226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $U_{n+1}=f(U_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Cadre : Soit E un ensemble, $I\subset E$ et $f : I\to E$ vérifiant $f(I)\subset I$.

I. Itérations d'une fonction continue ou monotone.

Def 1 : Pour $x\in I$, on appelle orbite de x suivant f la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I définie par $x_0=x$ et $x_{n+1}=f(x_n)$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

① Cas où f est continue.

Def 2 : On dit que $\ell\in I$ est un point fixe de f lorsque $f(\ell)=\ell$.

Prop 3 : Si E est un espace métrique et que f est continue, alors si $(x_n)_n$ converge vers $\ell\in I$ alors ℓ est un point fixe de f.

C-ex 4 : $f : x\mapsto -x$ est continue sur $[-1,1]\subset\mathbb{R}$ mais pour tout $x_0\neq 0$, la suite $x_n=(-1)^n x_0$ diverge.

C-ex 5 : La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$ mais pour tout $x_0\in\mathbb{R}$, (x_n) converge vers 1.

[5] **Thm 6 :** Si f est continue de $[a,b]$ dans $[a,b]$. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$.

C-ex 7 : Pour $x_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}$, $n\geq 1$; on a $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$ mais la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

[1] **Ex 8 :** (Suites homographiques). On se place dans $E=\mathbb{C}$. On dit que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ vérifie une récurrence homographique si on a $x_{n+1}=h(x_n)$ avec $h(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, $ad-bc\neq 0$.

- Soit $(*)$: $cx^2-(a-d)x-b=0$.
- Si $(*)$ admet deux racines $\alpha\neq\beta$, on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{x_n-\alpha}{x_n-\beta}=k_1^n\frac{x_0-\alpha}{x_0-\beta}$ où $k_1=\frac{a-\alpha c}{a-\beta c}$.
- Si $(*)$ admet une racine double α, on a, $\forall n\in\mathbb{N}$ $\frac{1}{x_n-\alpha}=\frac{1}{x_0-\alpha}+k_2 n$ où $k_2=\frac{c}{a-\alpha c}$.

Rque 9 : Avec ces formules, on peut décider s'il existe n qui annule le dénominateur de $h(x_n)$, auquel cas la récurrence s'arrête.

② Cas où f est monotone.

Prop 10 : Ici on prend $I\subset\mathbb{R}$.

- Si f est croissante sur I, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et son sens de monotonie est donné par le signe de x_1-x_0. [1]
- Si f est décroissante sur I, les suites $(x_{2n})_{n\geq 0}$ et $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont monotones de sens de monotonie opposé.

Ex 11 : Pour $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+ ; x\mapsto x^2$. Si $x_0\in\,]0,1[$, (x_n) est décroissante, si $x_0>1$, (x_n) est croissante.

Thm 11 : Si $f:[a,b]\to[a,b]$ est croissante, alors elle admet au moins un point fixe $\ell\in[a,b]$. [5]

C-ex 12 : $f=\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}$ sur $[0,1]$ est décroissante et n'admet pas de point fixe.

C-ex 13 : $f : x\mapsto x+1$ sur $[0,+\infty[$ est croissante mais n'admet pas de point fixe car $[0,\infty[$ n'est pas borné.

Ex 14 : (Suites arithmético-géométriques). C'est le cas où f est affine : $f : x\mapsto ax+b$ sur $\mathbb{R}$.

Si $a=1$ et $b\neq 0$, f n'a pas de point fixe, $x_n=x_0+nb\xrightarrow[n\to\infty]{}\pm\infty$.

Si $a\neq 0$ et $a\neq 1$, si la suite converge, c'est vers son unique point fixe $\alpha=\frac{b}{1-a}$. Lorsque $|a|<1$, c'est ce qu'il se passe pour tout $x_0\in\mathbb{R}$. Si $|a|>1$ ou $a=-1$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $x_0=\alpha$.

③ Méthode de la dichotomie.

[4]

Thm 15 : (Valeurs intermédiaires) Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(a)f(b)\le 0$, alors l'équation $f(\bar{x})=0$ admet au moins une solution dans $[a,b]$.

Algo. 16 : (Dichotomie). On se propose de trouver $\bar{x}$ introduit précédemment que l'on veut approcher à $\varepsilon>0$ près fixé.

