226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$.
Exemples et application à la résolution approchée d'équations.

On prend E un $\mathbb{K}$-e.v. normé ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

I) Premières propriétés

Def 1 : Etant donnés $\Omega \subset E$, $f : E \to E$ tq $f(\Omega)\subset\Omega$, la suite $\begin{cases} u_0\in\Omega \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ est bien définie et appelée orbite de u_0 par f.
Pour $u_0\in\Omega$, on confondra la donnée de f et $(u_n)_n$.

Def 2 : $(u_n)_n\in E^{\mathbb{N}}$ est dite récurrente d'ordre $k\in\mathbb{N}^*$ s'il existe $\Omega\subset E$, $f : E^k \to E$ vérifiant $f(\Omega\times\dots\times\Omega)\subset\Omega$ et $u_{n+k}=f(u_n,\dots,u_{n+k-1})$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Ex 3 : $u_0\in[0,1]$, $f(x)=\sqrt{x}$; $u_0\in\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=sh(x)$

Prop 4 : Si f est continue et si $(u_n)_n$ converge vers $L\in E$, alors L est un point fixe de f : $f(L,\dots,L)=L$

Ex 5 : $u_0\in]0,1]$, $f(x)=\sqrt{x}$; $u_n\to 1$ et $f(1)=1$

C.Ex 6 : $u_0\in\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=sh(x)$: $u_n\to+\infty$ mais $f(x)=x \Rightarrow x=0$

. Exemples classiques :

Ex 7 : suites arithmétiques : $r\in E$, $f(x)=x+r$ $\to \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=u_0+nr$

Ex 8 : suites géométriques : $q\in\mathbb{K}$, $f(x)=qx$ $\to \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=q^n u_0$

Ex 9 : suites arithmético-géométriques : $q\in\mathbb{K}$, $r\in E$, $f(x)=qx+r$
alors $\forall n\in\mathbb{N}$. $u_n=q^n u_0 + r\sum_{k=0}^{n-1} q^k$

Rmq 10 : si $|q|>1$ et $(u_0,r)\neq(0,0)$, $(u_n)_n$ diverge, si $|q|<1$ ou $(u_0,r)=(0,0)$ $(u_n)_n$ converge

Ex 11 : suites homographiques : $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ tq. $ad-bc\neq 0$. Soient
$f : \begin{array}{|l} \mathbb{C}\setminus\{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\end{array}$ et $(*) : cz^2-(a-d)z-b=0$

. Si $(*)$ admet 2 solutions distinctes $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ alors
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}=\left(\frac{a-\alpha c}{a-\beta c}\right)^n\left(\frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}\right)$$

. Si $(*)$ admet une racine double $\alpha\in\mathbb{C}$. alors
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{1}{u_n-\alpha}=\frac{1}{u_0-\alpha}+n\frac{c}{a-\alpha c}$$

Rmq 12 : Avec ces formules, on peut vérifier si la suite $(u_n)_n$ est bien définie

. Cas réel : On prend $I\subset\mathbb{R}$ intervalle, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tq $f(I)\subset I$

Prop 13 : $u_0\in I$ est fixé
. Si f est croissante, $(u_n)_n$ est monotone
. Si f est décroissante, $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de monotonie opposée (cf annexe)
. Si f n'est pas monotone, pas de conclusion générale

Ex 14 : . $f(x)=\sin(x)$ sur $I=[0,\frac{\pi}{2}]$, alors $(u_n)_n \searrow 0$
. $f(x)=e^{-x}$ sur $I=[0,1]$, alors $u_n\to\alpha$ où $\begin{cases}\alpha=e^{-\alpha}\\ \alpha\in[0,1]\end{cases}$
. $f(x)=4x(1-x)$ sur $I=[0,1]$, comportement chaotique

