235

Problèmes d'Interversion de Limite et d'Intégrales

I- Interversion Limite-Intégrale

1- Théorèmes fondamentaux

Dans toute cette partie, On fixe $(X,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré.

Th1 (Beppo-Levi)
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ suite croissante de fonctions positives mesurables sur X, $f := \lim_{n\to+\infty} f_n$
Alors $\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu$

Ex2 $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}dx$, $n\in\mathbb{N}^*$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} I_n(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha<1 \\ +\infty & \text{si } \alpha\geq 1\end{cases}$

Th3 (Lemme de Fatou)
$(f_n)_{n\geq 1}$ suite de fonctions mesurables positives, $0 \leq \int_X \underline{\lim}\, f_n\,d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n\,d\mu < +\infty$

Ex4 $(f_n)_{n\geq 1}$ suite de fonctions intégrables convergent simplement vers f,
Si $\sup_n \int_X |f_n|\,d\mu < +\infty$ alors f est intégrable

Ex5 Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ croissante, continue en 0 et 1 et dérivable presque partout sur $[0,1]$
Alors $\int_0^1 f'(x)\,dx \leq f(1)-f(0)$

Th6 (Convergence Dominée)
Soient $(f_n)_{n\geq 1}$ suite de fonctions intégrables, f fonction mesurable telle que:
(i) $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ μ.p.p
(ii) il existe g positive intégrable telle que $\forall n\geq 1$, $\forall x\in X$ $|f_n(x)|\leq g(x)$
Alors f est intégrable et $\lim_n \int_X f_n\,d\mu = \int_X f$.

C-Ex7 L'hypothèse de Domination n'est pas nécessaire. Soit f continue nulle en dehors de $[0,1]$, On pose pour $n\geq 1$, $x\in\mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{f(x+n)}{n}$
Alors $\lim_{n\to+\infty} f_n = 0 \in L^1(\mathbb{R})$ et $\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 0$.

Ex8 $J_n(\alpha) = \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x}dx$, $\lim_{n\to+\infty} J_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$ si $\alpha>1$
$= +\infty$ si $\alpha\leq 1$

Th9 (Interversion Séries-Intégrale)
Soit (φ_n) suite de fonction mesurable telle que $\sum_{n\geq 1}\int_X |\varphi_n|\,d\mu < +\infty$
Alors φ_n, $\sum_{n\geq 1}|\varphi_n|$ et la fonction définie μ.p.p $\sum_{n\geq 1}\varphi_n$ sont intégrables et $\int_X\left(\sum_{n\geq 1}\varphi_n\right)d\mu = \sum_{n\geq 1}\int_X \varphi_n\,d\mu$

Appli10 (Lemme de Borel-Cantelli)
$(A_n)_{n\geq 1}$ famille de mesurables, $\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n) < +\infty \Rightarrow \mu(\overline{\lim_n}\, A_n) = 0$

Appli11 $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $k\in\mathbb{N}^*$, il existe $R\geq 0$ tel que pour $r\geq R$,
$A^{k-1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(re^{it})^k(re^{it}I_n - A)^{-1}dt$

Appli12 (Théorème de Cayley-Hamilton) $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, χ_A polynôme caractéristique de A, $\chi_A(A)=0$

2- Régularité des intégrales à paramètre

Dans cette partie, $(X,\mathcal{T},\mu)$ est un espace mesuré, (E,d) est un espace métrique, on note $f: E\times X\to\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $F: u\in E\mapsto \int_X f(u,x)\,\mu(dx)$

Th13 (Continuité sous le signe intégral)
On suppose que (i) $\forall u\in E$, $x\mapsto f(u,x)$ est mesurable
(ii) presque pour tout $x\in X$, $u\mapsto f(u,x)$ est continue sur E
(iii) il existe $g\in L^1(X)$ telle que $\forall u\in E$, $|f(u,x)|\leq g(x)$ p.p $x\in X$
Alors F est bien définie et continue sur E.

Ex14 Pour $a,b>0$, $J(a,b) = \int_{\mathbb{R}}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{ab(a+b)}$

Appli15 Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$,
$F: v\mapsto \int_0^v f(t)\,dt$ est continue sur $\mathbb{R}$

Appli16 (Théorème de D'alembert-Gauss) Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant,
Alors P admet une racine sur $\mathbb{C}$.

C-Ex17 $F: [0,+\infty[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\int_0^{+\infty} xe^{-xt}dt$ n'est pas continue car $f:(x,t)\mapsto xe^{-xt}$ n'est pas dominée.

Th18 (Dérivabilité sous le signe intégrale) $E=I$ intervalle ouvert non vide de I
On suppose que (i) $\forall u\in I$, $x\mapsto f(u,x)$ est intégrable
(ii) p.p $x\in X$, $u\mapsto f(u,x)$ est dérivable et on note $\frac{\partial f}{\partial u}(\cdot,x)$ sa dérivée
(iii) $\exists g\in L^1(\mathbb{R})$ positive telle que $\forall u\in I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right|\leq g(x)$ p.p $x\in X$
Alors F est dérivable sur I et $F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\,\mu(dx)$

Ex19 Étude de $F: x\mapsto\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt$ et Calcul de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$

Rq20 On peut remplacer dérivable par $\mathcal{C}^k$ et avoir une hypothèse de domination sur $\frac{\partial^j f}{\partial u^j}(u,\cdot)$ pour $j=1,\dots,k$, $u\in I$, Alors F est de classe $\mathcal{C}^k$ et $F^{(j)}(u) = \int_X \frac{\partial^j f}{\partial u^j}(u,x)\,\mu(dx)$

Th21 (Holomorphie sous le signe intégral) $E=U$ ouvert de $\mathbb{C}$
On suppose que (i) $\forall z\in U$, $x\mapsto f(z,x)$ est mesurable
(ii) p.p $x\in X$, $z\mapsto f(z,x)$ est holomorphe
(iii) $\exists g\in L^1(X)$, telle que $\forall z\in U$, $|f(z,x)|\leq g(x)$ p.p $x\in X$
Alors F est holomorphe sur U et $F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)\,\mu(dx)$