Poser $a^{(0)}=a$, $b^{(0)}=b$, $\varepsilon^{(0)}=b^{(0)}-a^{(0)}$, $k=0$.

Tant que $\varepsilon^{(k)}>\varepsilon$:

- poser $m := \dfrac{a^{(k)}+b^{(k)}}{2}$,
- si $f(a^{(k)})f(m)<0$, alors $a^{(k+1)}=a^{(k)}$ et $b^{(k+1)}=m$.
- sinon, $a^{(k+1)}=m$ et $b^{(k+1)}=b^{(k)}$
- calculer $\varepsilon^{(k+1)}=b^{(k+1)}-a^{(k+1)}$ et $k\leftarrow k+1$.

Fin Tant que.

Rque 17 : La convergence est assez lente. Le temps d'arrêt est $\left\lfloor \log_2 \dfrac{b-a}{\varepsilon}\right\rfloor+1$.

II. Récurrences linéaires.

① Suites récurrentes linéaires à coefficients constants.

[1]

Déf 18 : La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ vérifie une récurrence linéaire homogène d'ordre h à coefficients constants si, $\forall n\geq h$, $x_n = a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}+\dots+a_hx_{n-h}$, avec $a_1,\dots,a_h\in\mathbb{C}$.

Rque 19 : Le système se réécrit sous forme matricielle avec,
$X_0=\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\\vdots\\x_{h-1}\end{pmatrix}$, $X_{n+1}=AX_n$ avec A la matrice compagnon associée au polynôme $X^h+\sum_{i=1}^{h}a_iX^{h-i}$.

Ex 20 : Pour $n=2$, $x_n=ax_{n-1}+bx_{n-2}$. Soit (E) : $y^2-ay-b=0$. [1]

- Alors si (E) admet deux racines distinctes y_1 et y_2, alors $x_n=\lambda y_1^n+\mu y_2^n$.
- Si (E) admet une racine double y_1 on a $x_n=(\lambda n+\mu)y_1^n$.

Ex 21 : Soit P_0 le polygone de sommets $z^{(0)}=(z_1^{(0)},\dots,z_n^{(0)})\in\mathbb{C}^n$ et on définit P_{k+1} polygone de sommets $z^{(k+1)}=\left(\dfrac{z_1^{(k)}+z_2^{(k)}}{2},\dfrac{z_2^{(k)}+z_3^{(k)}}{2},\dots,\dfrac{z_n^{(k)}+z_1^{(k)}}{2}\right)$.
Alors la suite (P_k) converge vers le centre de gravité de P_0. (cf annexe) DEV 1.

Ex 22 : (Chaînes de Markov).

i) Chapman-Kolmogorov : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de loi initiale μ_0 et de noyau de transition P. Si on note $\mu_n=\mathcal{L}(X_n)$, alors : $\mu_n=\mu_0P^n$.

ii) Convergence de Cesàro : On pose la suite $U_n=P^n$ pour $n\geq 0$. Alors (U_n) converge au sens de Cesàro vers $\Pi_1(P)$ où l'on a : $\Pi_1=\dfrac{1}{Q(1)}Q$ avec $Q=\dfrac{1}{(X-1)}\Pi_P$ où Π_P est le polynôme minimal de P.

② Résolution numérique de systèmes par itération.

[4]

Not. 23 : Soit $A\in\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ inversible et $b\in\mathbb{K}^n$. On cherche $x\in\mathbb{K}^n$ solution de $Ax=b$. Pour cela, on pose $A=M-N$ avec M inversible et, pour $x^{(0)}$ donné, on définit la suite $(x^{(k)})$ par $x^{(k+1)}=M^{-1}Nx^{(k)}+M^{-1}b$.

Ex 24 : (Méthode de Jacobi) - On écrit $A=D-E-F$ où D est la partie diagonale de A, $-E$ sa partie sous-diagonale et $-F$ sa partie sur-diagonale. On suppose que D est inversible et on prend $M=D$ et $N=E+F$.

- Si A est à diagonale strictement dominante alors la suite $(x^{(k)})_{k\geq 0}$ donnée par la méthode de Jacobi converge vers x pour tout $x^{(0)}\in\mathbb{K}^n$.