DEV 1

Prop 15 : Soit $\alpha>2+\sqrt{5}$ et $f(x)=\alpha x(1-x)$ sur $I=\mathbb{R}$, $u_0\in\mathbb{R}$
. Soit $(u_n)_n$ diverge vers $-\infty$, soit $(u_n)_n\subset[0,1]$
. $K:=\{u_0\in\mathbb{R},\ (u_n)_n \text{ est bornée}\}$ est un compact d'intérieur vide, non dénombrable et sans point isolé
. $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $K_p:=\{u_0\in\mathbb{R},\ (u_n)_n \text{ est } p\text{-périodique à partir d'un certain rang}\}$ est non vide et $\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}K_p$ est dénombrable

. Critères de convergence et asymptotique :

Lemme 16 : Soit $f:[a,b]\to[a,b]$, $a<b\in\mathbb{R}$, f continue, $u_0\in[a,b]$
alors $(u_n)_n$ converge ssi $|u_n-u_{n+1}|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

Prop 17 : Soit $f:[0,c]\to[0,c]$. $c>0$, f continue telle que $\exists a>0,\alpha>1$, $f(x)=x-ax^{\alpha}+o(x^{\alpha})$ quand $x\to0^+$
Alors pour $u_0\in]0,c]$ assez petit, $u_n\to0$ et $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}(na(\alpha-1))^{\frac{-1}{1-\alpha}}$

Ex 18 : $f(x)=\sin(x)$ sur $I=]0,\frac{\pi}{2}]$, $u_n\sim\sqrt{\frac{3}{n}}$
$f(x)=\ln(1+x)$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$, $u_n\sim\frac{2}{n}$

. Cas vectoriel :

Prop 19 : Si $(u_n)_n$ est récurrente d'ordre k : $u_{n+k}=f(u_n,\dots,u_{n+k-1})$, alors $(V_n)_n\in(E^k)^{\mathbb{N}}$ définie par $V_n:=(u_n,\dots,u_{n+k-1})$ est récurrente d'ordre 1 pour $g(x_1,\dots,x_k):=(x_2,\dots,x_k,f(x_1,\dots,x_k))$
↳ On peut toujours se ramener à une récurrence d'ordre 1

Ex 20 : $E=\mathbb{R}^2$ $\begin{cases}u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+v_n)\\ v_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}\end{cases}$ $u_0,v_0>0$ $\to X_n=\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}$ et $f(x,y)=\left(\frac{x+y}{2},\sqrt{xy}\right)$

Def 21: Si $E=\mathbb{K}$ et f est une forme linéaire, on dit que la suite est récurrente linéaire.

Ex 22: $u_0=0$, $u_1=1$, et $f(x,y)=x+y$: $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Def 23: Si $(u_n)_n$ est récurrente linéaire : $u_{n+k}=a_0u_n+\dots+a_{k-1}u_{n+k-1}$, on appelle équation caractéristique $(*)$: $x^k=a_0+\dots+a_{k-1}x^{k-1}$

Prop 24: Si $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ sont les racines distinctes de $(*)$ alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\beta_1\alpha_1^n+\dots+\beta_k\alpha_k^n$ où les β_i sont uniquement déterminés par les conditions initiales $u_0,\dots,u_{k-1}$

Ex 25: $\begin{cases}u_0=0,\ u_1=1\\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n\end{cases}$ $\to (*)$: $x^2=x+1$ $\to \forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{1}{\sqrt5}(\varphi^n-\bar\varphi^n)$ où $\varphi=\frac{1+\sqrt5}{2}$, $\bar\varphi=\frac{1-\sqrt5}{2}$

II Suites récurrentes et points fixes

Thm 26: Soit $(E,\|\cdot\|)$ un Banach, $f:E\to E$ k-contractante, alors $\exists!\, x^*\in E$ tq $f(x^*)=x^*$ (point fixe de Picard)
De plus, $\forall x_0\in E$, $(x_n)_n$ cvg vers x^* de façon géométrique : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|x_n-x^*\|\leq\frac{k^n}{1-k}\|x_0-x_1\|$

Cor 27: Le résultat reste vrai si seulement une des itérées de f est contractante (i.e. $\exists p\in\mathbb{N}$ tq $f^p:=\underbrace{f\circ\dots\circ f}_{p\text{ fois}}$ est contractante)

Appli 28: (Cauchy-Lipschitz) Soit $I\subset\mathbb{R}$ intervalle, $f:I\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ continue global. Lipschitz par rapport à $y\in\mathbb{R}^m$. Alors $\forall(t_0,y_0)\in I\times\mathbb{R}^m$, le système différentiel $\begin{cases}y'=f(t,y)\\ y(t_0)=y_0\end{cases}$ admet une unique solution $\mathcal{C}^1$ sur I.

