Géométrie projective.

2) Audin; Géométrie.

III 1) Remmert, Audin (+ dot).

2) Amar Abukhoron, Analyse complexe.
 Alessandri; Chimie de géométrie (dot).

Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré.

Référence : M. Alessandri, *Thèmes de géométrie; Groupes en situation géométrique*

On appelle *demi-plan de Poincaré* l'ensemble $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$.

On fait agir $SL_2(\mathbb{Z})$ sur P par l'action dite par homographie :

$$\forall A \in SL_2(\mathbb{Z}), \forall z \in P, A * z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

On appelle également S et T les matrices

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, on appelle *groupe modulaire* le groupe

$$PSL_2(\mathbb{Z}) = \{SL_2(\mathbb{Z})\} / \{\pm I\}.$$

On fait agir ce groupe sur P de la même manière que $SL_2(\mathbb{Z})$. On remarquera que cette action est fidèle (seul le neutre fixe tous les points).

On cherche à montrer

Théorème 1. *Le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par S et T .*

Preuve. *On note G le sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$ engendré par S et T . Le but est de montrer que $G = SL_2(\mathbb{Z})$. On commence par la recherche d'un domaine "fondamental" pour l'action du groupe spécial. Soit D l'ensemble*

$$D = \left\{ z \in P \mid |z| \geq 1 \text{ et } |\text{Re}(z)| \leq \frac{1}{2} \right\},$$

Lemme. *On fait agir G sur P via l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$. Alors, pour cette action, toutes les orbites rencontrent le domaine D .*

Preuve. *On se fixe $z \in P$. On va construire un point de P qui est dans D à partir de z ; pour cela, on va considérer un point de l'orbite "d'altitude" maximale, puis le translater.*

On remarque qu'il n'y a qu'un nombre fini de couples $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|cz + d| \leq 1$. En effet

$$|c|\text{Im}(z) = |\text{Im}(cz + d)| \leq |cz + d| \leq 1,$$

et donc $|c| \leq 1/\text{Im}(z)$ et $|d| \leq 1 + |c||z|$.

Or, pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans G ,

$$\text{Im}(A * z) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2}.$$

Donc le nombre de couples (c, d) vérifiant $\text{Im}(A * z) \geq \text{Im}(z)$ est fini, et il existe $A_1 \in G$ telle que $\text{Im}(A_1 * z)$ soit maximal. On appelle $z_1 = A_1 * z$.

Soit n la partie entière de $\text{Re}(z_1) + 1/2$.

Comme pour tout u de P , on a $T * u = u + 1$, on a :

$$-\frac{1}{2} \leq \text{Re}(z_1) - n \leq \text{Re}(z_1 - n) \leq \text{Re}(T^{-n} * z_1) \leq \frac{1}{2},$$

avec $\text{Im}(T^{-n} * z_1) = \text{Im}(z_1)$.

En posant $z_2 = T^{-n} * z_1$, il ne nous reste plus qu'à montrer $|z_2| \geq 1$.

C'est vrai car sinon, $\text{Im}(S * z_2) = \frac{\text{Im}(z_2)}{|z_2|^2}$, ce qui contredit la maximalité de $\text{Im}(z_2)$.

On cherche maintenant à étudier, pour $z \in D$ fixé, les matrices A de $SL_2(\mathbb{Z})$ telles que $A * z \in D$.

Fixons-nous donc $z \in D$, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $SL_2(\mathbb{Z})$ tels que $A * z \in D$.

Lemme. A est une matrice de G .

Preuve. On peut se restreindre au cas où $\text{Im}(A * z) \geq \text{Im}(z)$, i.e $|cz + d| \leq 1$: sinon $\text{Im}(A * z) < \text{Im}(A^{-1} * (A * z))$ et donc on peut faire la même étude pour A^{-1} .

D'après les calculs qu'on a fait plus haut, on a

$$|c| \leq \frac{1}{\text{Im}(z)} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} < 2$$

et donc $c \in \{-1, 0, 1\}$.

Cas $c = 0$: On a $\det(A) = ad = 1$, et donc, quitte à changer A et $-A$ (ce qui ne change pas l'action de A), on a $a = d = 1$, et donc $A * z = z + b$. Regardons où est z dans D .

- Si $|\text{Re}(z)| < \frac{1}{2}$, alors $b = 0$ et donc $A = \pm I$.
- Si $|\text{Re}(z)| = -\frac{1}{2}$, alors $b = 0$ ou 1 , et donc $A = \pm I$ ou T .
- Si $|\text{Re}(z)| = \frac{1}{2}$, alors $b = 0$ ou -1 , et donc $A = \pm I$ ou T^{-1} .

Cas $c = 1$: La condition $|z + d| \leq 1$ n'offre que trois possibilités (dessiner D) :

- (i) $d = 0$;

(ii) $z = j$ et $d = 1$;

(iii) $z = -\frac{1}{j}$ et $d = -1$.

(i) On a $\det(A) = -b = 1$, et $A * z = a - \frac{1}{z}$.

