220 — Équations différentielles $X' = f(t,X)$. Exemples d'étude des solutions en dimensions 1 et 2.

[GOU p356] [GOU p354] [GOU p353]

Soit un corps $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

I Fondamentaux.

<u>Déf 1</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et Ω un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{K}^n$. Soit $F : \Omega \to E$ une application. Une solution de l'équation différentielle d'ordre n :
$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$ est un couple (I, φ), où $I \subset \Omega_1$, φ est n fois dérivable, et vérifiant :
1) $\forall t \in I$, $(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \Omega$.
2) $\forall t \in I$, $\varphi^{(n)}(t) = F(t, \varphi, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n-1)})$.

Remarque 2 : On peut toujours se ramener à une équation différentielle d'ordre 1, avec $G : \Omega \to \mathbb{K}^n$
$$(t, x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{n-1}, F(t, x_0, \dots, x_{n-1}))$$

<u>Déf 3</u> : Une fonction $\varphi : I \to E$ (où I intervalle de $\mathbb{R}$) est dite <u>solution maximale</u> de $y^{(n)} = F(t, y, \dots, y^{(n-1)})$ s'il n'existe pas d'autre solution $\psi : J \to E$ de cette équation différentielle telle que $I \subsetneq J$ et $\psi_{|I} = \varphi$. Un <u>problème de Cauchy</u> est la recherche d'une fonction $\varphi : I \to E$ qui satisfait l'ED $y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ avec la <u>condition initiale</u> : $(\varphi(t_0) = x_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1})$.

<u>Th 4 de Cauchy-Lipschitz</u> : Soit $F : \Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, où Ω ouvert, une fonction et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Alors pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe une solution (φ, I) avec $x_0 \in I$ et $\varphi(t_0) = x_0$. De plus, il y a unicité de la solution maximale pour le problème de Cauchy de cette équation différentielle en (t_0, x_0).

<u>Exemple 5</u> : (E_0) : $y'' + q(t)y(t) = 0$, où q est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$:
$\forall (t_0, y_0, \eta_0)$, $\exists !\, \varphi \in \mathcal{C}^2$ telle que $\begin{cases} \varphi(t_0) = y_0 \\ \varphi'(t_0) = \eta_0 \end{cases}$, et φ définie sur $I \ni t_0$.

<u>Exemple 6</u> : (E_1) : $y' = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \sqrt{y} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$; F n'est pas localement lipschitzienne !

$CI : (t_0, 0)$, où $t_0 < 0$, $y(t) = \begin{cases} \frac{(t-c)^2}{2} & \text{si } t > c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, sont solution.
↪ Pas d'unicité !

Remarque 7 : Puisque q est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on a unicité de la solution maximale de (E_0).

<u>Th 8 (Lemme de Gronwall)</u> : Soient φ, ψ et y trois fonctions continues sur le segment $[a;b]$ à valeurs positives et vérifiant :
$\forall t \in [a;b]$, $\quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s) y(s)\, ds$.
$\forall t \in [a;b]$, $\quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u)\, du\right) ds$.

<u>Exemple 9</u> : (E_2) : $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $y'' + qy = 0$ avec q $\mathcal{C}^1$, strictement positive et croissante. Alors les solutions sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

<u>Principe 10 de majoration a priori</u> : Soit $]a;b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, O ouvert de $\mathbb{K}^n$, et $F :]a;b[\times O \to \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Soit $\varphi :]\alpha;\beta[\to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de $y' = F(t,y)$. Si $\beta < b$, pour tout compact $K \subset O$, il existe un voisinage V de β dans $]\alpha;\beta[$ tel que $\varphi(t) \notin K$ pour tout $t \in V$.

<u>Déf 11</u> : Dans le cas des équations différentielles linéaires : soient $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $y_1, \dots, y_n$ des solutions de $y' = A(t)y$; on suppose A continue. On définit le <u>déterminant wronskien</u> par :
$$W(t) = \det(y_1(t), \dots, y_n(t)).$$

<u>Propo 12</u> : $\quad W'(t) = \operatorname{tr}(A(t))\, W(t)$.