Ex 25 : (Méthode de Gauss-Seidel). - On suppose que $D-E$ est inversible et on prend $M = D-E$ et $N = F$.
- Si A est symétrique définie positive, alors la suite $(x^{(k)})_{k\geq 0}$ donnée par la méthode de Gauss-Seidel est bien définie et converge vers x pour tout $x_0 \in \mathbb{K}^n$. (4)

III. Méthodes de points fixes.

① Théorème du point fixe.

Thm 26 : Soit X un espace métrique complet non vide, muni de la distance d et $F : X \to X$. On suppose que F est contractante de rapport k. Alors F admet un unique point fixe $a \in X$. De plus, ce point est la limite de la suite (x_n) des itérés de F quelque soit $x_0 \in X$ et on a, pour $n \geq 1$,

$$d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1).$$

C-ex 27 : - $X =]0,1[$ et $F(x) = \frac{x}{2}$ n'a pas de point fixe car X non complet.
- $X = [0,1]$ et $F(x) = \sqrt{x^2+1}$ n'a pas de point fixe car $F(X) \not\subset X$.
- $X = \mathbb{R}$ et $F(x) = \sqrt{x^2+1}$ n'a pas de point fixe car f non contractante.

App. 28 : Théorème de Cauchy-Lipschitz. Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue et globalement lipschitzienne en la seconde variable. Alors le système différentiel $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$, $t_0 \in I$, $x \in \mathbb{R}^n$ donnés, admet une unique solution et elle est globale. [2]

② Classification des points fixes.

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in I$ un point fixe de φ.

Thm 29 : On distingue 3 cas : (cf annexe).

i) si $|\varphi'(a)| < 1$: le point fixe est dit attractif et la suite (x_n) converge au moins linéairement vers a.

ii) si $\varphi'(a) = 0$ et que $\varphi \in \mathcal{C}^2$: le point fixe est dit superattractif et la suite (x_n) converge quadratiquement vers a. [3]

iii) si $|\varphi'(a)| > 1$: le point fixe est répulsif. Cependant, il est attractif pour φ^{-1}.

Rque 30 : Dans le cas où $|\varphi'(a)| = 1$, on ne peut pas conclure :
- pour $a = 0$, $\varphi = \sin$, $I = [0, \frac{\pi}{2}]$, alors $x_n \to 0$.
- pour $a = 0$, $\varphi = \sinh$, $I = [0, +\infty[$, alors si $x_0 > 0$, $x_n \to +\infty$.

③ Méthode de Newton. (cf annexe).

DEV 2

Thm 31 : Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$ sur $[c,d]$. On considère $x_{n+1} = F(x_n)$ où $F : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
- Soit a l'unique zéro de f sur $[c,d]$. Alors $\exists \alpha > 0$ tel que $I = [a-\alpha, a+\alpha]$ est stable par F et que pour tout $x_0 \in I$, (x_n) converge vers a quadratiquement. [2]
- Si de plus, $f'' > 0$ sur $[c,d]$ alors la convergence a lieu sur $I = [a,d]$ et $\forall x_0 \in]a,d]$, $x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2$.

Rque 32 : On peut généraliser cette méthode dans $\mathbb{R}^n$ en posant :

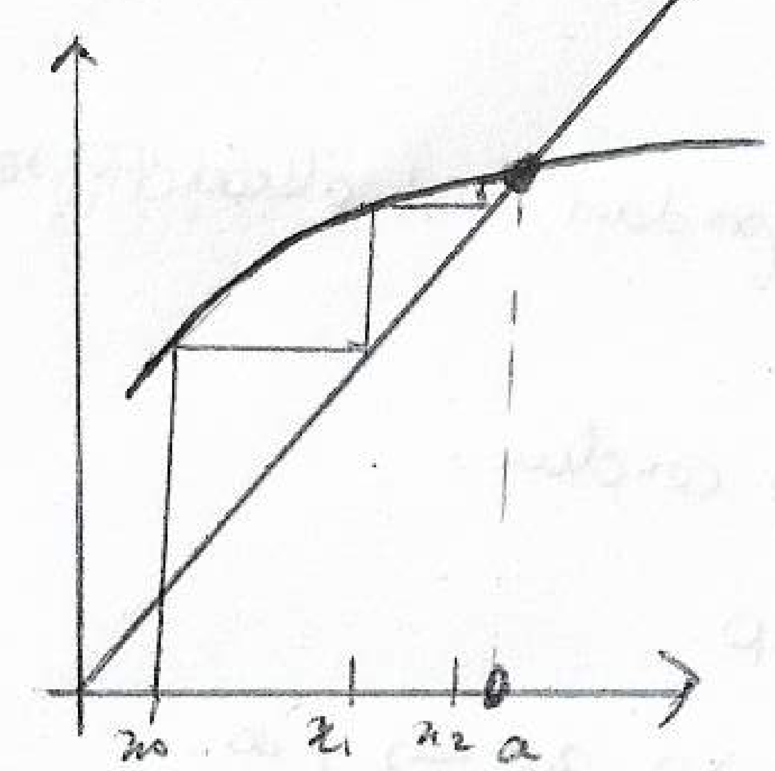
$$x_{k+1} = x_k - \nabla f(x^{(k)})^{-1} f(x^{(k)}) \text{ (si c'est bien défini).}$$