Comme de plus, $|z| \leq 1$ et $z \in D$, nécessairement $|z| = 1$, et donc $-\frac{1}{z}$ et le symétrique de z par rapport à l'axe des imaginaires. $a - \frac{1}{z}$ est donc dans D seulement si

- $a = 0$

- $z = j$ et $a = -1$

- $z = -\frac{1}{j}$ et $a = 1$

Ces trois possibilités mènent à

- $A = S$

- $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (ST)^2$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = TS.$

(ii) $\det(A) = a - b = 1$ et

$$A * z = \frac{aj + (a - 1)}{j + 1} = a + j,$$

qui est dans D seulement si $a = 0$ ou $a = 1$, ce qui mène à

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = ST \text{ ou } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = TST.$$

(iii) On conclut de la même façon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (TS)^2 \text{ ou } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = TST.$$

On se ramène à $c = 1$ en changeant A en $-A$.

On peut maintenant terminer la preuve :

Le cas où z est dans l'intérieur de D ne se rencontre que dans le cas $c = 0$, et impose $A = \pm I$.

Soit A une matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$. Notons $z' = A * z \in P$. Alors par le lemme Reflem :1, il existe $B \in G$ telle que $B * z' \in D$, i.e $(BA) * z \in D$.

On a donc $BA = \pm I$, i.e $A = \pm B^{-1}$. Comme $-I = S^2$ est dans G , on a bien $A \in G$, et par suite $G = SL_2(\mathbb{Z})$, ce qui conclut la démonstration.

Le groupe circulaire

Référence : M. Audin, *Géométrie*

On voit ici la droite projective complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ comme le plan \mathbb{C} muni d'un point à l'infini. Le but est de prouver

Théorème 1. *Notons G le groupe engendré par les homographies et la conjugaison complexe. Le groupe circulaire G est exactement l'ensemble des bijections de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sur lui-même préservant la famille des cercles et des droites.*

On sait que les homographies préservent cette famille, puisqu'elles préservent le birapport, et puisque le birapport de quatre points est réel si, et seulement si, ils sont alignés ou cocycliques. Comme il est clair que la conjugaison complexe préserve également la famille des cercles et des droites (en tant que symétrie par rapport à l'axe réel), le sens direct est démontré.

Réciproquement, considérons ϕ une bijection de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sur lui-même préservant l'ensemble des cercles ou droites. On veut montrer que ϕ appartient à G , donc quitte à composer ϕ par une homographie, on peut supposer que $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$ et $\phi(\infty) = \infty$, et cette troisième condition implique que ϕ conserve séparément la famille des cercles et celle des droites. En effet, les droites contiennent toutes le point ∞ , et aucun cercle ne le contient.

0.0.1 ϕ préserve les divisions harmoniques

On va montrer que ϕ conserve les divisions harmoniques. On rappelle que a, b, c et d sont en division harmonique si $[a, b, c, d] = -1$. Un cas particulier que l'on utilisera dans la suite est que

$$[a, b, c, \infty] = -1 \Leftrightarrow c = \frac{a+b}{2}$$

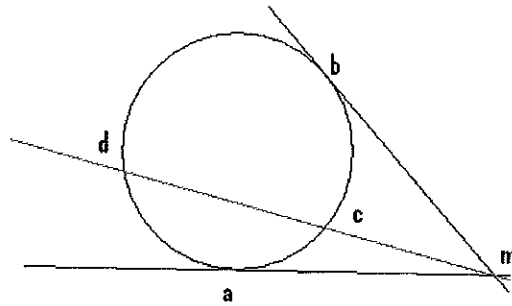
Cette partie du développement fait appel au lemme suivant :

Lemme. *Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. La construction de l'unique point $d \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tel que a, b, c et d soient en division harmonique s'exprime uniquement en matière d'intersection et de tangence de droites et de cercles.*

Preuve. *On se donne trois points $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. Deux cas se posent : les points sont alignés ou cocycliques. Nous donnerons à chaque fois la méthode de construction*

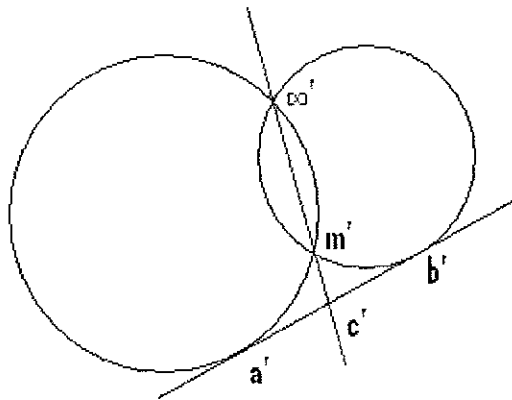
du point d , que nous justifierons ensuite.

Cas des points cocycliques :



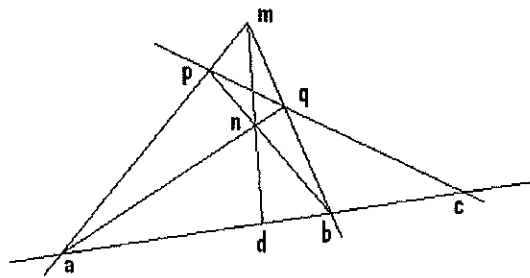
Considérons le point m issu des tangentes à a et b (qui peut éventuellement être égal à ∞ si les tangentes sont parallèles). La seconde intersection de la droite (mc) avec le cercle est d .