<u>Application 13</u> : Théorème d'entrelacement de Sturm :
Soient y_1, y_2 deux solutions linéairement indépendantes de $y'' + ay' + by = 0$, où a et b sont les fonctions réelles continues sur un intervalle I. Alors les zéros de y_1 sont isolés, et entre deux zéros de y_1 se trouve un unique zéro de y_2.

<u>Th 14 (continuité par rapport aux conditions initiales)</u> : Soient $a, b > 0$, $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Soit $Q := \{(t,y) \mid |t-t_0| < \alpha ; |y - y_0| < \beta\}$. On prend $f : Q \to \mathbb{R}^n$ qu'on suppose continue, et lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Pour (s, η) voisin de (t_0, y_0), on veut résoudre : $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(s) = \eta \end{cases}$. Alors il existe V voisinage de (t_0, x_0), $T > 0$ tel que $\forall (s, \eta) \in V$, ce problème admette une unique solution $y = y(t, s, \eta)$ définie pour tout $t \in [t_0 - T ; t_0 + T] = J$ et continue sur $J \times V$.

[Z-Q p362] [X-ENS p135] [ROU p83] [GOU p380] [GOU p377] [GOU p356]

[Z-Q p382]

IV Aspects qualitatifs.

A) Points d'équilibre d'un système différentiel autonome.

Déf 16 : Un système différentiel autonome est de la forme : $y' = f(y)$, où $f : O \to \mathbb{R}^n$ est C^1.

Déf 17 : Un point d'équilibre (ou point critique) est un point y_0 tel que $f(y_0) = 0$. Il est dit stable si : $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tel que si est une solution du système qui à un instant t_0 vérifie $|y(t_0) - y_0| < \delta$, on a :
- y est définie pour tout $t \geq t_0$.
- $|y(t) - y_0| < \varepsilon$ pour tout $t \geq t_0$.

Sinon y_0 est dit instable. Il est dit asymptotiquement stable si :
$\exists \eta > 0, \exists t_0$ tel que $|y(t_0) - y_0| < \delta$ et y est définie pour tout $t \geq t_0$, et $\lim_{t \to +\infty} y(t) = y_0$.

A présent, on considère un système différentiel du type $Y' = AY$, où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Le point $(0,0)$ est un point d'équilibre. On note λ_1, λ_2 les valeurs propres de A. Plusieurs cas sont à expliciter :
- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$: noeud stable.
- $0 < \lambda_2 < \lambda_1$: noeud instable.
- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: point selle.
- les vp de A sont conjuguées : $\lambda_1 = \lambda = \overline{\lambda_2} = \alpha + i\beta$.
  - → si $Re\,\lambda < 0$: foyer stable.
  - → si $Re\,\lambda > 0$: foyer instable.
  - → si $Re\,\lambda = 0$: centre.
- si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: $\lambda < 0$, $\dim E_\lambda = 2$: puits
  - $\lambda > 0$, $\dim E_\lambda = 2$: source.
  - $\lambda < 0$, $\dim E_\lambda = 1$: noeud dégénéré stable.
  - $\lambda > 0$, $\dim E_\lambda = 1$: noeud dégénéré instable.

(cf annexe 1)

On peut se ramener, dans le cas d'un système différentiel autonome de degré 2, à étudier le comportement au voisinage d'un point critique en se ramenant aux cas précédents.

[Z-Q p385] [ROU p143]

Th 18 de linéarisation : Supposons que $(0,0)$ soit un point critique. On note $A = f'(0)$, et $(\lambda_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ ses valeurs propres ; on suppose que $\forall k$, $Re\,\lambda_k \neq 0$. Il existe alors un voisinage U de zéro et un homéomorphisme Φ de U sur un voisinage V de zéro qui envoie une trajectoire (courbe $t \mapsto (y_1(t), y_2(t))$) du système autonome sur une trajectoire du système linéaire $Y' = AY$ en conservant le sens du temps.

Th 19 (de Liapounov) : Dans la dimension n ; soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application C^1 ; on suppose $f(0) = 0$ et $A := Df(0)$. Soit le système différentiel $y' = f(y)$, $y(0) = x$. Si les valeurs propres de A sont toutes de partie réelle strictement négative, 0 est un point d'équilibre stable et attractif ($y(t)$ tend exponentiellement vers 0 quand $t \to +\infty$). $\boxed{DEV}$

[X-ENS p250]

B) Des études globales.

