

I) Introduction au dénombrement.

Rq: Les ensembles seront finis si rien n'est précisé (présenté par des majuscules)

[Bn] 1) Opérations sur les cardinaux.

prop: Si $E \cap F$ alors $|E| = |F|$

prop: (formule du crible): $* (\bigcup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} * (A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_p})$

[Del] appl: il y a $n! \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{p!}$ permutations de $1, 2, \dots, n$ sans points fixes

[Bn] Prop: $* (E_1 \times \dots \times E_n) = \prod_{i=1}^n |E_i|$

appl: $* K(E, F) = |F|^{|E|}$

2) Outils de base.

a) Réurrence

principe de récurrence

appl: 1. dérive de la plupart des résultats en combinatoire.

appl: 2. Un k-ème n-jets une pièce équilibrée. En note p la probabilité d'obtenir au moins 3 piles ou 3 faces consécutifs.

$$\begin{aligned} \text{Alors } p_n &= \frac{1}{2} p_{n-1} + \frac{1}{4} p_{n-2} + \frac{1}{4} \quad \text{pour } n \geq 3 \\ &= 1 - \frac{2}{2^5} \left((3+5) \left(\frac{1+5}{4} \right)^{n-1} - (3-5) \left(\frac{1-5}{4} \right)^{n-1} \right) \end{aligned}$$

$$\text{pour } n=5, p_5 = \frac{1}{2}!$$

b) principe du "double comptage"

appl: formule de Burnside

. loi de réciprocité quadratique

c) principe des tirages

si n+1 objets sont rangés dans n tiroirs, alors au moins un des tiroirs contient au moins 2 objets.

Autres outils possibles qui sont ds le plan: nbre de matrices diagonales ds $M_n(\mathbb{F}_q)$, dénombrement des polygones inscrites ds un cercle en points fixes

appl: $ax^2 + by^2 = 1$ a au moins une solⁿ dans $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$

lemme (des Bezouts): $A, B \in \mathbb{Z}$ sans pms, $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$
si $\forall x \in \mathbb{B}, | \varphi^{-1}(x) | = n$ alors $|\mathbb{A}| = n |\mathbb{B}|$

appl: la partie qui suit

appl: Théor de Lagrange.

3) Arrangements, combinaisons

2) ~~prop~~ $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ surj^{ctif} $|\mathbb{A}| = n$, le nbre de p-plets d'éléments de $\mathbb{A}$ $\neq \emptyset$ est

$$A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1) \quad (\text{ou } 0 \leq p \leq n)$$

C'est aussi le nbre dirigé de $\mathbb{F} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{G}$ $\varphi \in \mathbb{G}$

lem: $* \mathbb{G}_n = n!$

Notate: $\binom{n}{k}$ ou C_n^k = nbre de partie de E ($|E|=n$) à k éléments

k-combinaison de E.

$$\text{prop: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

prop: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ (formule du binôme)

b) Applications

1) si $|E|=n$, $* K(E) = 2^n$,

$$2) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{k} = \binom{2n}{n}$$

3) Soient n p's du plan. 3 q's de ces p's sont non alignés. En joint ces p's par des d's de l'rs les façons possibles. On suppose que l'rs ces d's sont non parallèles et que 3 d's ne peuvent être concourantes qu'aux p's initiaux.

Alors hormis les p's initiaux, ces d's ont 3 $\binom{n}{4}$ p's d'intersection

4) On considère une classe de n élèves et un monde sans année bissextile.

Alors la probabilité p_n que 2 élèves au moins aient la même date d'ann^{iv}

$$\text{est } p_n = \begin{cases} 1 - \frac{365!}{(365-n)! 365^n} & \text{si } n \leq 365 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

5) $n \geq 2, 3, p_n \geq 0, 5$

[C-6]

[C-5]

[C-5]

[D-5]

[D-5]

[Del]

5) Nombre de Stirling = $\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \}$ = nbre de partit^{on} d'ense^mble en k ss ens^{ibles} non v^{ides}

Alors $\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$

II) Utilisation de la théorie des groupes et corps finis.

