→ Que peut-on dire de l'infinité de zéros du thm 27 ? Ils sont isolés par thm 26

→ Un exemple de solution du thm 27 qui ne soit pas périodique ?

→ Pourquoi la sol$^{\circ}$ est globale dans thm 23 ? $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$

$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & 0 \end{pmatrix} Y$ Si ... c'est

$\|Y(t)\| \leq \|Y_0\| + \int \|A(s)\| \|Y(s)\| ds \Longrightarrow \|Y(t)\| \leq \|Y_0\| e^{\int \|A(s)\|}$ Gronwall

Faire un plan plus simple

220 : Équations différentielles $X' = f(t,X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

I. Existence, unicité, domaine de définition.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application continue. On considère l'équation différentielle (E) : $y'(t) = f(t, y(t))$, pour tout $(t,y) \in \Omega$. [D] p135

Déf 1 : On appelle solution de (E) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ une fonction dérivable $y : I \to \mathbb{R}^n$ telle que : $\forall t \in I,\ y'(t) = f(t, y(t))$.

1) Existence et unicité des solutions

Déf 2 : Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. On appelle problème de Cauchy la recherche d'une solution $y : I \to \mathbb{R}^n$ de (E) telle que : $t_0 \in \mathring{I}$ et $y(t_0) = y_0$. On le note (E').

Déf 3 : On dit que f est localement lipschitzienne en la seconde variable lorsque : $\forall (t_0, y_0) \in \Omega$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de (t_0, y_0) dans Ω et $k > 0$ tels que : $\forall (t, y_1), (t, y_2) \in \mathcal{V}$, $\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$ [G] p354

Lemme 4 : Soit $y : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dont le graphe est inclus ds Ω. Alors y est solution de (E') $\Leftrightarrow$ y est continue et vérifie : $\forall t \in I$, $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau)) d\tau$. [D] p131

Thm 5 (Cauchy-Lipschitz) Si f est localement lipschitzienne en la seconde variable, alors $\forall (t_0, y_0) \in \mathbb{R}$, $\exists I$ intervalle voisinage de t_0 et $y : I \to \mathbb{R}^n$ solution de (E). De plus : il y a unicité : Si $y_1 : I \to \mathbb{R}^n$ et $y_2 : J \to \mathbb{R}^n$ sont solutions, alors $\forall t \in I \cap J$, $y_1(t) = y_2(t)$ [G] p354

Déf 6 : Une solution $y : I \to \mathbb{R}^n$ est dite maximale lorsqu'il n'existe pas de solution $y_2 : J \to \mathbb{R}^n$ telle que : $I \subsetneq J$ et $y_{2|I} = y$.

Cor 7 : Si f est loc. lip. alors $\forall (t_0, y_0) \in \Omega$, il existe une unique solution maximale y de (E'). De plus, y est définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Ex 8 : $\begin{cases} y'(t) = e^{-t^2} + y^2, \forall 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ admet une unique solution [L] p13

C-ex 9 : $y' = \begin{cases} 0 \text{ si } y < 0 \\ \sqrt{y} \text{ si } y \geq 0 \end{cases}$ n'admet pas de solution unique au problème de Cauchy [G] p356

Thm 10 (Péano) : Si dans le thm 5, f est seulement continue, l'existence reste vraie mais pas l'unicité. [G] p355

Déf 11 : $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est dite globalement lipschitzienne en la 2$^{\text{è}}$ variable lorsque : $\forall K \subset I$ compact, $\exists k > 0$, $\forall t \in K$, $\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^n$, $\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$. [Rou] p170

Thm 12 (C-L global) : Si f est glob. lip. en la deuxième variable, alors (E') admet une unique solution glob. DVPT 1

Ex 13 : $\begin{cases} u'' = -\sin u \\ u(0) = a,\ u'(0) = b \end{cases}$ admet une unique solution globale sur $\mathbb{R}$.

