226

Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie.

Déf 1 : Soit $h \in \mathbb{N}^*$. Une suite $(u_n)_n$ à valeurs dans E est dite récurrente d'ordre h si on peut écrire :
$\forall n \geq h \quad u_n = f(u_{n-1}, \dots, u_{n-h})$
où f est une application de Ω dans E, où $\Omega \subset E^h$

Rem 2 : La suite (u_n) est bien définie si : $\forall n \geq h \quad f(u_{n-1}, \dots, u_{n-h}) \in \Omega$.

Ex 3 : Soit : $f : x \to \frac{1}{x-2}$ avec $E = \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
La suite : $u_{n+1} = f(u_n)$ est mal définie pour $u_0 = \frac{12}{5}$:
$u_1 = \frac{5}{2}$; $u_2 = 2 \notin \Omega$

I Propriétés élémentaires [Gou]

Pr 4 : Soit (u_n) une suite récurrente d'ordre $h \in \mathbb{N}^*$, telle que :
$\forall n \geq h \quad u_n = f(u_{n-1}, \dots, u_{n-h})$ où $f : E^h \to E$.
Si : $\lim_{n \to \infty} u_n = l$ et si f est continue en $(l, \dots, l)$,
Alors : $\boxed{l = f(l, \dots, l)}$

- Exemples élémentaires

Ex 5 : S'il existe $a \in E$ tq : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + a$
Alors : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 + an$
On dit que $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison a

Ex 6 : S'il existe $q \in E$ tq : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = q u_n$
Alors : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = q^n u_0$
On dit que $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison q.
Si $|q| > 1$: (u_n) diverge ; si $|q| < 1$: (u_n) converge.

Ex 7 : S'il existe $q, r \in E$ tq : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = q u_n + r$
Alors : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = q^n u_0 + r \sum_{k=0}^{n-1} q^k$
On dit que (u_n) est une suite arithmético-géométrique.

Ex 8 : Soit $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tq $ad - bc \neq 0$
Si $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = h(u_n)$ on dit que (u_n) est une suite récurrente homographique.

- Suites en dimension 1 ie $E = \mathbb{R}$

Pr 9 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ tq $f(I) \subset I$,
Soit (u_n) une suite vérifiant : $u_0 \in I$; $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$

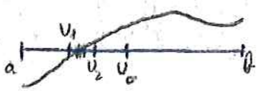
* Si f est croissante, la suite (u_n) est monotone.
* Si f est décroissante, les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. D'autre part, l'une est croissante et l'autre est décroissante. cf dessins en annexe

Pr 10 : Lemme de la grenouille [X-ENS] ou [Rom]
Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et $f : I \to I$ continue, et la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$
(u_n) converge ssi $\lim_{n \to \infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$

D/Pr 11 : Dichotomie. [sans référence]
Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ strictement croissante telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, f continue.
On choisit $\alpha_0 = a$, $\beta_0 = b$, $u_0 = \frac{a+b}{2}$, et on définit :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_n + u_n}{2} \\ \alpha_n \\ u_n \end{pmatrix} \text{ si } f(\alpha_n) f(u_n) < 0$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{u_n + \beta_n}{2} \\ u_n \\ \beta_n \end{pmatrix} \text{ sinon}$$



Alors la suite (u_n) converge vers la solution de l'équation $f(x) = 0$
rque 11.5 : La convergence est lente ! Si l est la limite, on a $|u_n - l| \leq \frac{|a-b|}{2^{n+1}}$.

II Points fixes et vitesse de convergence

- Résultats théoriques

Th 12 : du point fixe de Picard [Rou]
Soit f une application de E dans E contractante ie
$\exists k \in [0,1[\quad \forall x, y \in E \quad d(f(x), f(y)) \leq k \, d(x,y)$
Alors : $\boxed{\exists! \, a \in E \text{ tq } f(a) = a}$

D'autre part, a est la limite de la suite définie par $u_{n+1} = f(x_n)$:
$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad d(x_n, a) \leqslant \frac{K^n}{1-K} d(x_0, x_1)$ pour tout $x_0 \in E$.