1) Formules des classes

prop: Soit G un groupe et X un G -ensemble.

• orbite/stabilisateur: $|G| = |Gx| \cdot |G_x|$, $|G_x| = (G : G_x)$

↪ si $|G| < \infty$, $|X| < \infty$, on a la formule des classes:

$|X| = \sum_{i=1}^n |G_i| = \sum_{i=1}^n \frac{|G|}{|G_{x_i}|}$ où $X = \bigcup_{i=1}^n G_i$ est la partition en orbites sous l'action de G .

appli: a) G gpe fini non abélien. On note $n(G)$ = proportion de couples d'elts de G qui commutent.

Alors $n(G) \leq \frac{5}{8}$

b) $G \hookrightarrow X$ sans points fixes avec $|G| = 35$, $|X| = 19$.

Alors il y a 1 orbite de 5 elts et 2 orbites de 7 elts.

c) p premier, G un p -groupe, X un G -ensemble fini.

Alors $|XG| \equiv |X| \pmod{p}$

prop: formule de Burnside [avec les elts de la prop précédente, $n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$ = nbre d'orbites]

appli: Problème du collier.

On a 4 perles bleues, 3 perles blanches, 2 perles oranges.

Il y a $N = \frac{1}{9} \sum_{g \in D_3} |X^g| = 76$ façons de construire le collier.

Appl: Il y a 57 façons de colorier l'octaèdre avec 3 couleurs #.

2) Coefficients cardinaux sur les groupes linéaires finis

prop: Les cardinaux des groupes linéaires sur $\mathbb{F}_q$:

- 1) $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-1})$
- 2) $|SL_n(\mathbb{F}_q)| = q^{\frac{n(n-1)}{2}} ((q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \dots (q^2 - 1)) = N$
- 3) $|PGL_n(\mathbb{F}_q)| = |SL_n(\mathbb{F}_q)| = N$
- 4) $|PSL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|SL_n(\mathbb{F}_q)|}{\gcd(n, q-1)}$

prop: On note $D_n(q)$ l'ens des matrices de $J_n(\mathbb{F}_q)$ diagonalisables sur $\mathbb{F}_q$.

Alors $|D_n(q)| = \sum_{m_1, \dots, m_n \text{ m.g.c.m. } m_1 + \dots + m_n = n} \frac{|GL_{m_1}(q)| \dots |GL_{m_n}(q)|}{|GL_n(q)|}$

3) Les carrés dans $\mathbb{F}_q$.

Def: Pour $a \in \mathbb{F}_p$, on définit le symbole de Legendre de a par:

$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \equiv a^2 \pmod{p} \\ -1 & \text{si } a \text{ n'est pas un carré ds } \mathbb{F}_p^* \end{cases}$

Critère d'Euler: Si p premier impair, alors $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod{p}$

Thm: (loi de réciprocité quadratique)

Si p, q sont premiers, impairs distincts, Alors on a $\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$

lemme: Soit $K = \mathbb{F}_q$ de caractéristique $\neq 2$, V un K -ev de dimⁿ n . Dans une base adaptée, toute forme quadratique non dégénérée sur V a une matrice de la forme I_n ou $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha \in K$ n'est pas un carré.

(dupl)

4- Indicateur d'Euler et fonction de Mobius.

a) Indicateur d'Euler φ

Def: $\varphi(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ \# \{x, 1 \leq x \leq n, x \wedge n = 1\} & \text{si } n > 1 \end{cases}$

[600]

prop: Si $m \wedge n = 1$, $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$

prop: Soit $n \geq 2$, $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, Alors $\varphi(n) = n \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$

prop: $\varphi(n) = |\mathcal{P}_{n,n}^{\times}|$

ex: Il y a 96 inversibles dans $\mathbb{Z}/360\mathbb{Z}$.

prop: $\forall n \geq 2$, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$

appl: $X^{n-1} = \prod_{d|n} \Phi_d$ où les Φ_d sont les polynômes cyclotomiques

2) Fonction de Mobius μ

def: $\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n = p_1 \dots p_k \text{ } p_i \text{ premiers distincts} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

prop: $n \geq 1$, on note $m \nmid n$ la proba pour que 2 entiers choisis aléatoirement dans $\{1, \dots, n\}^2$ soient premiers entre eux