Appli 29: (Inversion locale) Soit $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $x\in U$, U ouvert, vérifiant $d_xf:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ est inversible. Alors $\exists\, V,W$ voisinages ouverts respectifs de x et de $f(x)$ tq $f:V\to W$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféo.

Thm 30: Soit $(K,\|\cdot\|)$ compact, $f:K\to K$ tq $\forall x,y\in K$, $\|f(x)-f(y)\|<\|x-y\|$ alors f admet un unique point fixe dans K.

Ex 31: $f=\sin$ admet un unique point fixe dans $[-\pi,\pi]$

Rmq 32: Toutes les hypothèses du thm 26 sont nécessaires, quelques contre-exemples: $E=]0,1[$, $f(x)=\frac{x}{2}$; $E=[0,1]$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$; $E=\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

Classification des points fixes :

Thm 33: Soit $I\subset\mathbb{R}$ intervalle ouvert, $F:I\to\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$, $a\in I$ tq $F(a)=a$

- On suppose $|F'(a)|<1$, alors $\exists J\subset I$ intervalle tq $a\in J$ et $F(J)\subset J$ et
  - si $F'\neq0$ sur J et $x_0\in J\setminus\{a\}$, alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n\neq a$ et (cf. annexe)
    $x_{n+1}-a\underset{n\to+\infty}{\sim}F'(a)(x_n-a)$ (point fixe attractif)
  - si F est $\mathcal{C}^2$, $F'(a)=0$ et $F''\neq0$ sur J et $x_0\in J\setminus\{a\}$, alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n\neq a$ et $x_{n+1}-a\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{F''(a)}{2}(x_n-a)^2$ (point fixe super-attractif)
- On suppose $|F'(a)|>1$, alors $\exists J\subset I$ intervalle fermé tq $a\in J$ et $\forall x_0\in J\setminus\{a\}$, $\exists n\in\mathbb{N}$ tq $x_n\notin J$ (point fixe répulsif)

Rmq 34: Un point fixe répulsif se laisse mal approcher par itérations, on peut localement changer F en F^{-1} pour modifier la nature du point fixe.

Points périodiques :

Def 35: Soit $I\subset\mathbb{R}$ intervalle, $f:I\to I$ continue, $\alpha\in I$ est dit périodique d'ordre $p\in\mathbb{N}^*$ si $f^p(\alpha)=\alpha$ et $\forall k<p$, $f^k(\alpha)\neq\alpha$.

Rmq 36: Si α est p-périodique pour f, l'orbite de α par f est une suite p-périodique

Ex 37: Soit $\lambda\in]0,1]$, $x_0\in]0,1]$, $f(x)=1-\lambda x^2$, $\ell\in[0,1]$ tq $f(\ell)=\ell$
- $\lambda\in]0,\frac34]$: f et f^2 ont un seul et même point fixe dans $[0,1]$ et $(x_n)_n$ cvg
- $\lambda\in]\frac34,1]$: f^2 admet 2 autres points fixes dans $[0,1]$ que celui de f
  $(x_n)_n$ cvg ssi $(x_n)_n$ est stationnaire en ℓ

Thm 38: (Sarkovski) Soient $I\subset\mathbb{R}$ intervalle, $f:I\to I$ continue. Si f admet un point 3-périodique, elle admet des points d'ordre p, $\forall p\in\mathbb{N}^*$.

Ex 39: $f:x\in\mathbb{R}\mapsto 2-x^2$ admet des points périodiques de tout ordre.

