Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques.

Kevin Quirin et Pierre Vigué

2011-2012

Dans la suite, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définitions, séries à termes positifs

1.1 Définitions

Définition. *Soit $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La série de terme général u_n est la suite $(S_n)_n$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On note cette série $\sum u_n$.

S_n est la somme partielle d'indice n.

On dit que $\sum u_n$ converge si la suite $(S_n)_n$ converge *(sinon, on dit qu'elle* diverge*), et dans le cas de la convergence, $\lim S_n$ est la somme de la série, notée $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.*

Si $\sum u_n$ converge, on définit pour tout n le reste d'indice n *par*

$$R_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

Exemple Soit $q \in \mathbb{K}$. La série $\sum q^n$ est appelée série géométrique, qui converge *si et seulement si* $|q| < 1$.

Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Définition. *Une série $\sum u_n$ est dite* de Cauchy *si $(S_n)_n$ est une suite de Cauchy.*

Proposition. *La série $\sum u_n$ converge* si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon.$$

Proposition. *Si $\sum u_n$ converge, alors* $\lim u_n = 0$.

Définition. *Une série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si $\sum |u_n|$ converge.*

Théorème. *Une série absolument convergente est convergente.*

1.2 Comparaison

Dans la suite, $(u_n)_n, (v_n)_n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$.

Théorème. $\sum u_n$ *converge* si et seulement si (S_n) *est majorée.*

Théorème. *On a les résultats suivants :*
- *Si* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$, *alors*
$$\left(\left(\sum v_n \text{ converge }\right) \Rightarrow \left(\sum u_n \text{ converge}\right)\right)$$
- *Si* $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, *alors*
$$\left(\left(\sum v_n \text{ converge }\right) \Rightarrow (\sum u_n \text{ converge}\right)\right)$$

Théorème. *On suppose que* $u_n \sim v_n$. *Alors :*
- *Si* $\sum u_n$ *converge, alors* $\sum v_n$ *aussi et les restes des séries sont équivalents.*
- *Si* $\sum u_n$ *diverge, alors* $\sum v_n$ *aussi et les sommes partielles sont équivalentes.*

Application : formule de Stirling
$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

Exemple : développement asymptotique de la suite définie par $u_{n+1} = \sin u_n$ et $u_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$.

1.3 Critères usuels

Dans ce paragraphe, on suppose $u_n > 0$ pour tout n.

Proposition (Règle de d'Alembert)**.** *On suppose* $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *existe et vaut* $\lambda \in [0, \infty]$.
- *si* $\lambda < 1$, *alors* $\sum u_n$ *converge.*
- *si* $\lambda > 1$, *alors* $\sum u_n$ *diverge.*
- *si* $\lambda = 1^+$, *alors* $\sum u_n$ *diverge.*

Proposition (Règle de Cauchy)**.** *On suppose* $\lim \sqrt[n]{u_n}$ *existe et vaut* $\lambda \in [0, \infty]$.
- *si* $\lambda < 1$, *alors* $\sum u_n$ *converge.*
- *si* $\lambda > 1$, *alors* $\sum u_n$ *diverge.*
- *si* $\lambda = 1^+$, *alors* $\sum u_n$ *diverge.*

Proposition (Règle de Raab-Duhamel)**.** *On suppose que*
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{a}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}.$$
Si $a > 1$ *et* $\alpha > 1$, *alors* $\sum u_n$ *converge.*

1.4 Comparaison à des séries usuelles

Proposition (Séries de Riemann)**.** *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Alors* $\sum n^{-\alpha}$ *converge* si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition (Séries de Bertrand)**.** *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Alors* $\sum \dfrac{1}{n^\alpha \log^\beta n}$ *converge* si et seulement si $(\alpha > 1)$ *ou* $(\alpha = 1$ *et* $\beta > 1)$.

La combinaison des résultats du 1.2 et sur les séries géométriques, de Riemann et de Bertrand permet de traiter de nombreux exemples.

Exemples :
- $\sum \dfrac{\sin^2 n}{n^2}$ converge.
- La série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

2 Cas général

On revient maintenant au cas $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

2.1 La transformation d'Abel

Principe de la méthode :
Soit $u_n = \alpha_n v_n$. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k + \alpha_n S_n.$$

Théorème (Règle d'Abel)**.** *Avec les notations précédentes :*
si (α_n) est positive, décroissante, tend vers 0, et (S_n) bornée, alors $\sum u_n$ converge.

Application : Critère des séries alternées
Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ décroissante et tendant vers 0. Alors $\sum (-1)^n a_n$ converge, et

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leqslant a_{n+1}.$$

Exemple : $\sum \dfrac{e^{in\theta}}{n}$ converge pour tout $\theta \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$.