Alors $m = \frac{1}{n^2} \sum_{d=1}^n \mu(d) \left(\frac{n}{d}\right)^2$ et $m \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{6}{\pi^2}$

prop: (Formule d'inversion): Soient $f, g: \mathbb{N}^{\times} \rightarrow \mathbb{R}$ et si $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ Alors $\forall n \geq 1$, $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$

prop: $\text{Im } \varphi$ de polyn irréd unitaires de degré n à coef dans $\mathbb{F}_q$.

Alors $\text{Im } \varphi = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) q^{\frac{n}{d}}$

III) Utilisation des séries génératrices.

def: La série génératrice de $(a_n)_{n \geq 0}$ est la série formelle $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$

exposant de $(a_n)_{n \geq 0}$ est $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} X^n$.

4) Nombre de dérangements (sans fixés).

$D_n = \# \text{ permutations de } \{1, \dots, n\} \text{ sans points fixes}$

$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k} = n!$ ($D_0 = 1$). $S = \sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} X^n$.

et $D_n = n! \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right)$

↳ Partitions d'un entier en parts fixées.

Soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux dans leur ensemble.

Pour $n \geq 1$, on pose $a_n = \# \{ (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid \sum_{i=1}^k a_i x_i = n \}$

Alors $a_n \sim \frac{1}{a_1 \dots a_k} \cdot \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$.

↳ Nombre de partitions de $[1, n]$ B_n (nbre de Bell)

$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$

CVPT

[600]

↳ Ph de parenthésages.

On considère un ensemble muni d'une loi de comp interne non associative et n élt $a_1, \dots, a_n$ de cet ensemble.

Alors, il y a $\frac{(2n-2)!}{n-1}$ valeurs possible du produit $a_1 \dots a_n$ selon le parenthésage.

[Bia]: De Biasi

[Def]: Intro au calcul des probas d'éta stat: exos, pb 3 et 4

Delmas.

[ULM]: ULM des gres

[C.G]: calculs - énonci: Ha Ge

[OS]: Deschamps Tout en un MPSI

[Cam]: Camber. Alg et géométrie.

[Géu]: Géométrie alg.

[FEN1]: Formes X-ens alg 1.

[Fna]: ex de maths pour étagres - Formes / Serge.

[Géu2]: Orax X-ens analyse 2.

[600]

[600]

[600]

Loi de réciprocité quadratique

RIFFAUT Antonin

2013-2014

Lemme 1. Soient p un nombre premier impair et $a \in \mathbb{F}_p^*$. Alors

$$|\{x \in \mathbb{F}_p; ax^2 = 1\}| = 1 + \left(\frac{a}{p}\right).$$

Théorème 2 (Loi de réciprocité quadratique). Soient p et q deux nombres premiers impairs distincts. Alors

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}.$$

Démonstration. Considérons l'ensemble

$$X = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{F}_p^p; x_1^2 + \dots + x_p^2 = 1\}.$$

Nous allons dénombrer les éléments de X de deux manières différentes :

Méthode 1. Faisons agir le groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur X par permutation circulaire des coordonnées. Pour cette action, il y a deux types d'orbites : d'une part, les singletons de la forme $\{(x, \dots, x)\}$ avec $x \in \mathbb{F}_p$, dont les stabilisateurs sont égaux à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$; d'autre part, toutes les autres orbites ont nécessairement un stabilisateur trivial. Le nombre d'orbites de la forme $\{(x, \dots, x)\}$ avec $x \in \mathbb{F}_p$, est égal au nombre de solutions de l'équation $px^2 = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{F}_p$, qui vaut $1 + \left(\frac{p}{q}\right)$ d'après le lemme 1. Chacune des autres orbites est de cardinal p d'après la relation orbite-stabilisateur.