Système proie-prédateur de Lotka-Volterra :

Soient a, b, c, d, x_0, y_0 strictement positifs. Soit (E) : $\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$ avec $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$.

Alors la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$, $X = \binom{x}{y}$ est T-périodique. Cf annexe 2. De plus, X reste dans le quart de plan.

[X-ENS p285]

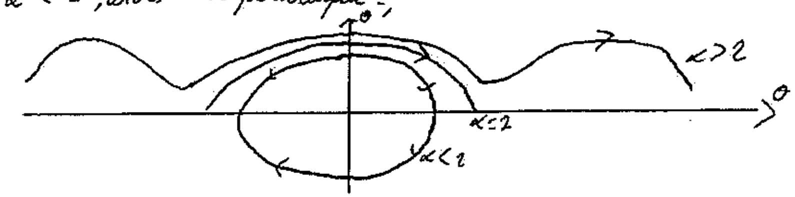
Equation du pendule simple et portraits de phase.

Soit le système différentiel : $\theta'' + \sin\theta = 0$, $\theta(0) = 0$, $\theta'(0) = \alpha > 0$.

Si $\alpha > 2$, alors θ est strictement croissante, et : $\exists t_0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\theta(t + t_0) = \theta(t) + 2\pi$.

Si $\alpha = 2$, alors $\theta(t) = 4\arctan(e^t) - \pi$.

Si $\alpha < 2$, alors θ est périodique.



III Quelques méthodes d'études.

Pour la recherche de solutions maximales, ou de solutions définies sur un domaine particulier : on peut faire des raccords.

[GOU p361] *Ex 20* : $(1-t^2)y' + ty = 0$, on recherche les solutions définies sur $\mathbb{R}$.

sur $]-\infty;-1[$, $t \mapsto \lambda\sqrt{t^2-1}$

sur $]-1;1[$, $t \mapsto \mu\sqrt{1-t^2}$ $\Rightarrow$ seule solution sur $\mathbb{R}$. $y=0$

sur $]1;+\infty[$, $t \mapsto \nu\sqrt{t^2-1}$

Certaines ED sont simplifiables par passage aux coordonnées polaires : on les reconnaît par x^2+y^2, $\frac{y}{x}$, $x\,dx + y\,dy$, $x\,dy - y\,dx$.

[MER p236] *Ex 21* : $xy' - y + \sqrt{x^2+y^2} = 0$, sur le plus grand intervalle possible.

Avec le changement de variable $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\rho = \frac{\rho_0}{1+\sin\theta}$$

On résout les équations de Bernoulli :

$$y' = a(t)y + b(t)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\},$$

où a, b continues de I dans $\mathbb{R}$; on cherche les équations ne s'annulant pas, et on résout l'équation par le changement de variables $z = y^{1-\alpha}$.

[GOU, p371] On résout les équations de Ricatti :

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t),$$

où a, b, c continues de I dans $\mathbb{R}$. On suppose connaître une solution φ_0, et on pose $z = y - \varphi_0$, et on retrouve une équation de Bernoulli.

Ex 22 : L'équation $y' + y + y^2 + 1 = 0$, admet pour solution : $t \mapsto j^2$ et $t \mapsto j + \dfrac{\sqrt{3}}{e^{i(\sqrt{3}t+\theta)}+i}$, où $\theta \in \mathbb{R}$,

sur des intervalles maximaux de longueur $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Dans certains cas, on peut utiliser les développements en série entière :

[MER p230] *Ex 23* : Rechercher les solutions particulières pour $y'' + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)y = 0$, qui sont DSE au voisinage de 0.

On obtient : $a_0 = a_1 = 0$ et $\forall n > 1$,

$$(n-2)(n+1)a_n + a_{n-2} = 0.$$

Pour $a_2 = -\frac{1}{3}$, $y_0(x) = \cos x - \frac{\sin x}{x}$.

On s'intéresse à l'équation de Hill-Mathieu :

$$y'' + qy = 0, \text{ où } q : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est continue, } \pi\text{-périodique, paire.}$$

Soit (y_1, y_2) la base canonique des solutions, associées à :

$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases}$. On pose $Ay(x) = y(x+\pi)$.

Soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{bmatrix}$, et $T = \mathrm{tr}(A)$.

[ZQ p420] **Propo 24** : si $|T| < 2$, alors toutes les solutions sont bornées. $\boxed{\text{DEV}}$

si $|T| = 2$, alors il existe une solution bornée non nulle.

si $|T| > 2$, alors toutes les solutions non nulles sont non bornées.

[X-ENS p330] Et un cas particulier d'équation de Mathieu :

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On veut résoudre $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, avec

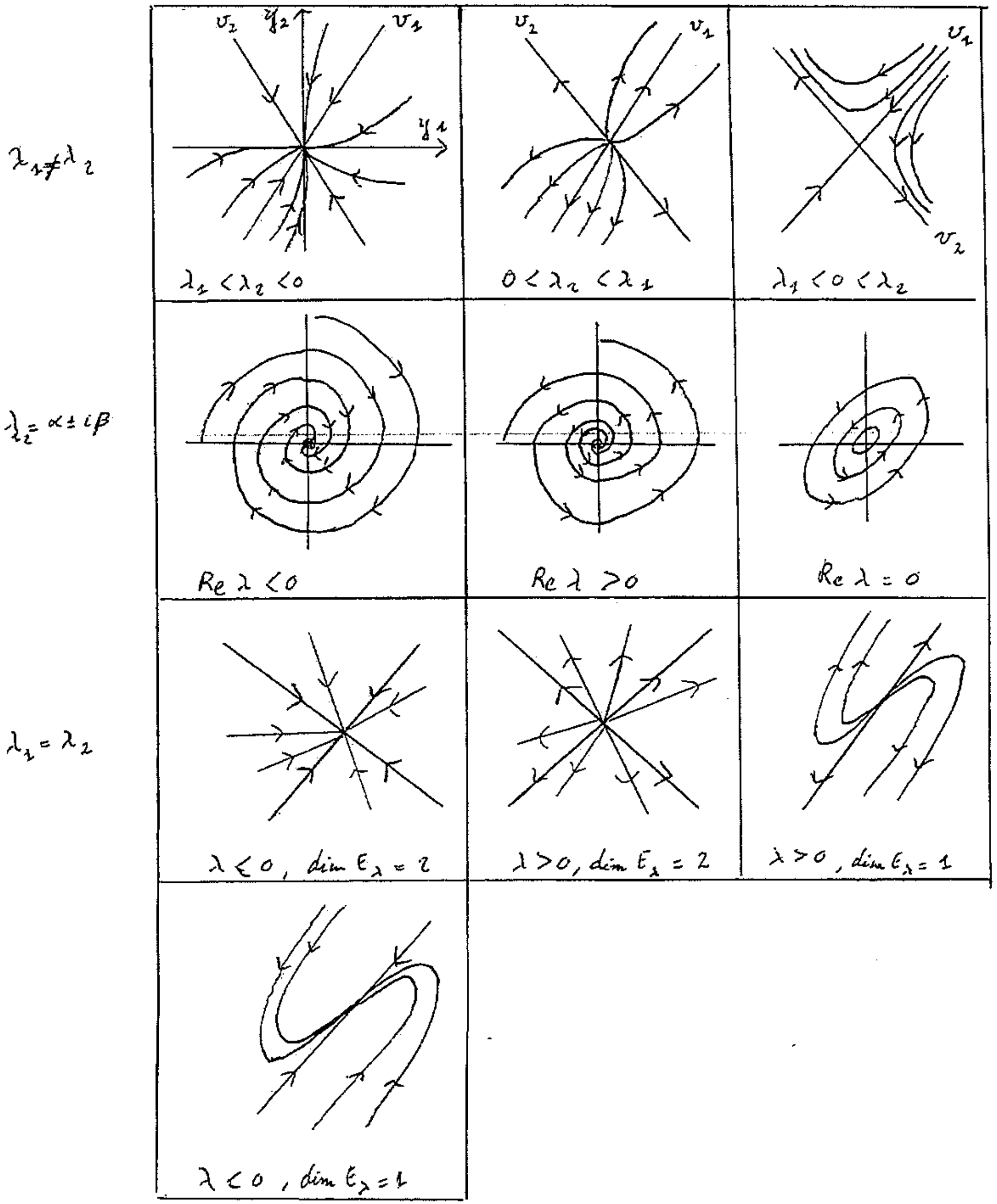
$$y'' + (\lambda - 2\cos t)y = 0.$$

Une solution développable en série de Fourier vérifierait :