C.Ex 40: I doit être stable : $f:\begin{array}{l}[0,\frac12]\longrightarrow[1,2]\\ x\longmapsto\frac{1}{1-x}\end{array}$ n'a que des points d'ordre 3

Ex 41: Soit $T:x\in[0,1]\mapsto\begin{cases}2x & \text{si } x\in[0,\frac12]\\ 2-2x & \text{si } x\in[\frac12,1]\end{cases}$, l'ensemble des points périodiques de T est dense dans $[0,1]$. (cf annexe)

Intermède probabiliste :

DEV2

Prop 42 (Galton Watson): Soit X variable aléatoire intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}$
On note $p_n=\mathbb{P}(X=n)$, $m=\mathbb{E}[X]$ et $G:s\in[0,1]\mapsto\mathbb{E}[s^X]$
Soit $(X_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ i.i.d. de loi $\mathbb{P}_X$ et $Z_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $Z_{n+1}=\sum_{i=1}^{Z_n}X_{i,n}$
On pose $\pi_n=\mathbb{P}(Z_n=0)$ et $\pi_\infty=\mathbb{P}(\exists n\in\mathbb{N}, Z_n=0)$: proba. d'extinction
Alors π_∞ est le plus petit point fixe de G sur $[0,1]$ et
- si $m\leq1$, $\pi_\infty=1$
- si $m>1$, π_∞ est l'unique point fixe de G sur $]0,1[$

Ex 43 : . si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda \leq 1$, on a $\pi_\infty = 1$

. si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 1$, on a $\pi_\infty \in]0,1[$ est l'unique point fixe de $s \mapsto e^{\lambda(s-1)}$ sur $]0,1[$

III] Méthodes numériques, approximations

. Approximation de zéros : dichotomie

Def 44 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue tq $f(a)f(b) < 0$. On construit les suites $(a_n), (b_n)$ par $(a_0, b_0) = (a,b)$ et

$$\begin{cases} (a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right) \text{ si } f(b_n) f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < 0 \\ (a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right) \text{ sinon} \end{cases}$$

Prop 45 : Si f admet un unique zéro $c \in]a,b[$, la méthode de dichotomie converge linéairement vers c avec une erreur à l'étape n majorée par $\frac{b-a}{2^{n+1}}$

. Approximation de zéros : Newton

Def 46 : Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$ tq $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$ sur $[c,d]$. On construit la suite : (cf. annexe)

$x_0 \in [c,d]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = F(x_n)$ où $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Prop 47 : Sous les hypothèses ci-dessus, si a est l'unique zéro de f sur $[c,d]$ alors $\forall x \in [c,d]$, $\exists z \in [a,x]$ tq $F(x) - a = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(x)} (x-a)^2$

et $\exists C > 0$ tq $\forall x \in [c,d]$, $|F(x) - a| \leq C |x-a|^2$

Prop 48 : $\exists \alpha > 0$ tq si $|x_0 - a| < \alpha$ alors $(x_n)_n$ cvg vers a de façon quadratique : $C|x_n - a| \leq (C\alpha)^{2^n}$ (avec $C\alpha < 1$)

Si de plus $f'' > 0$ sur $[a,d]$, $[a,d]$ est stable par F et $\forall x_0 \in [a,d]$, $(x_n)_n$ est strictement monotone et $x_{n+1} - a \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2$

Ex 49 : On peut approcher des racines par des rationnels : avec $f(x) = x^2 - a^2$ pour $a \in \mathbb{Q}^+$, chaque x_n est rationnel et l'erreur est $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < x_n - a < 2a \left(\frac{x_0 - a}{2a}\right)^{2^n}$

Rmq 50 : Cette méthode permet d'approcher des points répulsifs.

Prop 51 : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}^2$, $a \in U$ tq $\varphi(a) = 0$ et $d_a\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est inversible.

On pose $\Phi : x \in V \mapsto x - (d_x\varphi)^{-1} \cdot \varphi(x)$ où V est un voisinage de a suffisament petit sur lequel φ est un $\mathcal{C}^1$-difféo sur $\varphi(V)$.