En partitionnant X par les orbites distinctes de cette action, on en déduit que

$$|X| = 1 + \left(\frac{p}{q}\right) \pmod{p}.$$

Méthode 2. Les formes quadratiques $Q : (x_1, \dots, x_p) \mapsto x_1^2 + \dots + x_p^2$ et $Q' : (y_1, z_1, \dots, y_d, z_d, t) \mapsto 2(y_1 z_1 + \dots + y_d z_d) + at^2$, avec $d = \frac{p-1}{2}$ et $a = (-1)^d$, sont équivalentes sur $\mathbb{F}_q^p$: en effet, leurs matrices respectives sont I_p et

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & & & a \end{pmatrix},$$

de même rang et de même discriminant (elles sont toutes deux de déterminant 1), donc elles sont congruentes en vertu de la classification des formes quadratiques sur les corps finis. Ainsi, le cardinal de X est égal au cardinal de l'ensemble

$$X' = \{(y_1, \dots, y_d, z_1, \dots, z_d, t) \in \mathbb{F}_q^p; 2(y_1 z_1 + \dots + y_d z_d) + at^2 = 1\}.$$

Dénombrons les éléments de X' . Soit $(y_1, \dots, y_d, z_1, \dots, z_d, t) \in X'$.

- Si $y_1 = \dots = y_d = 0$, alors $at^2 = 1$. Il y a donc q possibilités pour chaque z_i , et $1 + \left(\frac{a}{q}\right)$ possibilités pour t par le lemme 1, soit un total de $q^d \left(1 + \left(\frac{a}{q}\right)\right)$ possibilités.
- Sinon, il existe au moins un y_i non nul. À $y_1, \dots, y_d$ et t fixés, les z_i possibles forment un hyperplan affine de $\mathbb{F}_q^d$, il y a donc q^{d-1} possibilités. Au total, il y a $(q^d - 1)qq^{d-1} = (q^d - 1)q^d$ possibilités.

On en déduit que $|X| = q^d \left(q^d + \left(\frac{a}{q}\right)\right)$.

Finalement, en recoupant les deux méthodes, on obtient

$$|X| = q^{\frac{p-1}{2}} \left(q^{\frac{p-1}{2}} + (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{q-1}{2} \right) = 1 + \left(\frac{p}{q} \right) \pmod{p},$$

d'où il s'ensuit la loi de réciprocité quadratique après simplification. ■

Complément : classification des formes quadratiques sur les corps finis

Théorème 3. Soient $K = \mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique différente de 2, et V un K -espace vectoriel de dimension finie n . Dans une base adaptée, toute forme quadratique non dégénérée sur V a une matrice de la forme I_n ou

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \alpha \end{pmatrix},$$

avec $\alpha \in K$ non carré (il y a donc exactement deux classes de congruence de formes quadratiques sur V).

Démonstration. Procédons par récurrence sur n . Si $n = 1$, le résultat est immédiat. Supposons que $n \geq 2$, et que le résultat soit vrai au rang $n - 1$. Soient Q une forme quadratique non dégénérée sur V , et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de V orthogonale pour Q . Pour tous $\lambda, \mu \in K$,

$$Q(\lambda e_1 + \mu e_2) = \lambda^2 Q(e_1) + \mu^2 Q(e_2).$$

Montrons qu'il existe $\lambda, \mu \in K$ tels que $\lambda^2 Q(e_1) + \mu^2 Q(e_2) = 1$. Comme K contient $\frac{q+1}{2}$ carrés, les ensembles $E = \{\lambda^2 Q(e_1) ; \lambda \in K\}$ et $F = \{1 - \mu^2 Q(e_2) ; \mu \in K\}$ sont tous deux de cardinal $\frac{q+1}{2}$ ($Q(e_1), Q(e_2) \neq 0$ car Q est non dégénérée). Ainsi, $|E| + |F| = q + 1 > q = |K|$, donc par le principe des tiroirs, $E \cap F \neq \emptyset$.

On pose alors $e'_1 = \lambda e_1 + \mu e_2$. On a $Q(e'_1) = 1$. L'hypothèse de récurrence appliquée à la forme quadratique non dégénérée Q' induite par Q sur $\text{Vect}(e'_1)^\perp$ permet de conclure. ■

Références

[CAL] Philippe CALDERO, Jérôme GERMONI, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*.