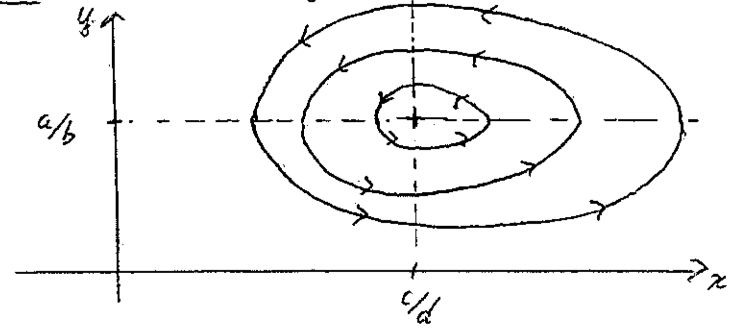
$$(n^2-\lambda)c_n(y) + c_{n-1}(y) + c_{n+1}(y) = 0.$$

Si l'ensemble des suites bornées vérifiant la relation précédente est de dimension 1, alors il existe une solution paire ou impaire.

Annexe 1 :



Annexe 2 : trajectoires du système Lotka-Volterra :



ROU : Rouvière, PGCD, 3ème éd.
X-ENS : FGN analyse 4.
MER : Merlin, méthodix analyse.
Z-Q : Zuily-Queffélec, 4ème éd.
GOU : Gourdon, analyse, 2ème éd.

Théorème de Stabilité de Lyapounov

Théorème. *Soit le système différentiel*

$$y' = f(y), \quad y(0) = x$$

Avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1 et $f(0) = 0$. Si la matrice $Df(0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, l'origine est un point d'équilibre attractif du système différentiel : il existe $v \in \mathcal{V}(0)$ tel que $\forall x \in v$, $y(t) \to 0$ exponentiellement quand $t \to \infty$.

Démonstration. On introduit le système linéarisé $z' = Az$, $z(0) = x$ ($A = Df(0)$). On note aussi $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ les valeurs propres de A de multiplicité respective $(m_1, \cdots, m_k)$.

- Étudions son comportement :
  On a $z(t) = \exp(tA)x$. Or, on peut écrire, grâce au lemme des noyaux : $x = x_1 + \cdots + x_k$ avec $x_i \in \ker(A - \lambda_i)^{m_i}$. Chaque sous-espace est stable par A et

  $$\exp(tA)x_j = \exp(t\lambda_j)\exp(t(A - \lambda_j I))x_j = \exp(t\lambda_j)\left(\sum_{p=0}^{m_j-1} \frac{t^p}{p!}(A - \lambda_j)^p\right) x_j.$$

  Pour toute norme sur $\mathbb{C}^n$, on a alors

  $$\|\exp(tA)x_j\| \leqslant \exp(t\Re(\lambda_j))C_j(1 + |t|)^{m_j-1}\|x_j\| \leqslant C\exp(t\Re(\lambda_j))(1 + |t|)^{n-1}\|x_j\|.$$

  De fait,

  $$\|\exp(tA)x\| \leqslant \sum_{j=1}^{k} \|\exp(tA)x_j\| \leqslant C(1 + |t|)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{k} e^{t\Re(\lambda_j)}\right) \max_j \|x_j\|.$$