Alors $\forall x_0 \in V$, $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ est bien définie et $(x_n)_n$ cvg quadratiquement vers a (méthode de Newton-Raphson)

Ex 52 : On résoud de façon approchée le système

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ xe^x + ye^y = 0 \end{cases}$$

. Minimisation : gradient à pas optimal

Prop 53 : Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, on veut minimiser $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$.

$\exists! \, x^* \in \mathbb{R}^n$ minimisant f, il est caractérisé par $\nabla f(x^*) = 0$

De plus, la suite $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = x_k + t_k \nabla f(x_k) \end{cases}$ où $t_k = \inf_{t \in \mathbb{R}} f(x_k + t \nabla f(x_k))$

cvg vers x^* et $f(x_k) - f(x^*) \leq (f(x_0) - f(x^*)) \left(\frac{C(A)-1}{C(A)+1}\right)^{2k}$

et $\|x_k - x^*\| \leq \left(\frac{2(f(x_0) - f(x^*))}{\lambda_n}\right)^{1/2} \left(\frac{C(A)-1}{C(A)+1}\right)^{k}$

où $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1$ est le spectre de A et $C(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_n}$

. Systèmes linéaires : méthode de relaxation

Etant donnés $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$, on veut résoudre $Ax = b$, $x \in \mathbb{R}^n$

Def 54 : En écrivant $A = M - N$ avec $M \in GL_n(\mathbb{R})$, on définit la suite $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} = M^{-1} N x_k + M^{-1} b$

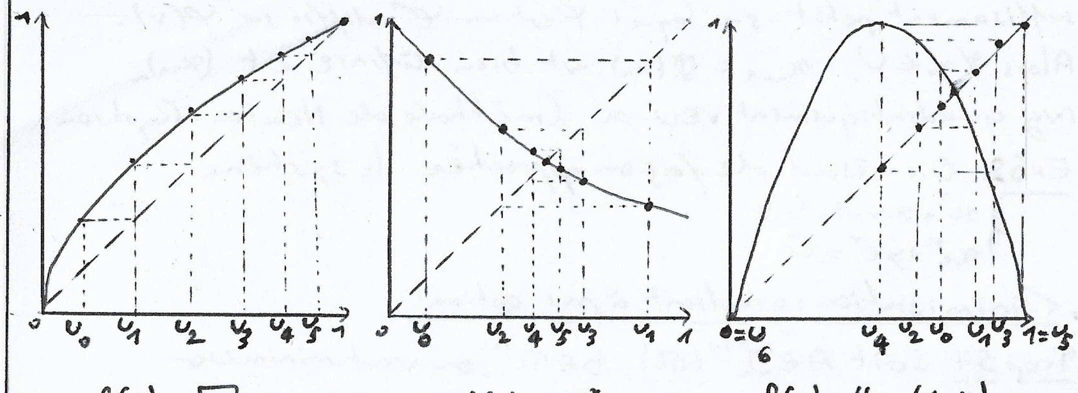
Méthode de Jacobi : $M = D$: partie diagonale de A, $N = -A + D$

Méthode de Gauss-Seidel : $N = -F$ où F est la partie triangulaire strictement inférieure de A et $M = A - F$

Prop 55 : . Si A est à diagonale strictement dominante, les 2 méthodes ci-dessus convergent vers la solution de $Ax = b$

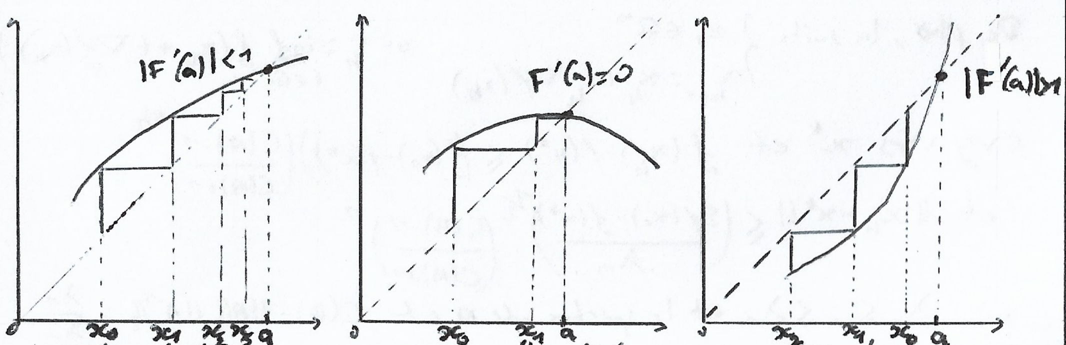
. Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, la méthode de Gauss-Seidel converge vers la solution de $Ax = b$