Rem 13 : l'hypothèse f contractante peut-être remplacée par l'hypothèse : $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tq f^n contractante, où $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$

Déf 15 : Soient $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to I$ de classe C^1, $a \in I$ un point fixe de f.
* Si $|f'(a)| < 1$: a est un point fixe attractif de f. [Dem]
* Si $|f'(a)| = 0$: a est un point fixe hyper-attractif de f.
* Si $|f'(a)| > 1$: a est un point fixe répulsif de f.

Ex 16 : Le point fixe obtenu dans le théorème 12 est attractif.

Pr 17 : * Si a est attractif, il existe un voisinage de a dans lequel la suite $(u_n = f^n(x_0))_n$ converge vers a de façon au moins exponentiellement rapide : $|u_n - a| \leqslant K^n |u_0 - a|$ où $K < 1$.
* Si a est superattractif : on a le même résultat avec une vitesse de convergence encore plus rapide.
* Si a est répulsif, il existe un voisinage de a dans lequel : $|f(x) - a| > |x - a|$.

cf dessins en annexe

Rem 18 : Si $|f'(a)| = 1$, on ne peut pas conclure quant à la convergence de $(u_n = f^n(x_0))_n$: $x \to \sin x$ admet un point fixe attractif en 0.
$x \to \operatorname{sh} x$ admet un point fixe répulsif en 0.

Déf 19 : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, a un point fixe de f. On suppose f différentiable en a.
* Si $\rho(d_a f) < 1$: a est un point fixe attractif.
* Si $\rho(d_a f) = 0$: a est un point fixe super-attractif.

Rem 20 : En étudiant plus précisément f, on peut obtenir des vitesses de convergence plus précises [Dou]
* Si $\exists K, \eta \in]0,1[$ tq : $\forall x \in]0, \eta]$ $f(x) < Kx$ alors $u_n \underset{n\to\infty}{=} O(K^n)$
* Si $\exists a, \alpha > 0$ tq : $f(x) \underset{x\to 0^+}{=} x - ax^{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1})$ alors $u_n \sim (a\alpha n)^{-\frac{1}{\alpha}}$

ex 20.5 : $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 \underset{x\to 0}{+} o(x^3) \Rightarrow$ si $v_{n+1} = \sin v_n$ pour v_0 proche de 0, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (\frac{1}{6} \cdot 2n)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{n}}$.

- Approximation de solution de $f(x) = 0$

Pour résoudre $f(x) = 0$, on transforme l'équation en un problème de point fixe : $F(x) = x$ en prenant $F(x) = x + \lambda(x) f(x)$, où λ ne s'annule pas.
La suite $(x_{n+1} = F(x_n))_n$ converge vite vers le point fixe a si $F'(a) = 0$. On pose donc $\lambda(x) = -\frac{1}{f'(x)}$

Th 21 : Méthode de Newton : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ [Rou]
Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ C^2, tq $f(c) < 0 < f(d)$ et $\forall x \in [c,d]$: $f'(x) > 0$.
et a l'unique zéro de f sur $[c,d]$.
cf dessins en annexe
* Si $x_0 \in]c,d[$ alors $(x_n)_n$ converge vers a de façon quadratique.
* Si $f'' > 0$ sur $[c,d]$, alors $(x_n)_n$ est monotone et $x_{n+1} - a \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2$

Rem 22 : Si f n'est pas facilement dérivable, on peut remplacer f' par un taux d'accroissement : $x_{p+1} = x_p - f(x_p)/\tau_p$ où $\tau_p = \frac{f(x_p) - f(x_{p-1})}{x_p - x_{p-1}}$
C'est la méthode de la sécante, dont l'ordre de convergence est $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$. (admis)

Application 21.5 : A partir de la méthode de Newton, on peut donner une version effective de la décomposition de Jordan-Chevalley. (*) cf fin page 3

III Suites récurrentes linéaires

- Résultats théoriques [Gou]

Déf 23 : On dit qu'une suite (u_n) vérifie une récurrence linéaire d'ordre $h \in \mathbb{N}^*$ à coefficients constants si :
$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+h} = \sum_{i=0}^{h-1} a_i u_{n+i}$ où $a_i \in \mathbb{C}$.

Pr 24 : On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+h} \end{pmatrix}$

Alors $X_{n+1} = AX_n$ où A est la matrice compagnon du polynôme : $P(X) = X^h + \sum_{i=0}^{h-1} a_i X^i$.