Lemme 14 : (Gronwall) Soient φ, ψ et y des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et telles que : $\forall t \in [a,b]$, $y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s) y(s) ds$ alors : $\forall t \in [a,b]$, $y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s) \psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u) du\right) ds$ [G] p377

App 15 : Soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{C}^1$ et croissante. Les solutions de $y'' + q(t) y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$ [G] p378

2) Principe de majoration a priori

On se place dans $\Omega =]a,b[\times \mathbb{R}^n$.

Thm 16 : Soit $y : I \to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de (E), avec $I =]T_*, T^*[$. Alors : [Zui] p371

ou bien $T^* = b$	ou bien $T_* = a$
ou bien $T^* < b$ et $\lvert y(t) \rvert \xrightarrow[t \to T^*]{} +\infty$	ou bien $T_* < a$ et $\lvert y(t) \rvert \xrightarrow[t \to T_*]{} +\infty$

Cor 17 : Soit $y : I \to \mathbb{R}^n$ une solution de (E) sur $I =]\alpha, \beta[$, avec $a < \alpha < \beta < b$. Si $\exists \delta > 0$, $\exists A > 0$, $\forall t \in [\beta - \delta, \beta[$ (resp^t $]\alpha, \alpha + \delta]$), $|y(t)| \leq A$ alors : y peut être prolongée au-delà de β (resp^t α) en une solution de (E).

Question sur le flot ? dét du flot ? jamais nul → diff^{le} dérivée du flot ?

$\begin{cases} x' = y + e^{t} \\ y' = 2x - y \end{cases}$ à étudier $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $Z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} Z + \begin{pmatrix} e^{t} \\ 0 \end{pmatrix}$

Regarder l'eq sans 2nd membre puis ...

Ex 18 : $\begin{cases} y'(t) = \dfrac{y^2(t)}{1+y^2(t)} \\ y(0)=y_0 \end{cases}$ admet, $\forall y_0\in\mathbb{R}$, une unique solution définie sur $\mathbb{R}$.

3) Cas des équations linéaires.

Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue ; Soit $B : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

(G) p358 **Thm 20 :** L'ensemble S des solutions de $Y' = AY + B$ est un espace affine de dimension n. On a : $S = Y_0 + S_H$, où S_H est l'ev des solutions de $Y' = AY$ et Y_0 est une solution particulière qui peut être obtenue par variation de la constante.

(G) p361 **Ex 21 (dim 1).** $y' + y = \sin t$ admet pour solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions de la forme $t \mapsto \frac{\sin t - \cos t}{2} + \mu e^{-t}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

(G) p358 **Déf 22 :** En dimension $n \geq 2$, Soient $V_1, \dots, V_n$ solutions de $Y' = A(t)Y$. On appelle wronskien de $V_1, \dots, V_n$ l'application $W : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \det(V_1(t) \dots V_n(t))$

[G] p359 **Prop 23 :** $V_1, \dots, V_n$ forment une base de S ssi $\exists t_0 \in I$, $W(V_1, \dots, V_n)(t_0) \neq 0$

4) Exemples non-linéaires en dimensions 1 et 2.

a) Équation de Bernoulli (E) : $y' = p(t)y + q(t)y^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $p, q : I \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$.

(D) p164 On se place sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et on pose $z = y^{1-\alpha}$.
(E) $\iff \frac{1}{1-\alpha} z' + p(t) z + q(t)$.

(D) p165 **Ex 24 :** • $y' - 2ty = -ty^2$ admet pour solution $y : t \mapsto \dfrac{1}{Ce^{-t^2} + 1/2}$.

(D) p165 • $y' = y^2$ admet pour solutions (par exemple) $y : t \mapsto -\frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. Ces solutions sont maximales mais pas globales.

(D) p165 b) Équation de Ricatti : (E) : $y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t)$, $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$.
Soit y_1 une solution de (E). On pose $z = y - y_1$.
(E) $\iff z' = (2ay_1 + b)z + az^2$.

Ex 25 : $(1 - t^3) y' + t^2 y + y^2 - 2t = 0$: les solutions sont les : $y : t \mapsto \dfrac{\lambda t^2 + 1}{t + \lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Pendule simple : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. (E) : $\begin{cases} \theta'' + \sin\theta = 0 \\ \theta(0) = 0,\ \theta'(0) = \alpha \end{cases}$ [FGN] p385
(E) admet une unique solution $\theta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

d) Lotka-Volterra. Soient $a, b, c, d, x_0, y_0 \in \mathbb{R}_+^*$. [FGN] p350
(E) : $\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \\ x(0) = x_0 \ ; \ y(0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution maximale qui est en fait globale.

