226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$

I

Déf 1 : Soient (E,d) un espace métrique et $k\in\mathbb{N}^*$, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre k si on peut écrire $\forall n\geq k$, $u_n=f(u_{n-1},\dots,u_{n-k})$ où $f:E^k\to E$

Ex 2 : $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$, avec $u_0=0$, $u_1=1$, c'est la suite de Fibonacci

Déf 3 : Soit $I\subset E$, $f:I\to E$ et $J\subset I$, J stable par f on peut alors définir une suite par récurrence à partir de $u_0\in J$ par $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$

I/ Dépendance à f et du premiers terme

Prop 4 : Si $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ et f continue en l, alors $f(l)=l$

Coro 5 : Si f est continue et n'a pas de points fixes alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Contre-exemple 6 : (Réciproque Fausse), $u_0=2$, $f(x)=x^2$, $u_{n+1}=f(u_n)$, f admet 0 et 1 comme points fixes mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge

Exemple 7 : $u_0>0$, $f(x)=\sinh(x)$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, avec $u_{n+1}=f(u_n)$

Prop 8 : 1) si f croissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, son sens de monotonie est alors donné par les deux premiers termes

2) Si f est décroissante, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et de sens de monotonie opposés

Exemple 9 : $u_0\geq-1$, et $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone et bornée, donc admet une limite, qui est le nombre d'or $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Déf 10 : (suite arithmético-géométrique)
Soient $a,b\in\mathbb{R}$, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0\in\mathbb{R}$ et $u_{n+1}=au_n+b$ est une suite arithmético-géométrique
Si $a=1$, on parle de suite arithmétique et si $b=0$ on parle de suite géométrique.

Prop 11 : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique alors $\forall n$ $u_n=u_0a^n$
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors $\forall n$, $u_n=u_0+nb$
Dans le cas général $(a\neq1)$, $u_n=a^nu_0+b\frac{a^n-1}{a-1}$

Déf 12 : Soient $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ tq $c\neq0$ et $ad-bc\neq0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite homographique si $u_{n+1}=\frac{au_n+b}{cu_n+d}$

Exemple 13 : soit $u_0=-1$ et pour $n\in\mathbb{N}$, posons $u_{n+1}=\frac{3+2u_n}{2+u_n}$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, de plus, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{3}$

Prop 14 : (Action d'une homographie sur une droite)
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, considérons la droite $D_n=\mathbb{R}\begin{pmatrix}x_n\\1\end{pmatrix}$ et la matrice $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, on a $D_{n+1}=MD_n=\mathbb{R}\begin{pmatrix}ax_n+b\\cx_n+d\end{pmatrix}$

1) si $x_n\neq-\frac{d}{c}$, $D_{n+1}=\mathbb{R}\begin{pmatrix}\frac{ax_n+b}{cx_n+d}\\1\end{pmatrix}$

2) si $x_n=-\frac{d}{c}$, on va utiliser la convention $f(-\frac{d}{c})=\frac{a}{c}$, on a alors $D_{n+1}=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $D_{n+2}=\mathbb{R}\begin{pmatrix}\frac{a}{c}\\1\end{pmatrix}$

Déf 15 : Soient $a_0,\dots,a_{p-1}\in\mathbb{K}$, on définit la suite récurrente linéaire d'ordre p, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0,\dots,u_{p-1}\in\mathbb{K}$ et $\forall n\geq0$, $u_{n+p}=a_0u_n+\dots+a_{p-1}u_{n+p-1}$ $\circledast$

Prop 16 : (Vectorisation) La relation ⊛ peut s'écrire vectoriellement comme :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{n+p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{p-2} & a_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$$

On pose $U_n = {}^t(u_n, \dots, u_{n+p-1})$ et $P(X) = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \dots - a_0$ le polynome caractéristique de la suite

On a : $U_{n+1} = {}^tC_p U_n$, donc $U_n = ({}^tC_p)^n U_0$

Thm 17 : l'ensemble des suites satisfaisants ⊛ est un $\mathbb{K}$-ev de dim p.