Pr 25 : $\{(u_n)_n \,/\, u_{n+h} = \sum_{i=0}^{h-1} a_i u_{n+i}\}$ est un espace vectoriel de dimension h.

Ex 26 : Suite de Fibonacci
$\forall n \geqslant 2$: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$; $u_0 = u_1 = 1$.
On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Alors $X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X_n$

$\rightsquigarrow$ Tout le jeu est de calculer A^n, puisque $X_n = A^n X_0$.

Interlude 27 : Étant donné les $2d$ premiers termes d'une suite récurrente linéaire dont le polynôme associé est de degré au plus d, comment déterminer ledit polynôme ? (Notons-le P, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite).

L'algorithme de Berlekamp-Massey : On résout l'équation

$$\frac{Q}{R} \equiv S_{2d} \text{ modulo } X^{2d} \quad \text{où } S_{2d}(X) = \sum_{i=0}^{2d-1} u_i X^i, \ \deg(Q) < d, \ \deg(R) \leq d$$

et $\mathrm{PGCD}(Q,R) = 1$. Alors P est le polynôme réciproque de R. [AECF]

Appli 27.5 : Cet algorithme permet d'optimiser la résolution du système linéaire $Ax = b$ lorsque A est une matrice creuse.

- *Calcul du terme général*

Méthode 28 : si A est diagonalisable, alors $A = P^{-1}DP$.
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose $Y_n = PX_n$, on a alors $Y_n = D^n Y_0$.

Méthode 29 : si A n'est pas diagonalisable, on utilise la décomposition de Jordan-Chevalley : $A = D + N$ où $\begin{cases} D \text{ diagonalisable} \\ N \text{ nilpotente} \\ DN = ND \end{cases}$

Rque 29.5 : Si A est une matrice compagnon du polynôme P, on dira que P est le polynôme caractéristique de la récurrence linéaire associée. Dans le cas de la suite de Fibonacci, $P(X) = X^2 - X - 1 = \left(X - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

IV Algorithmes classiques de résolution approchée

- *Résolution de systèmes linéaires*

On cherche ici à résoudre l'équation $Ax = b$ $A \in M_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$.
On se placera dans un premier temps dans le $\boxed{\text{cas où } A \in S_n^{++}(\mathbb{R})}$ [H-U]

Lem 30 : La résolution de $Ax = b$ revient à trouver le point qui minimise la fonctionnelle : $y \longrightarrow \frac{1}{2}{}^t y A y - {}^t y b$

Déf 31 : Une méthode de gradient consiste à partir d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et à construire la suite : $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
où $\begin{cases} d_k \text{ est une direction à choisir dans } \mathbb{R}^n \\ \alpha_k \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$

Lemme 31.5 : (Kantorovitch) Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|x\|_2^4 \leq \langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle \leq \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2 \|x\|^4$.

DÉV II

Th/Déf 32 : Gradient à pas optimal — *cf. dessin en annexe*
On pose $x_{k+1} = x_k + \tau_k d_k$ où $d_k = -\nabla f(x_k)$ et τ_k est l'unique réel positif minimisant $t \longrightarrow f(x_k + t d_k)$ sur $\mathbb{R}$.
Alors (x_k) converge vers x et on a l'estimateur d'erreur :

$$\|x_k - x\| \leq \sqrt{\frac{2(f(x_0) - f(x))}{\lambda_n}} \left(\frac{\mathrm{Cond}(A) - 1}{\mathrm{Cond}(A) + 1}\right)^k$$

Rem 33 : $\mathrm{Cond}(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_n}$.

Th/Déf 34 : Gradient conjugué
On pose : $\alpha_k = \frac{\langle d_k, r_k\rangle}{\|d_k\|_A^2}$ avec $r_k = b - Ax_k$

$$d_{k+1} = r_{k+1} - \beta_k d_k \quad \text{où } \beta_k = \begin{cases} \frac{\langle r_{k+1}, A d_k\rangle}{\|d_k\|_A^2} & \text{si } d_k \neq 0 \\ 0 & \text{si } d_k = 0 \end{cases}$$

Alors (x_k) converge vers x en n étapes.