  Puisque les normes sons toutes équivalentes, c'est exactement dire qu'il existe un polynôme P tel que, pour la norme euclidienne

  $$\|\exp(tA)x\| \leqslant P(|t|)\left(\sum e^{t\Re(\lambda_j)}\right)\|x\|.$$

  Ainsi, par hypothèse sur les valeurs propres, il existe $a > 0$ et $C > 0$ tels que $\|z(t)\| \leqslant Ce^{-at}\|x\|$.
- On introduit alors la forme linéaire symétrique

  $$b(x, y) = \int_0^\infty \langle \exp(tA)x\, ,\, \exp(tA)y \rangle \, dt.$$

  Elle est bien définie grâce à la majoration précédente, et elle est définie positive. On note q la forme quadratique associée. On note aussi $r(y) = f(y) - Ay$, si y est une solution du problème de Cauchy initial. Remarquons que

  $$\langle \operatorname{grad} q(x)\, ,\, Ax \rangle = 2b(x, Ax) = -\|x\|^2.$$

  (On aura reconnu dans l'intégrande, la dérivée de $\|\exp(tA)x\|^2$ et utilisé la majoration précédente).
  De fait,

  $$(q(y))' = Dq(y) \cdot y'(t) = 2b(y, y') = 2b(y, r(y) + Ay) = 2b(y, r(y)) - \|y\|^2.$$

- Il s'agit maintenant de majorer $b(y, r(y))$. Pour cela, remarquons que $\sqrt{q}$ définit une norme (euclidienne) pour laquelle l'inégalité de Cauchy Schwarz s'écrit $\|b(y, r(y))\| \leqslant \sqrt{q(y)}\sqrt{q(r(y))}$. La définition de la différentielle de f $r(y) = f(y) - f(0) - Df(0) \cdot y$ montre que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que $q(y) \leqslant \alpha$ implique $\sqrt{q(r(y))} \leqslant \varepsilon\sqrt{q(y)}$, donc $2b(y, r(y)) \leqslant 2\varepsilon q(y)$ (Cauchy-Schwarz).
  Par équivalence des normes, $(q(y))' = -\|y\|^2 + 2b(y, r(y)) \leqslant -Cq(y) + 2\varepsilon q(y) \leqslant -\beta q(y)$. avec $\beta > 0$ si $\varepsilon < C/2$.
- Si $q(x) < \alpha$, on a $q(y(t)) \leqslant \alpha$ pour tout $t \geqslant 0$. En effet, sinon, il existerait un t_0 premier instant tel que $q(y(t_0)) = \alpha$, auquel cas $q(y)'(t_0) \leqslant -\beta\alpha < 0$ et $q(y(t)) > \alpha$ pour t dans un voisinage à gauche de t_0, ce qui est donc absurde.
  Ceci implique donc que $q(y)' \leqslant -\beta q(y)$, ce qui s'écrit $(e^{\beta t}q(y))' \leqslant 0$ donc, puisque $q(y(0)) = q(x)$,

$$q(y(t)) \leqslant e^{-\beta t}q(x),$$

  ce qu'il fallait montrer.

□

Équation de Hill–Mathieu

Arnaud GIRAND

17 juin 2012

Référence :
- [QZ95], p. 401–403

On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante :

$$y'' + qy = 0 \text{ où } q \in \mathcal{C}^1_{\pi-\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ est paire} \tag{1}$$

Notons $W \subset \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des solutions complexes de (1) et considérons l'endomorphisme suivant :

$$\begin{aligned} u : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) &\to \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ y &\mapsto y(. + \pi) \end{aligned}$$

Alors, si $y \in W$ on a :

$$0 = \underbrace{y(. + \pi)''}_{= y''(. + \pi)} + q(. + \pi)y(. + \pi) = y(. + \pi)'' + qy(. + \pi)$$

Donc W est un s–e.v u–stable de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Or W est un s–e.v de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dont une base est donnée par $(y_1, y_2) \in W^2 \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$, $y_2(0) = 0$ et $y_2'(0) = 1$. De fait l'endomorphisme induit par u sur W peut–être identifié à sa matrice dans la base (y_1, y_2), soit $A := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Or $u(y_1) = Ay_1 = ay_1 + by_2 = y_1(. + \pi)$ et donc, par évaluation en 0, $y_1(\pi) = a$. De plus, on obtient en dérivant que $y_1'(. + \pi) = ay_1' + by_2'$. Évaluée en 0 cette égalité donne $b = y_1'(\pi)$. En se livrant aux mêmes exactions sur y_2 on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}$$