App 33 : (Schéma d'Euler implicite). Soit le problème $u' = f(t,u)$; $u(0) = u_0$ où $u_0 \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. On approche l'unique solution de ce problème sur $[0,T]$ par $v^0 = u(0)$ et $v^{n+1} = v^n + \frac{T}{N} f\left(\frac{(n+1)T}{N}, v^{n+1}\right)$, $0 \leq n \leq N-1$ et N est fixé. [4]

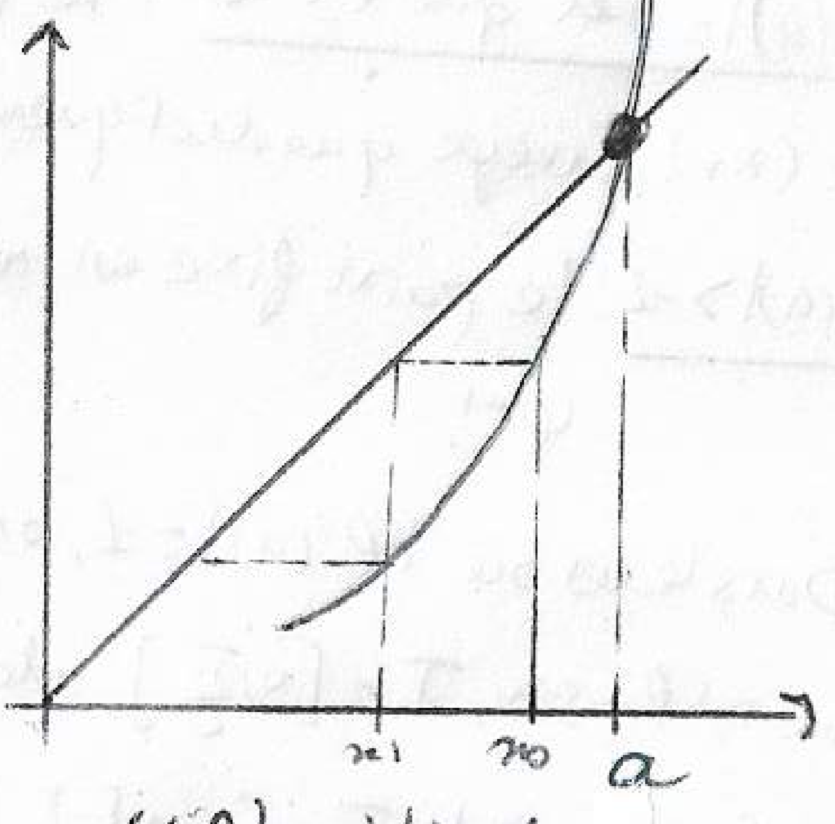
Annexe :

① Points fixes :

[2]