Nombres de Bell

Arnaud GIRAND

17 juin 2012

Référence :

– [FGN07], p. 14–16

Proposition 1

Pour $n \geq 0$ on note B_n le nombre¹ de partitions distinctes de l'ensemble $[n]$.

Alors :

(i) la série entière $\sum \frac{B_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$ et sa somme f vérifie :

$$\forall z \in (-R, R), \quad f(z) = e^{e^z - 1}$$

(ii) pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$$

DÉMONSTRATION :

(i) Soit $n \geq 0$. Pour $0 \leq k \leq n$, on note E_k l'ensemble des partitions de $[n+1]$ telle que le "morceau"² contenant $n+1$ soit de cardinal $k+1$. Pour construire une telle partition, il suffit de choisir la classe de $n+1$ (choix de k éléments dans $[n]$) puis de partitionner les $n+1 - (k+1) = n-k$ entiers restants, d'où $\text{card}(E_k) = C_n^k B_{n-k}$.

De plus, il est clair que $\{E_0, \dots, E_n\}$ est une partition de l'ensemble des partitions de $[n+1]$ et donc :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \text{card}(E_k) = \sum_{k=0}^n C_n^k B_{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k \text{ car } C_n^{n-k} = C_n^k \quad (1)$$

Démontrons par récurrence sur $n \geq 0$ que $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \leq n!$.

– $n = 0$. Trivial.

– Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 0$. Alors :

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \sum_{k=0}^n C_n^k B_k \\ &\leq \sum_{k=0}^n C_n^k k! \\ &= n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{\underbrace{(n-k)!}_{\leq 1}} \\ &\leq (n+1)! \end{aligned}$$

D'où l'hérédité.

De fait, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, $0 \leq \frac{B_n}{n!} |z|^n \leq |z|^k$ donc R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série géométrique, à savoir 1. En particulier, R est strictement positif. Soit à présent $z \in (-R, R)$. Alors, par un changement d'indice :

$$f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1}$$

1. Notons que la seule partition de $\emptyset$ étant $\{\emptyset\}$, on a $B_0 = 1$.

2. Il faut bien que je m'amuse de temps en temps ...

Par théorème de dérivation terme à terme pour les séries entières on obtient :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k B_k \right) z^n \text{ par (1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) z^n \end{aligned}$$

On reconnaît dans cette dernière expression le produit de Cauchy des séries $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum \frac{B_n}{n!} z^n$, toutes deux de rayon de convergence supérieur ou égal à R . De fait :

$$\forall z \in (-R, R), \quad f'(z) = f(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = f(z)e^z \quad (2)$$

Résolvant (2) on trouve que :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall z \in (-R, R), \quad f(z) = Ce^{e^z}$$

Or $f(0) = 1$ donc $C = e^{-1}$ d'où :

$$f(z) = \frac{1}{e} e^{e^z} = e^{e^z - 1}$$

(ii) Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

$$e^{e^z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nz)^k}{k!}$$

On considère donc la série double³ $\sum_{(n,k)} u_{n,k}$ où $\forall n, k \in \mathbb{N}$, $u_{n,k} := \frac{(nz)^k}{n!k!}$. Alors, pour tout $n \geq 0$, la série $\sum_{(k)} |u_{n,k}|$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_{n,k}| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k |z|^k}{n!k!} = \frac{e^{n|z|}}{n!}$$

De fait, $\sum_{(n)} \sum_{k=0}^{\infty} |u_{n,k}|$ converge. Par théorème de Fubini pour les séries doubles, $\sum_{(n,k)} u_{n,k}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,k}$$

I.e :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{e} e^{e^z} \\ &= \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nz)^k}{n!k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nz)^k}{n!k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!} \right) \frac{z^k}{k!} \end{aligned}$$

Et donc, par unicité du développement en série entière de f sur $(-R, R)$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$$

3. Vous préféreriez que je vous parle de mesure de comptage sur $\mathbb{N}^2$? ... Là. Faites ce que l'on vous dit et il n'y aura pas de blessé.