Illustration prop 13 :



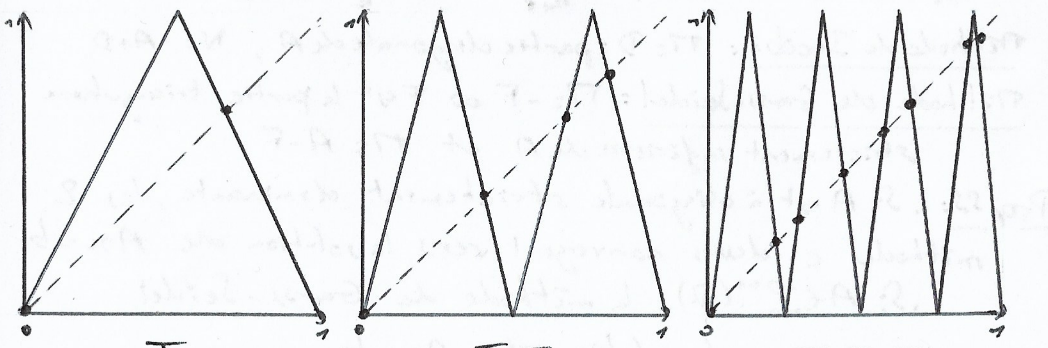
$f(x)=\sqrt{x}$ $f(x)=e^{-x}$ $f(x)=4x(1-x)$

Illustration thm 33 :



attractif super-attractif répulsif

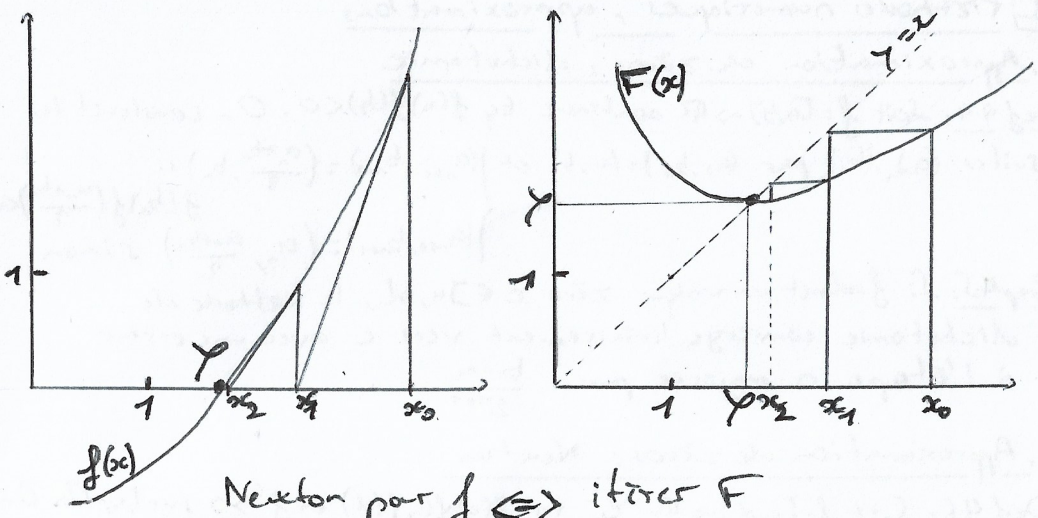
Illustration Ex 41 :



T ToT ToToT

Illustration def 46 :

$f(x)=x^2-x-1$, $I=[1,2]$ $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$



Newton pour f $\Leftrightarrow$ itérer F