226

Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples et applications

I/ Cadre général

On appelle E l'espace vectoriel normé de référence

1) Définitions

Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ on dit que (u_n) est définie par récurrence s'il existe $I \subset E$ contenant u_0 et $f : I \to I$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$

Soit $I \subset E$, $f : I \to E$ et $J \subset I$.
On dit que J est stable (pour f) si $f(J) \subset J$, et on peut définir une suite par récurrence à partir de $u_0 \in J$ par $\forall n \in \mathbb{N} \; u_{n+1} = f(u_n)$

Dans la suite on désignera par (u_n) une suite définie par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$, $f : I \to I$ avec $u_0 \in I$.

remarque : Si (u_n) admet une limite et si f est continue alors ℓ est un point fixe de f : $\ell = f(\ell)$.

2) Cas $E = \mathbb{R}$

Proposition : Si f est croissante alors (u_n) est monotone
Si f est décroissante alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones

Exemple : $u_0 \geq -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$
(u_n) est monotone et bornée, elle admet une limite φ telle que $\varphi = \sqrt{1+\varphi}$. φ est le nombre d'or.

Cas particuliers

- Suites arithmétiques $u_{n+1} = u_n + \alpha$.
  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 + n\alpha$
- Suites géométriques $u_{n+1} = \alpha u_n$
  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha^n u_0$
- Récurrences homographiques. $u_{n+1} = \dfrac{a u_n + b}{c u_n + d}$, $ad - bc \neq 0$

(u_n) est définie si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \neq -\frac{d}{c}$
Si l'équation $\dfrac{ax+b}{cx+d} = x$ admet deux racines distinctes α et β alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n \dfrac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$ [GOU] p193.
avec $k = \dfrac{a - \alpha c}{a - \beta c}$.

Si l'équation admet une racine double α alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{1}{u_n - \alpha} = \dfrac{1}{u_0 - \alpha} + kn$ où $k = \dfrac{c}{a - \alpha c}$

3) Cas $E = \mathbb{C}^k$

On écrit $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+k-1} \end{pmatrix}$, si f est linéaire et A est sa matrice associée, la relation de récurrence se réécrit $U_{n+1} = A U_n$
$= A^{n+1} U_0$

Dans le cas où A est une matrice compagnon $\begin{pmatrix} 0 & & \ast \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & 1 & \ast \end{pmatrix}$ on obtient une suite récurrente linéaire d'ordre k à coefficients constants

Proposition : Soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$, $P = X^k - \sum_{i=1}^{k} a_i X^{k-i}$ [GOU] p194
on réécrit $P = \prod_{j=1}^{m} (X - x_j)^{d_j}$ avec x_j distincts deux à deux.
L'ensemble des suites définies par leurs k premiers termes et la relation de récurrence $u_n = \sum_{i=1}^{k} a_i u_{n-i}$ est $\mathrm{Vect}\{(n^p x_j^n)_{n \in \mathbb{N}},\ 1 \leq j \leq m,\ 0 \leq p < d_j\}$

Peut-être un peu décalé p/r intitulé (Espaces de Banach)

II / Théorème du point fixe, itération de fonctions

1) Théorème du point fixe

Peut être déduire de f le comportement de la suite (u_n).

E est un espace de Banach.
On dit que $f : E \to E$ est k-contractante si f est k-lipschitzienne avec $k<1$.

Théorème : Si f est k-contractante alors elle admet un unique point fixe.

Corollaire : Si $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p est k-contractante alors f possède un unique point fixe a et si (u_n) est définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ alors (u_n) converge vers a.

[ROU] p171

Théorème : Si E est compact et $f : E \to E$ est telle que $\forall x \neq y \in E$ $|f(x)-f(y)| < |x-y|$ alors f admet un unique point fixe a et si (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1}=f(u_n)$ alors (u_n) converge vers a

Peut être :
- accélération de convergence (Stephenseen) → développement.
- méthodes itératives (Jacobi, Gauss Seidel)

Application : Théorème de Cauchy-Lipschitz local
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et f une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, alors $\forall (t_0, x_0) \in \Omega$ il existe une unique solution locale au problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$

Manque un exemple de Newton en dimension 2.