Proposition 1
On pose $T := \mathrm{Tr}(A) = y_1(\pi) + y_2'(\pi)$. Alors :
- *(i) si $|T| < 2$, toutes les solutions de (1) sont bornées ;*
- *(ii) si $|T| = 2$, (1) possède une solution non nulle bornée ;*
- *(iii) $|T| = 2 \Leftrightarrow y_1'(\pi) \times y_2(\pi) = 0$;*
- *(iv) si $|T| > 2$ alors toutes les solutions non nulles de (1) sont non bornées.*

DÉMONSTRATION : Commençons par remarquer que si on note $W(y_1, y_2)$ le wronskien de (y_1, y_2) on a :

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)' &= (y_1 y_2' - y_1' y_2)' \\ &= y_1' y_2' + (-qy_2)y_1 - (-qy_1)y_2 - y_1' y_2' \\ &= 0 \end{aligned}$$

Or $W(y_1, y_2)(0) = 1$ donc $W(y_1, y_2) = 1$ d'où $\det(A) = W(y_1, y_2)(\pi) = 1$. In fine on a :

$$\chi_A = X^2 - TX + 1 \in \mathbb{R}[X]$$

De fait, le discriminant de ce polynôme est $\Delta = T^2 - 4$.

(*i*) Dans ce cas on a $\Delta < 0$ et donc χ_A admet deux racines simples complexes conjuguées $\rho, \bar{\rho}$. Comme A est alors diagonalisable, il existe une base (u, v) de W formés de vecteurs propres de A, i.e $u(. + \pi) = \rho u$ et $v(. + \pi) = \bar{\rho} v$. Par relations coefficients–racines, $\rho\bar{\rho} = 1$ donc $|\rho| = |\bar{\rho}| = 1$ et donc $|u|$ et $|v|$ sont continues π–périodiques donc bornées. Par linéarité, tout élément de W est borné.

(*ii*) On a $T = \pm 2$, donc $\Delta = 0$ i.e χ_A admet une racine réelle double, qui est nécessairement ± 1 par relations coefficients–racines. Ceci signifie qu'il existe $u \in W \setminus \{0\}$ tel que $u(. + \pi) = \pm u$. De fait, $|u|$ est continue π–périodique donc bornée.

(*iii*) Commençons par remarquer que comme $\chi_A(A) = 0$ on a $A + A^{-1} = TI_2$. De plus, on peut montrer en utilisant l'unicité dans Cauchy–Lipschitz que y_1 (resp. y_2) est paire (resp. impaire) d'où, comme u^{-1} est l'endomorphisme $y \mapsto y(. - \pi)$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + d & 0 \\ 0 & a + d \end{pmatrix}$$

Donc $a = d$ et de fait :

$$\begin{aligned} T = \pm 2 &\Leftrightarrow a = d = \pm 1 \\ &\Leftrightarrow bc = 0 \text{ car } ad - bc = 1 \end{aligned}$$

(*iv*) Si $|T| > 2$ alors χ_A admet deux racines réelles r et $r' = r^{-1}$ (car $rr^{prime} = 1$), avec $|r| > 1$ (quitte à intervertir les deux racines). De fait A est diagonalisables et si on se donne (u, v) une base de W formée de vecteurs propres de A alors toute solution non nulle de (1) s'écrit sous la forme $y = \alpha u + \beta v$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.
– Si $\alpha \neq 0$ alors si on fixe x tel que $u(x) \neq 0$ on a :

$$\begin{aligned} y(x + n\pi) &= \alpha r^n u(x) + br^{-n} v(x) \\ &\sim_{n \to \infty} \alpha r^n u(x) \\ &\xrightarrow[n \to \infty]{} \infty \end{aligned}$$

Donc y est non bornée.
– Si $\alpha = 0$ alors $\beta \neq 0$ et si on fixe x n'annulant pas v on a :

$$\begin{aligned} y(x + n\pi) &= br^{-n} v(x) \\ &\sim_{n \to -\infty} br^{-n} v(x) \\ &\xrightarrow[n \to -\infty]{} \infty \end{aligned}$$

Et donc y n'est toujours pas bornée, d'où le résultat.

Références

[QZ95] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Éléments d'analyse pour l'agrégation.* Masson, 1995.