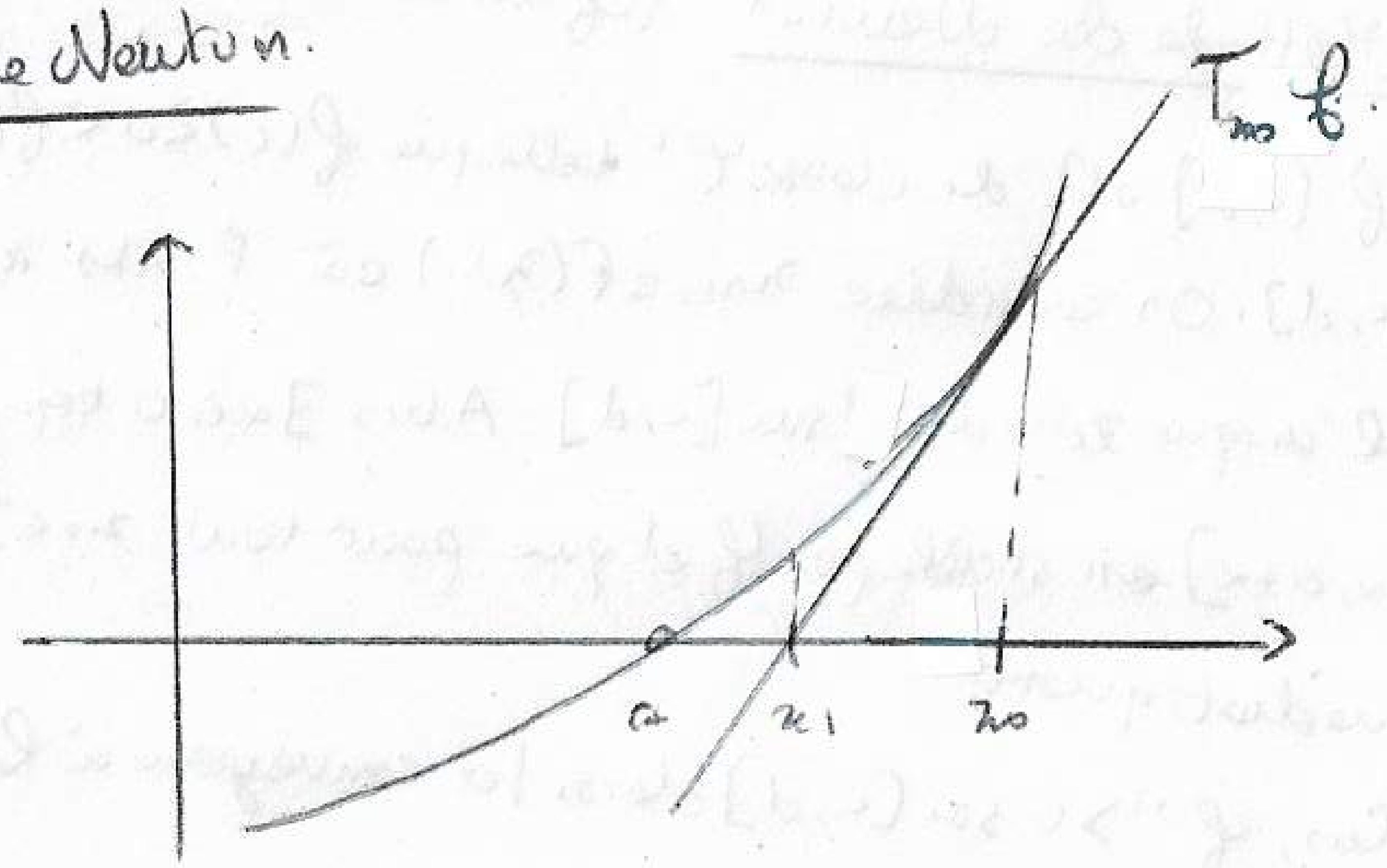


$|\varphi'(a)| < 1$

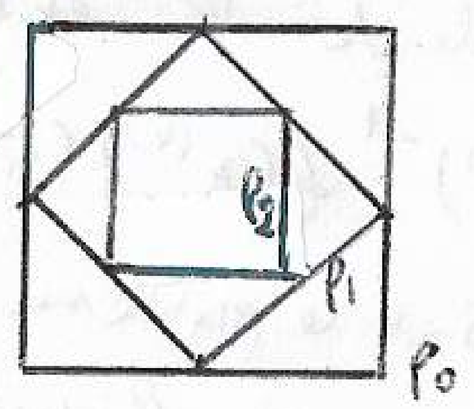


$|\varphi'(a)| > 1$

② Méthode de Newton.



③ Suite de polygones :



Références : Gourdon, Analyse [1]
Rouvière, Petit guide de calcul différentiel [2]
Demailly, Analyse numérique et équations différentielles [3]
Filbet, Analyse numérique [4]
Rombaldi, Éléments d'analyse réelle [5]

Autre application possible : dynamique discrète (voir Zuily-Queffélec).

Autres développements possibles : Galton Watson, décomposition de Dunford par l'algo. de Newton.