Application . Équation de Volterra

[ROU] p184

Soient $I = [a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, $K : I \times I \to \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.
L'équation $\forall t \in I \quad x(t) = \varphi(t) + \int_a^t K(s,t)\, x(s)\, ds$ admet une unique solution.

2) Systèmes dynamiques, chaos.

Soit $f : I \to I$ continue (I segment de $\mathbb{R}$)
On dit que $x \in I$ est de période $n \geq 2$ si $f^n(x) = x$ et $\forall k \in \{1, .., n-1\}$ $f^k(x) \neq x$.

$\boxed{\text{DVP}}$ [XENS]

Théorème Sarkowski
Soit $f : I \to I$ continue. On suppose qu'il existe un point de période 3. Alors pour tout entier $n \geq 1$ il existe un point de période n.

Contre-exemple :
- $f : [0, \frac{1}{2}] \to [1,2]$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ n'admet que des points de période 3
- Sur le cercle de $\mathbb{R}^2$ la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ n'admet que des points de période 3.

Ensemble de Cantor

[ROU] p165

On considère la fonction tente $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) \begin{cases} = 3x & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ = 3(1-x) & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$
L'ensemble des points tels que $(F^n(x))$ est bornée est l'ensemble des points tels que cette suite reste dans $[0,1]$. C'est l'ensemble de Cantor.

III / Méthodes numériques.

1) Méthode d'Euler explicite

Soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Alors $\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$ admet une unique solution maximale.

On peut approcher cette solution par la méthode d'Euler.

Si on se donne un pas $h > 0$ (dans la pratique le plus petit possible), on pose (y_n) la suite définie par $\begin{cases} y_0 = x_0 \\ y_{n+1} = y_n + h\, f(t_0 + nh, y_n) \end{cases}$

Cela revient à approximer l'équation intégrale par la méthode des rectangles à gauche.

2) Méthode de Newton

Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $\forall x \in [c,d]$ $f'(x) > 0$.
Alors f admet un unique zéro a et il existe un voisinage J de a tel que $\forall u \in J$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = u \\ u_{n+1} = F(u_n) \end{cases}$ converge de façon quadratique vers a.
On a noté $F : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

De plus si on suppose f convexe alors le voisinage $J = [c,d]$ convient.

Exemple : Approximation du nombre d'or.
Le nombre d'or est un point fixe de $f(x) = \sqrt{1+x}$ sur $[0, +\infty[$ mais la convergence vers le point fixe est seulement linéaire car $|f'(x)| < \frac{1}{2}$ $\forall x$.
La méthode de Newton appliquée à $x^2 - x - 1 = 0$ est plus rapide.

3) Méthode de la sécante

Motivation : Dans le cas où le calcul de la dérivée de f est compliqué ou impossible la méthode de Newton n'est pas adaptée.
On va remplacer la dérivée par un taux de variation.

Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 avec $f(c) < 0 < f(d)$ et $\forall x \in [c,d]$ $f'(x) > 0$.

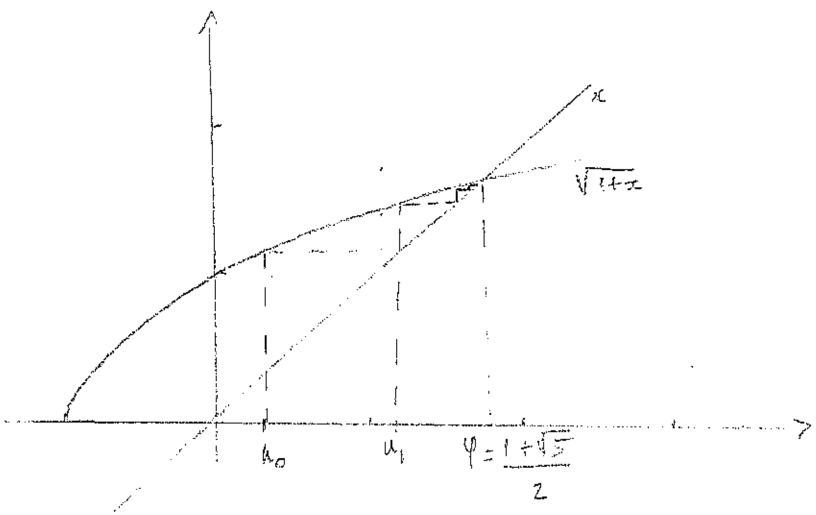
On pose $\begin{cases} x_0 = c \\ x_1 = d \end{cases}$ et $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{\tau_n}$

où $\tau_n = \dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ pour $n \geq 1$