II - Étude qualitative des solutions

1) Zéros des solutions

sols max (Gourdon)

Thm 26 (Sturm) Soient $a, b : I \to \mathbb{R}$ continues. Soient y_1, y_2 deux solutions linéairement indépendantes de : $y'' + ay' + by = 0$. Les zéros de y_1 sont isolés et entre deux zéros consécutifs de y_1, il y a un unique zéro de y_2. [FGN] p135

Thm 27 (Sturm périodique). Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$, ω-périodique, $\omega > 0$. Soit (E) : $y'' + qy = 0$. Alors : [FGN] p407
a) ou bien (1) : toute solution a au plus un zéro.
ou bien (2) : toute solution a une infinité de zéro.
b) Si $q < 0$, on est dans (1) c) Si $q \geq 0$, $q \neq 0$, on est ds (2).

Ex 28 : • Les solutions de $y'' - y = 0$ ont au plus un zéro. [FGN] p410
• Les solutions de $y'' + y = 0$ ont une infinité de zéros.

2) Développement en série entière des solutions.

Thm 29 : Soit (E) : $y'' + py' + qy = r$, avec $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ et $q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$, les séries convergeant pour $|x| < R$. [FGN] p415
Alors $\forall (a_0, a_1)$, (E) a une unique solution y telle que $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$; y étant développable en série entière convergente sur $]-R, R[$.

(FGN) p101

Ex 30 (Équation de Bessel) : $\begin{cases} xy''+y'+xy=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$

Elle a pour unique solution sur $\mathbb{R}$:
$$y : x \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\,d\theta = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

3) Stabilité des équations différentielles autonomes.

On considère (E) : $y'(t) = f(y(t))$ où $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$, avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

(Tc) p350

Déf 31 : Soit y_0 un point d'équilibre (i.e. $f(y_0)=0$).

On dit que : - y_0 est stable lorsque $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ tel que si y est solution de (E) tq $\exists t_0 / |y(t_0)-y_0|<\delta$, alors y est définie $\forall t\geq t_0$ et $\forall t\geq t_0$, $|y(t)-y_0|<\varepsilon$.
- y_0 est instable sinon.
- y_0 est asymptotiquement stable lorsque $\exists \delta>0$, si y est solution (E) tq $\exists t_0$, $|y(t_0)-y_0|<\delta$, alors y est définie $\forall t\geq t_0$ et $\lim_{t\to+\infty} y(t) = y_0$.

Méthode : Pour étudier la stabilité, on se ramène au linéarisé.

(Ra) p133

Thm 32 (Liapounov) : On considère le problème de Cauchy

DVPT 2

(E') : $\begin{cases} y'=f(y) \\ y(0)=x \end{cases}$ où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$, $f(0)=0$.

Si $Df(0)$ a ses valeurs propres de partie réelle <0, alors l'origine est un point d'équilibre attractif de (E) (i.e. $\forall x$ voisin de 0, $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 en $+\infty$).

4) Exemples d'études qualitatives en dimension 1 et 2.

(D) p165

a) Bernoulli. (E) $y'=y^2$

0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

b) Équation linéaire en dimension 2. (E) : $\begin{cases} Y'(t) = AY(t) \\ Y(0) = Y_0, \end{cases}$

$Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $A \in GL_2(\mathbb{R})$.

Alors : 0 est l'unique point d'équilibre.

(D) p291

* A a deux valeurs propres réelles distinctes λ_1 et λ_2.
↳ $\lambda_2<\lambda_1<0$: nœud impropre stable
↳ $0<\lambda_1<\lambda_2$: nœud impropre instable
↳ $\lambda_2<0<\lambda_1$: col instable

* A a une valeur propre double λ.
- Si A diagonalisable : ↳ $\lambda>0$: nœud propre instable
↳ $\lambda<0$: nœud propre stable.
- Si A non-diagonalisable : ↳ $\lambda>0$: nœud exceptionnel instable
↳ $\lambda<0$: nœud exceptionnel stable.