On résoud l'équation $Ax = b$ avec $\boxed{A \in GL_n(\mathbb{R})}$. [Cia]
On pose $A = M - N$, $M \in GL_n(\mathbb{R})$, $N \in M_n(\mathbb{R})$.

Th/Déf 35 : La méthode associée à (M,N) converge si : $\forall u_0 \in \mathbb{R}^n$: $u_{n+1} = M^{-1}(N u_n + b)$ converge vers x.
La méthode associée à (M,N) converge ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$.

* Méthode de Jacobi : on pose $A = D - E - F = \begin{pmatrix} D & -F \\ -E & \end{pmatrix}$
On pose $M = D$, $N = D - A = E + F$, si D inversible.
* Méthode de Gauss-Seidel :
On pose $M = D - E$, $N = F$

- *Schéma d'Euler* [Dem]

On cherche à construire une solution approchée de $y' = f(t,y)$; où $f : U \to \mathbb{R}^m$ et U ouvert de $\mathbb{R}^n$; sur un intervalle $[t_0, t_0 + T]$.

Th/Déf 36 : on se donne une subdivision $t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t_0 + T$, les pas sont notés : $h_n = t_{n+1} - t_n$.
On pose $y_n = y(t_n)$, et $y(t) = y_n + (t - t_n) f(t_n, y_n)$ $t \in [t_n, t_{n+1}]$.
Puis : $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) \\ t_{n+1} = t_n + h_n \end{cases}$ $0 \leq n \leq N-1$

Méthode de Newton-Raphson : Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $\mathcal{C}^2$ (où $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ est un ouvert) telle que $\exists a \in \Omega \,/\, f(a) = 0$ et $d_a f \in GL_m(\mathbb{R})$. Alors $\exists\, V$ voisinage de a dans Ω tel que $g : \begin{array}{l} V \to \mathbb{R}^m \\ x \mapsto x - (d_x f)^{-1}(f(x)) \end{array}$ est bien définie, a en est un point hyper-attractif et $g(V) \subset V$.

DÉV I

En particulier, $\forall x \in V$, la suite définie par $\begin{cases} v_0 := x \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$ est bien définie et converge quadratiquement vers a.

Références :

[Gou] Gourdon, Analyse

[Rou] Rouvière, Petit guide de calcul différentiel

[X-ENS] Oraux X-ENS, analyse 1

[Pom] Pommellet, Cours d'analyse

[Dou] Doukhan, Sifre, Cours d'analyse

[AECF] Algorithmes Efficaces en Calcul Formel (Bostan, Chyzak, Giusti, Salvy et al.)

[H-U] Hiriart-Urruty, Optimisation et analyse convexe

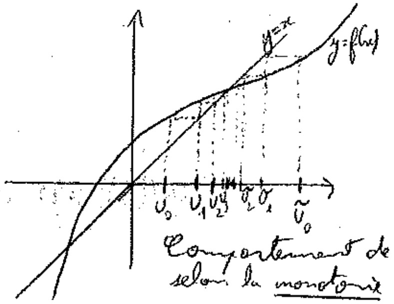
[Cia] Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation

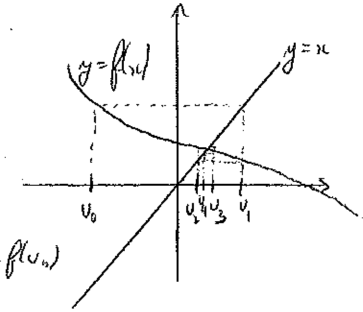
[Dem] Demailly, Analyse numérique et équations différentielles

On aurait pu en parler :

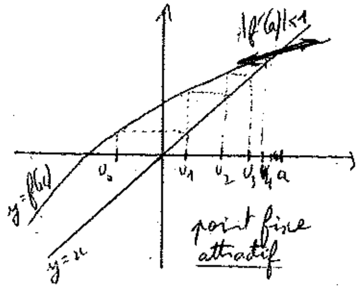
- → méthode de la puissance
- → gradient à pas constant
- → processus de Galton-Watson
- → θ-schéma pour l'équation de la chaleur
- → chaînes de Markov
- → points n-périodiques, théorème de Sarkowski
- → opérateurs hypercycliques