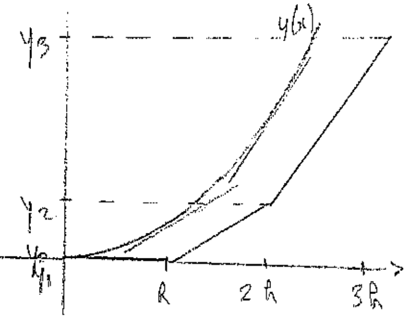
L'erreur commise sur le taux de variation est l'erreur sur les images de x_n multipliée par un facteur $\dfrac{1}{|x_n - x_{n-1}|}$. La validité de cette méthode n'est plus assurée lorsque cet écart dépasse l'erreur entre le taux de variation et la dérivée.

[DVP]
[ROU] p152
[DEM] p102

Annexe 1



Annexe 2



Références

[DEM] Analyse numérique et équations différentielles, Jean-Pierre Demailly

[GOU] Les maths en tête, 2ème édition, Analyse, Xavier Gourdon

[ROU] Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation, François Rouvière

[XENS] Oraux X-ENS : Analyse 1

Théorème de Sarkovski

Simon André et Quentin Garchery

Référence : Oraux X-ENS : Analyse 1

I désigne un segment de $\mathbb{R}$.

Définition 1. *Soit $f : I \to I$ continue. On dit que $x \in I$ est de période $n \geq 2$ si $f^n(x) = x$ et si $f^k(x) \neq x$ pour $k \in \{1, ..., n-1\}$. On dit que x est de période 1 si c'est un point fixe de f.*

Théorème 1 (Sarkovski). *Soit $f : I \to I$ continue. On suppose qu'il existe un point de période 3. Alors pour tout entier $n \geq 1$, il existe un point de période n.*

On aura besoin des deux lemmes suivants pour démontrer le théorème :

Lemme 1. *Soit une fonction f continue sur I à valeurs réelles et soit $[a, b] \subset f(I)$, alors il existe $[\alpha, \beta] \subset I$ tel que $[a, b] = f([\alpha, \beta])$.*

Démonstration. Le cas $a = b$ étant trivial, on suppose $a < b$. Soit $u \in I$ tel que $f(u) = a$ et $v \in I$ tel que $f(v) = b$. Supposons par exemple $u < v$ et posons $\beta = \inf\{x \in [u, v],\ f(x) = b\}$. β est bien défini car l'ensemble est non vide puisqu'il contient v. L'ensemble est fermé donc $f(\beta) = b$. On pose ensuite $\alpha = \sup\{x \in [u, \beta],\ f(x) = a\}$. α est bien défini et vérifie $f(\alpha) = a$. Il reste à vérifier que $[\alpha, \beta]$ convient : $[a, b] = [f(\alpha), f(\beta)] \subset f([\alpha, \beta])$ grâce au TVI. Réciproquement si $y = f(x)$ avec $x \in [\alpha, \beta]$, supposons par l'absurde que $y < a < b = f(\beta)$, alors il existe $u \in]x, \beta[$ tel que $a = f(u)$, ce qui contredit la définition de α. On en déduit $a \leq y$ puis de la même façon $y \leq b$, et donc $y \in [a, b]$. ∎

Lemme 2. *Soit une fonction f continue sur I à valeurs réelles. S'il existe $[a, b] \subset I$ tel que $[a, b] \subset f([a, b])$ alors f admet un point fixe dans $[a, b]$.*

Démonstration. Il existe $c, d \in [a, b]$ tel que $f(c) = a$ et $f(d) = b$. $g(x) = f(x) - x$ vérifie $g(d) \geq 0$ et $g(c) \leq 0$, d'où le résultat grâce au TVI. ∎

Démonstration du théorème. f admet un point a de période 3. On pose $b = f(a) \neq a$ et $c = f(b) = f^2(a) \neq a$. On a $b \neq c$, et on peut toujours supposer $a = \min(a, b, c)$. Il y a donc deux cas à étudier : $a < b < c$ et $a < c < b$. Les deux se traitant de façon similaire, on va dorénavant supposer sans perte de généralité $a < b < c$. On pose $I_0 = [a, b]$ et $I_1 = [b, c]$. On a les 3 inclusions suivantes, qui découlent du TVI :

1. $I_0 \subset f(I_1)$
2. $I_1 \subset f(I_0)$
3. $I_1 \subset f(I_1)$

On va maintenant démontrer l'existence des points de toute période.