* A a deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda, \bar\lambda$:
↳ $Re(\lambda)>0$: foyer instable ↳ $Re(\lambda)<0$: foyer stable
↳ $Re(\lambda)=0$: centre.

(cf. Annexe).

(FGN) p255

c) Pendule simple (cf. I_4c)
- Si $\alpha>2$, θ est strictement croissante et $\exists t_0 / \forall t\in\mathbb{R}$: $\theta(t+t_0) = \theta(t)+2\pi$ (il tourne indéfiniment autour de son axe).
- Si $\alpha=2$, θ est croissant et $\lim_{+\infty}\theta = \pi$ et $\lim_{-\infty}\theta = -\pi$ (il atteint la position verticale en temps ∞).
- Si $0<\alpha<2$: θ est périodique (il oscille).

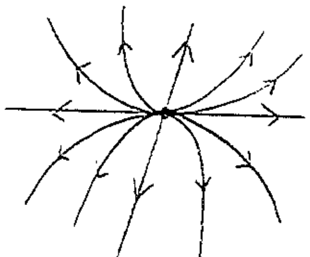
(FGN) p250

d) Lotka-Volterra (cf. I.4d)

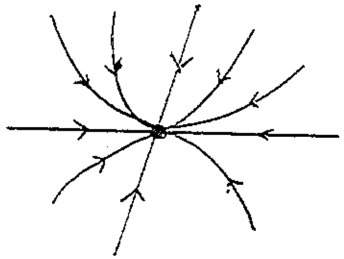
Les solutions du système sont périodiques.

Annexe : Portraits de phase. (D) p 291 – 294

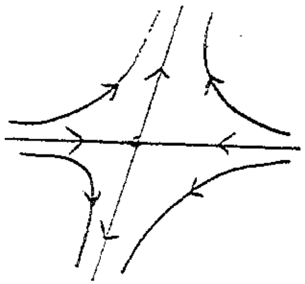
• $\lambda_1 \neq \lambda_2$:



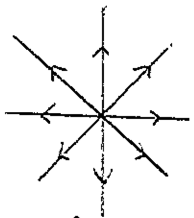
$0 < \lambda_1 < \lambda_2$



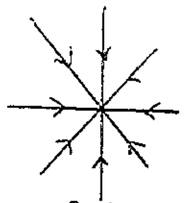
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$



• $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ et $\dim E_\lambda = 2$.

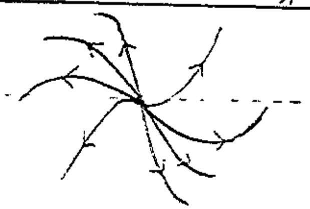


$\lambda > 0$

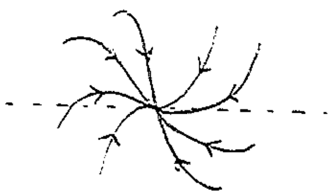


$\lambda < 0$

• $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ et $\dim E_\lambda = 1$

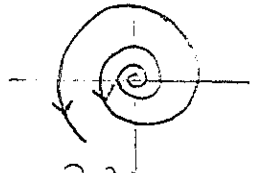


$\lambda > 0$

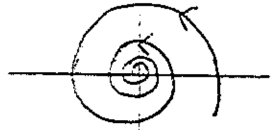


$\lambda < 0$

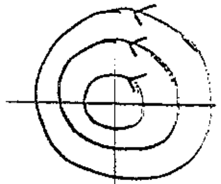
• $\lambda_1 = \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda_2 = \bar{\lambda}$



$Re\,\lambda > 0$



$Re(\lambda) < 0$



$Re(\lambda) = 0$

Références

Gourdon, Analyse

Demailly, Analyse numérique et équations différentielles

Rouvière, Petit guide de calcul différentiel

Zuily Queffélec, Analyse pour l'agrégation

Oraux X-ENS, analyse 4.

Lesfari, Equations différentielles