ANNEXE :

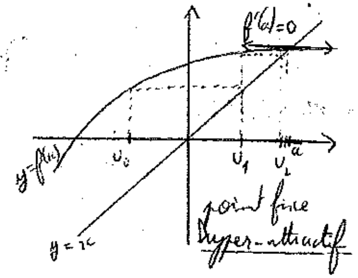




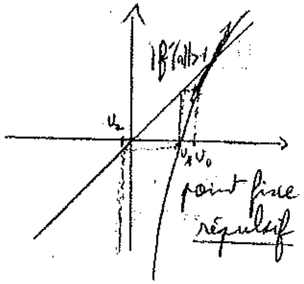
Comportement de $u_{n+1}=f(u_n)$ selon la monotonie de f.



point fixe attractif

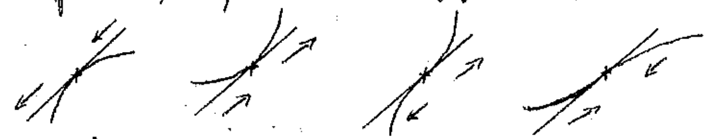


point fixe hyper-attractif

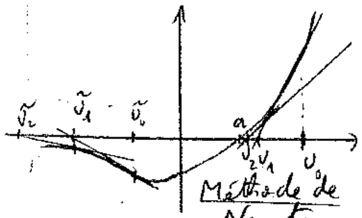


point fixe répulsif

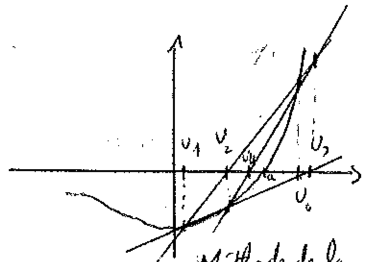
Si $|f'(a)|=1$, on peut avoir les cas suivants :



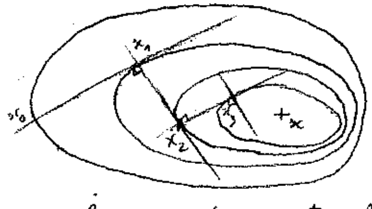
ex : $x\mapsto \ln x$ en 1 — ex : $x\mapsto x^2$ en $\frac{1}{2}$ — ex : $x\mapsto \mathrm{sh}(x)$ en 0 — ex : $x\mapsto \sin x$ en 0



Méthode de Newton



Méthode de la sécante



Gradient à pas optimal

Méthode de Newton - Raphson. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose qu'il existe $a \in \Omega$ tel que $f(a) = 0$ et $d_a f \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe un voisinage U de a telle que l'application g: $\begin{cases} U \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto x - (d_a f)^{-1}(f(x)) \end{cases}$ soit bien définie et possède a comme point fixe superattractif.

En particulier, pour tout $x \in U$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ converge quadratiquement vers a.

Démonstration. Le théorème d'inversion locale appliqué à f nous donne un voisinage V de a sur lequel f réalise un $\mathscr{C}^2$-difféomorphisme de V sur $f(V)$. On en déduit que pour tout $x \in V$, $d_x f$ est inversible donc g est bien définie sur V.

De plus, $f(a) = 0$ par hypothèse, donc $(d_a f)^{-1}(f(a)) = 0$ et $g(a) = a$. Il faut maintenant analyser le comportement local de g autour de a pour en savoir plus sur ce point fixe. Pour la suite, on se fixe $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $a + h \in V$.

On a $g(a+h) = a + h - (d_{a+h} f)^{-1}(f(a+h))$. Puisque f est $\mathscr{C}^2$, l'application $x \longmapsto d_x f$ est $\mathscr{C}^1$ sur Ω, et sa différentielle en x est l'application $h \in \mathbb{R}^n \longmapsto d_x^2 f(h, \cdot)$. On en déduit, par linéarité de la différentielle, que $d_{a+h} f = d_a f(id + (d_a f)^{-1} \circ d_a^2 f(h, \cdot) + o(\|h\|))$. En utilisant l'identité $(1+h)^{-1} = 1 - h + o(\|h\|)$, on trouve

$$(id + (d_a f)^{-1} \circ d_a^2 f(h, \cdot) + o(\|h\|))^{-1} = (id - (d_a f)^{-1} \circ d_a^2 f(h, \cdot) + o(\|h\|)),$$

et donc on obtient que

$$(d_{a+h} f)^{-1} = (id + (d_a f)^{-1} \circ d_a^2 f(h, \cdot) + o(\|h\|))^{-1} \circ (d_a f)^{-1} = (id - (d_a f)^{-1} \circ d_a^2 f(h, \cdot) + o(\|h\|)) \circ (d_a f)^{-1}.$$