Existence d'un point de période 1 : $I_1 \subset f(I_1)$, on applique simplement le lemme 2.

Existence d'un point de période 2 : $I_0 \subset f(I_1)$ et $I_1 \subset f(I_0)$, donc $I_0 \subset f^2(I_0)$. D'après le lemme 2, f^2 a donc un point fixe dans I_0, mais a priori on ne sait pas si $f(x) \neq x$. C'est là que le lemme 1 intervient : il existe $J_0 \subset I_0$ tel que $I_1 = f(J_0)$, on a $J_0 \subset f^2(J_0)$, donc il existe $x \in J_0$ tel que $f^2(x) = x$, et cette fois on peut conclure : $x \in J_0$ donc $x \leq b$ et $f(x) \geq b$, on en déduit que $x \neq f(x)$ (en effet, si par l'absurde on suppose $x = f(x)$, on a $x = b$, or $f(x) = c \neq b$: contradiction).

Existence d'un point de période $n > 3$: on va itérer la méthode utilisée pour démontrer l'existence d'un point de période 2. Le principe est résumé dans le schéma suivant (on note I_s flèche I_t pour $I_s \subset f(I_t)$) :

$$\begin{tikzcd} I_0 \arrow[r] & I_1 \arrow[l, bend left] \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

L'inclusion $I_1 \subset f(I_1)$ (qui n'a pas été utilisée pour le cas $n = 2$) nous permet de boucler sur I_1 un nombre de fois arbitrairement grand (ici $n-2$ fois) pour obtenir un point périodique de la période souhaitée. Il ne reste plus qu'à l'écrire :

$I_1 \subset f(I_1)$ donc il existe $I_2 \subset I_1$ tel que $I_1 = f(I_2)$. Puis $I_2 \subset f(I_2)$ etc. On construit donc

$$I_{n-1} \subset I_{n-2} \subset \dots \subset I_1$$

tels que $f(I_{k+1}) \subset I_k$ pour $1 \leq k \leq n-2$, donc par récurrence $f^k(I_{k+1}) = I_1$. En particulier $f^{n-2}(I_{n-1}) = I_1$, or $I_0 \subset f(I_1)$ d'où $I_0 \subset f^{n-1}(I_{n-1})$. D'après le lemme 1, il existe donc $I_n \subset I_{n-1}$ tel que $I_0 = f^{n-1}(I_n)$. On obtient finalement $I_n \subset f^n(I_n)$. D'après le lemme 2, il existe donc un point fixe x de f^n dans I_n. Il ne reste plus qu'à vérifier que $f^k(x) \neq x$ pour $1 \leq k \leq n-1$. Par l'absurde, si $f^k(x) = x$, considérons $f^{k-1}(x) \in I_0$. Par l'absurde, supposons $f^{n-1}(x) \neq b$. On a $f^{n-k-1}(x) = f^{n-k-1}(f^k(x)) = f^{n-1}(x)$. Mais $n-k-1 \leq n-2$ donc

$f^{n-k-1}(x) \in I_1$: contradiction. Donc $f^{n-1}(x) = b$, d'où $f^n(x) = f(b) = c = x$. Mais $n - 2 > 1$ donc x est dans I_2. On devrait donc avoir $a = f(x) \in I_1$, ce qui est absurde. Cela conclut la démonstration. ■

Remarques :

1. Il est indispensable que I soit stable par f, comme on le voit avec le contre-exemple suivant : on prend $I = [0, a] \subset [0, 1[$ et $f : I \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. On constate que $f^3(x) = x$ pour tout x dans l'intervalle I, donc tout point de I est de période au plus 3, donc il n'existe aucun point de période plus grande que 3.
2. Le théorème n'est plus vrai en dimension supérieure. Par exemple, la rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ n'a que des points de période 3 sur le cercle unité.
3. Pour construire une fonction périodique de période 3, il suffit de faire une interpolation de Lagrange pour construire un polynôme P vérifiant par exemple $P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P(2) = 0$.