Prop 18 : Soient $(a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$ et :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$

L'équation $r^2 - ar - b = 0$ est appelée équation caractéristique

- si l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, alors : $\exists ! (\lambda, \mu)$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$
- si l'équation caractéristique admet une solution double r, alors $\exists ! (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r^n + n\mu r^n$

II / Points Fixes, vitesse de convergence, développement asymptotique

Thm 19 : (Point Fixe de Picard) Soit (E,d) un espace métrique complet non vide et f une application strictement contractante

Alors f admet un point Fixe $x \in E$ et ce point Fixe est la limite de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'approximation successives définies par $x_0 \in E$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$ et on a $d(x_n, x) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x)$

Prop 20 : Si une des itérées de f vérifie les hypothèses, alors le thm est vérifié.

Prop 21 : Soient I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2, on considère la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in I$, soit a un point Fixe de f dans I, on distingue les cas suivants :

1) $|f'(a)| < 1$, a est dit attractif et on a
$u_{n+1} - a \sim f'(a)(u_n - a)$
2) $|f'(a)| = 0$, a est dit superattractif, on a
$u_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2}(u_n - a)^2$
3) $|f'(a)| > 1$, a est dit répulsifs, il existe un intervalle J Fermé centré en a tq pour $x_0 \in J \setminus \{a\}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorte de J
4) $|f'(a)| = 1$, on ne peut rien dire

Exemple 22 : $u_0 = -1$, $u_{n+1} = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n}$, la suite admet $\sqrt{3}$ comme point Fixe, qui est attractif

Exemple 23 : $u_0 \leq -1$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$ admet comme point Fixe -1, qui est répulsif.

Thm 24 : (la méthode de Newton), $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R})$ une application convexe telle que pour tout $x \in [a,b]$, $f'(x) > 0$

On suppose de plus, $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, notons α l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[a,b]$

posons $u_0 = b$ et $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$

notons enfin $m = \min_{t\in[a,b]} f'(t)$, $M = \max_{t\in[a,b]} f''(t)$

et $C = \frac{M}{2m}$

Alors si $C(b-\lambda) < 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ

De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $0 \leq u_n - \lambda \leq \frac{1}{C}\left(C(b-\lambda)\right)^{2^n}$

la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc au moins quadratique.

Exemple 25: soit $u_0 = 3$ et pour $n\in\mathbb{N}$, posons $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right)$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, converge vers $\sqrt{5}$ et l'on a $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$0 \leq u_n - \sqrt{5} \leq 2\left(\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\right)^{2^n}$$

Application 26: soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]0,\frac{\pi}{2}]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$

alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}\log(n)}{10 n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\log(n)}{n\sqrt{n}}\right)$

(Dev 1)

III/ Itérations de suites et ensemble de Cantor

DÉF 27: $K_0 = [0,1]$, introduisons $f_1 : x \mapsto \frac{x}{3}$ et $f_2 : x \mapsto \frac{x+2}{3}$

On définit par récurrence K_n, tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $K_{n+1} = f_1(K_n) \cup f_2(K_n)$

Prop 28: $\forall n\in\mathbb{N}$, $K_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}$ où les $J_{n,k}$ sont 2^n intervalles disjoints de longueur $\frac{1}{3^n}$, donnés par

$$J_{n,k} = \left[\frac{k_1}{3} + \frac{k_2}{3^2} + \dots + \frac{k_n}{3^n}, \frac{k_1}{3} + \frac{k_2}{3^2} + \dots + \frac{k_n}{3^n} + \frac{1}{3^n}\right]$$

avec $k_i \in \{0,2\}$

DÉF 29: On définit l'ensemble de Cantor par $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$

Prop 30: Soit $f : I \to \mathbb{R}$, C^2, I intervalle et on considère la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in I$, soit a un point fixe de f dans I

Si $|f'(a)| > 1$, alors a est dit répulsif, en effet, il existe un intervalle J fermé centré en a tel que pour $x_0 \in J$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorte de J.

Prop 31: Considérons la fonction tente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 3(1-x) & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

Introduisons la suite itérée $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = a$

l'ensemble des points de départs tq $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné est l'ensemble de Cantor.

(Dev 2)

Références: les maths en tête, analyse, Xavier Gourdon

Leçons pour l'agrégation de maths, Maximilien Dreveton, Joachim Lhabouz

Préparation à l'oral de l'agreg, Leçon d'analyse, Karine Madère