2.2 Ordre des termes

Définition. *On dit que $\sum u_n$ est* commutativement convergente *et de somme S si pour toute bijection $\varphi \ : \ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sum u_{\varphi(n)}$ converge et a pour somme S.*

Théorème. *Sont équivalentes :*
- *$\sum u_n$ converge absolument*
- *$\sum u_n$ converge commutativement.*

Théorème (de Riemann)**.** *Soit $\sum u_n$ une série réelle semi-convergente, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*
Alors il existe une bijection $\varphi \ : \ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\sum u_{\varphi(n)}$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi(n)} = \alpha.$$

Théorème (Sommation par paquets)**.** *Soit $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ une partition de $\mathbb{N}$ et $\sum u_n$ une série commutativement convergente. Alors $\forall \alpha \in A$, $\sum_{n \in I_\alpha} u_n$ est commutativement convergente, vers S_α, et $\sum_{\alpha \in A} S_\alpha$ converge commutativement avec*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{\alpha \in A} \sum_{n \in I_\alpha} u_n$$

Théorème. *Si une série converge, alors toute série obtenue par regroupement de termes consécutifs converge aussi vers la même limite. Pour une série à termes positifs, toute série obtenue par regroupement de termes consécutifs est de même nature.*

Exemple : on note p_n le $n^{\text{ème}}$ entier naturel non nul dont l'écriture décimale ne comporte pas de 9. Alors $\sum \frac{1}{p_n}$ converge.

2.3 Produit de convolution

Théorème (de Mertens)**.** *Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente de somme U, et soit $\sum v_n$ une série convergente de somme V.*
Alors la série $\sum w_n$, où $w_n = \sum_{i=0}^{n} u_i v_{n-i}$, converge, et a pour somme UV.

Exemple : contre-exemple de Cauchy Avec $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, la série produit diverge.

2.4 Séries doubles

Théorème. *Soit $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une suite à double entrée. Sont équivalentes :*

(i) Pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\sum_p u_{p,q}$ converge abolument et $\displaystyle\sum_q \left(\sum_{p=0}^{\infty} |u_{p,q}|\right)$ converge

(ii) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sum_q u_{p,q}$ converge abolument et $\displaystyle\sum_p \left(\sum_{q=0}^{\infty} |u_{p,q}|\right)$ converge

Dans ce cas,

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}.$$

Exemple :

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k) - 1) = 1,$$

où ζ est la fonction de Riemann

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}.$$

3 Utilisation de fonctions

3.1 Utilisation d'une intégrale

Théorème. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ décroissante, continue par morceaux. Alors $\sigma f(n)$ et $\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t$ ont même nature.*

Exemple : On a :

$$E\left(\sum_{n=1}^{10^9}\right) = 2997.$$

Théorème. *Soient $x_0 \geqslant 0$ et $f : [x_0, \infty) \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si $\displaystyle\int_{x_0}^{\infty} |f'(t)|\mathrm{d}t$ converge, alors $\sum f(n)$ et $\displaystyle\int_{x_0}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.*

Application : On peut prolonger $\zeta : \{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s)\} \to \mathbb{C}$ à $\{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > 0\}\backslash\{1\}$.

3.2 Séries entières

Définition. *On appelle* série entière *toute série de fonctions de la forme $\sum_n a_n z^n$, où z est une variable complexe, et $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.*

On appelle rayon de convergence *le nombre*

$$R = \sup\{r \geqslant 0 \mid \exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |a_n r^n| < M\}.$$

Théorème (d'Abel angulaire)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$, telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque unité. Pour $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2})$, on pose*

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1 \mid \exists \rho > 0,\ \exists \varphi \in [-\theta_0, \theta_0],\ z = 1 - \rho e^{i\varphi}.$$

Alors

$$\lim_{z\to 1, z\in\Delta_{\theta_0}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Exemple : On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \to 1, x<1} \arctan x = \frac{\pi}{4}.$$

Théorème (taubérien faible). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$, et soit f la somme de cette série sur le disque unité. On suppose :*

$$\exists S \in \mathbb{C}, \ \lim_{x \to 1, x<1} f(x) = S \ \text{ et } a_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Alors $\sum a_n$ converge, vers S.

3.3 Séries de Fourier

Définition. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, continue par morceaux. On appelle* coefficients de Fourier *de f les nombres :*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \ c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \mathrm{d}t.$$

On appelle série de Fourier *associée à f la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$.*

Théorème (de Dirichlet). *Si f est 2π-périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{inx}$ converge vers $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.*

Application : Formule d'Euler

On définit les nombres de Bernoulli b_n par

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n.$$

On a alors :

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2n)!} b_{2k}.$$

Théorème (Formule de Parseval). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux. Alors $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ converge, et*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

Exemple : on peut retrouver avec la formule de Parseval :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Théorème (Formule sommatoire de Poisson). *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On pose pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(n) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi nt} \mathrm{d}t$. Alors*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

Application : Pour tout $s > 0$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = s^{-1/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi k^2 / s}.$$