Méthode de Newton

Simon André et Quentin Garchery

Référence : Petit guide de calcul différentiel, Rouvière, page 152

Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 vérifiant $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour $x \in [c,d]$. f admet donc un unique zéro a dans l'intervalle $]c,d[$. On veut créer une suite qui converge rapidement vers le point fixe. Pour cela, on transforme l'équation $f(x) = 0$ en un problème de point fixe $F(x) = x$ en choisissant F de sorte que $F'(a) = 0$, afin d'obtenir une convergence quadratique. On définit F sur $[c,d]$ par

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Proposition 1. *Il existe un intervalle $J = [a-\alpha, a+\alpha]$ stable par F. En prenant $x_0 \in J$, la suite définie par $x_{n+1} = F(x_n)$ converge de façon quadratique vers le point fixe a.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} F(x) - a &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a \\ &= \frac{(x-a)f'(x) - f(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

D'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, et puisque $f(a) = 0$, il existe $z \in]a,x[$ (ou $]x,a[$) tel que $f(a) = 0 = f(x) + (a-x)f'(x) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(z)$. On en déduit :

$$F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2$$

En prenant $C = \frac{\max|f''|}{2\min f'}$, on obtient $|F(x) - a| \leq C|x-a|^2$ pour $x \in [c,d]$. On choisit α tel que $J = [a-\alpha, a+\alpha] \subset [c,d]$ et tel que $C\alpha^2 < \alpha$, i.e $\alpha < \frac{1}{C}$. Ainsi J est stable par F et en prenant $x_0 \in J$ on a, pour tout n, $|x_{n+1} - a| \leq C|x_n - a|^2$.

■

Si, de plus, on suppose que f est convexe, on n'a plus besoin de prendre x_0 proche de a, comme le montre le résultat suivant :

Proposition 2. *Si on suppose que $f''(x) > 0$ pour $x \in [c,d]$, alors l'intervalle $I = [a,d]$ est stable par F et pour tout $x_0 \in I$ on a :*

1. $0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$.
2. $x_{n+1} - a \sim \dfrac{1}{2}\dfrac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$ *quand* $n \to +\infty$.

Démonstration. $f(x) \geq 0$ si $x \geq a$, et $f' > 0$ sur $[c,d]$, donc $F(x) \leq x$ pour tout $x \in [a,d]$. D'autre part, $f'' > 0$ donc l'expression obtenue plus haut à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange montre que $F(x) - a \geq 0$. Ainsi, l'intervalle $[a,d]$ est stable par F. De plus, si $x_0 \in]a,d]$ la suite $(x_n)_n$ est strictement décroissante, minorée par a, donc converge vers une limite l qui est un point fixe de F, donc $f(l) = 0$, d'où $l = a$ (si $x_0 = a$ la suite est stationnaire). La convergence vers a est quadratique, comme précédemment, et on a de plus, si $x_0 > a$:

$$\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(z_n)}{f'(x_n)}$$

avec $a \leq z_n \leq x_n$, donc $\dfrac{f''(z_n)}{f'(x_n)} \to \dfrac{f''(a)}{f'(a)}$, ce qui donne l'équivalent souhaité. ■

Exemple : Approximation du nombre d'or

Le nombre d'or est un point fixe de $f(x) = \sqrt{1+x}$ sur l'intervalle stable $[0, +\infty[$ ainsi que de $g(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle stable $[\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$, mais la convergence vers le point fixe est seulement linéaire car $|f'(x)| \leq 1/2$ et $|g'(x)| \leq 1/2$. La méthode de Newton appliquée à $x^2 - x - 1 = 0$ offre donc une convergence beaucoup plus rapide.

$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \sin x_n \end{cases}$

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ car sin monotone à 1 seul p^t fixe.

$|\sin'(x)| = |\cos x| \leq 1$.

$x_n^2 = \sin^2(x_{n-1})$ (peut être plus facile)

$= \left(x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3}{6} + O(x_{n-1}^5)\right)^2$

$= x_{n-1}^2 - \frac{x_{n-1}^4}{3} + O(x_{n-1}^6)$.

$y_n = \frac{1}{3}x_n^2$

$y_n = y_{n-1} - y_{n-1}^2 + O(y_{n-1}^3)$

$x_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.