Justifions que les points sont bien en division harmonique. On envoie d à l'infini par une homographie.



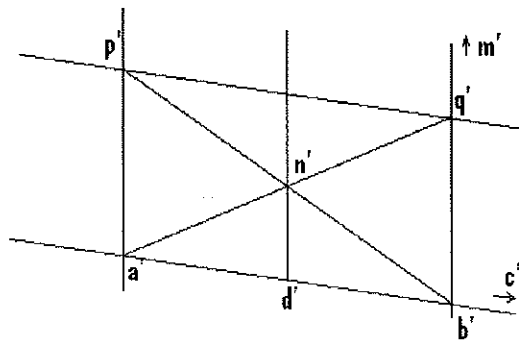
On remarque alors que c' est le milieu de $[a'b']$ car il coupe l'axe radical des deux cercles sur une tangente commune. Il ne reste plus qu'à appliquer la conservation du birapport. Enfin, si $m = \infty$, alors la droite rouge devient la tangente commune aux deux cercles, et est encore leur axe radical.

Cas des points alignés :



On choisit un point m en dehors de la droite (ab) , et on trace une droite issue de c coupant $[am]$ et $[bm]$. On peut alors tracer la droite (mn) , où n est le centre du quadrilatère qu'on vient d'obtenir. (mn) coupe (ab) en d .

Pour justifier que les points sont en division harmonique, on envoie, dans $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ cette fois, la droite (mc) à l'infini par une homographie.



Alors, (am) et (bm) deviennent parallèles, le quadrilatère est donc un parallélogramme, ses diagonales se coupent par conséquent en leur milieu et d est le milieu de $[ab]$. On a alors $[a', b', c', d'] = [a', b', d', c']^{-1} = [a', b', d', \infty]^{-1} = -1$. On conclut à nouveau par conservation du birapport, qui donne que le birapport des quatre points vaut -1 , comme birapport de quatre points d'une droite projective réelle, qui coïncide avec celui des points vu dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, ce qui donne le résultat.

Maintenant, ϕ préserve la tangence et l'intersection par injectivité, et préserve les cercles et les droites. Donc ϕ préserve les divisions harmoniques.

0.0.2 ϕ est un automorphisme de corps

Il reste à voir :

Proposition 0.0.1. *Soit ϕ de \mathbb{C} dans \mathbb{C} qui fixe 0 et 1 et préserve les divisions harmoniques, alors ϕ est un automorphisme de corps de \mathbb{C} .*

En effet, le résultat en découle puisque ϕ envoie une droite sur une droite et préserve 0 et 1, donc elle préserve \mathbb{R} . Or les seuls automorphismes de \mathbb{C} qui préservent \mathbb{R} sont l'identité et la conjugaison complexe, qui appartiennent tout deux à G .

Preuve. *Considérons $a, b \in \mathbb{C}$. ϕ conserve les divisions harmoniques donc les milieux. Donc*

$$\phi\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\phi(a) + \phi(b)}{2}.$$

On en déduit $\phi(a) = 2\phi\left(\frac{a}{2}\right)$ en prenant $b = 0$, ce qui donne

$$\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b).$$

On en déduit que $\phi(-a) = -\phi(a)$.

$\forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, remarquons que

$$[a, -a, a^2, 1] = \frac{\frac{1+a}{1-a}}{\frac{a^2+a}{a^2-a}} = \frac{\frac{1+a}{1-a}}{-\frac{1+a}{1-a}} = -1$$

Les points $a, -a, a^2$ et 1 étant en division harmonique, on a

$$\begin{aligned} [\phi(a), -\phi(a), \phi(a^2), 1] &= [\phi(a), \phi(-a), \phi(a^2), \phi(1)] = [a, -a, a^2, 1] \\ &= -1 = [\phi(a), -\phi(a), \phi(a)^2, 1] \end{aligned}$$

Donc

$$[\phi(a), -\phi(a), \phi(a^2), 1] = [\phi(a), -\phi(a), \phi(a)^2, 1].$$

Par unicité du birapport, on conclut que $\phi(a^2) = \phi(a)^2$ (ce résultat reste vrai si $a = 0$ ou 1)

Pour finir, remarquons que $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. Donc

$$\begin{aligned}\phi(ab) &= \phi\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right) \\ &= \phi\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right) - \phi\left(\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right) \\ &= \left(\phi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 - \left(\phi\left(\frac{a-b}{2}\right)\right)^2 \\ &= \left(\frac{\phi(a) + \phi(b)}{2}\right)^2 - \left(\frac{\phi(a) - \phi(b)}{2}\right)^2 \\ &= \phi(a)\phi(b)\end{aligned}$$

Et ϕ est donc bien un automorphisme du corps \mathbb{C} , ce qui conclut la démonstration.