Il nous reste à évaluer cette égalité en $f(a+h)$, mais avant cela remarquons que $f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \frac{1}{2} d_a^2 f(h,h) + o(\|h\|^2)$, donc par linéarité de $d_a f$ et puisque $f(a) = 0$, on trouve que $f(a+h) = d_a f(h + \frac{1}{2}(d_a f)^{-1} \circ d_a^2 f(h,h) + o(\|h\|^2))$. Cette factorisation par $d_a f$ permet de simplifier le calcul :

$$\begin{aligned}
(d_{a+h} f)^{-1}(f(a+h)) &= (id - (d_a f)^{-1} \circ d_a^2 f(h, \cdot) + o(\|h\|)) \circ (d_a f)^{-1} \circ d_a f(h + \frac{1}{2}(d_a f)^{-1} \circ d_a^2 f(h,h) + o(\|h\|^2)) \\
&= (id - (d_a f)^{-1} \circ d_a^2 f(h, \cdot) + o(\|h\|)) \circ (h + \frac{1}{2}(d_a f)^{-1} \circ d_a^2 f(h,h) + o(\|h\|^2)) \\
&= h + \frac{1}{2}(d_a f)^{-1} \circ d_a^2 f(h,h) - (d_a f)^{-1} \circ d_a^2 f(h,h) + o(\|h\|^2) \\
&= h - \frac{1}{2}(d_a f)^{-1} \circ d_a^2 f(h,h) + o(\|h\|^2).
\end{aligned}$$

On peut (enfin !) en déduire que $g(a+h) = a + h - (h - \frac{1}{2}(d_a f)^{-1} \circ d_a^2 f(h,h) + o(\|h\|^2))$, donc $g(a+h) - g(a) = \frac{1}{2}(d_a f)^{-1} \circ d_a^2 f(h,h) + o(\|h\|^2)$. En identifiant, on trouve donc que $d_a g = 0$ et $d_a^2 g = \frac{1}{2}(d_a f)^{-1} \circ d_a^2 f$, ce qui implique que a est bien un point fixe hyper-attractif de g.

Ceci nous permet notamment de trouver un voisinage de a qui soit stable par g, et sur lequel la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera donc bien définie. En effet, en notant $M = |||(d_a f)^{-1}||| \cdot |||d_a^2 f|||$, on a

$$\|g(a+h) - g(a)\| \leq \frac{1}{2} M \|h\|^2 + o(\|h\|^2) = \left(\frac{1}{2} M + o(1)\right) \|h\|^2.$$

Ainsi, il existe $\eta > 0$ tel que la boule $\mathscr{B}(a, \eta)$ soit incluse dans V et tel que $\frac{1}{2} M + o(1) \leq \tilde{M} < \infty$ pour tout $h \in \mathscr{B}(a, \eta)$. En prenant $\varepsilon < \min(\eta, \frac{1}{\tilde{M}})$, on a pour tout $x = a + h \in U := \mathscr{B}(a, \varepsilon)$, $\|g(x) - g(a)\| < \varepsilon$, donc $g(U) \subset U$.

On peut donc conclure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie sur U et qu'elle converge quadratiquement vers a, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\tilde{M}\,\|u_{n+1}-a\| &\le (\tilde{M}\,\|u_n-a\|)^2\\ &\le \dots\\ &\le (\tilde{M}\,\|u_0-a\|)^{2^{(n+1)}} \quad \text{par récurrence}\end{aligned}$$

et $\tilde{M}\,\|u_0-a\|<1$ car $u_0\in U$, donc on a bien la convergence désirée. □

Références

Jean-Pierre Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, Springer, 2006, pages 110-111.