254

Espaces de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et distributions tempérées. Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

I/ Espaces de Schwartz et distributions tempérées

1) Espaces de Schwartz

<u>déf</u> : On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions C^∞ qui sont à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, $\|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)\|_\infty < +\infty$

<u>ex</u> : • $C_c^\infty \subset \mathcal{S}$, $x \mapsto e^{-x^2} \in \mathcal{S}$

• En revanche $\mathcal{S}$ ne contient pas de fractions rationnelles non-nulles.

On munit $\mathcal{S}$ des <u>semi-normes</u> $N_p(\varphi) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq p \\ |\beta| \leq p}} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)\|_\infty$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

<u>Prop</u> : $\mathcal{S}$ est un ev métrisable et complet.

<u>Prop</u> : • C_c^∞ est dense dans $\mathcal{S}$, ie $\forall \varphi \in \mathcal{S}\ \exists (\varphi_n) \in (C_c^\infty)^{\mathbb{N}}$ tq $\forall p \in \mathbb{N}$ $N_p(\varphi - \varphi_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

• $\mathcal{S}$ est dense dans L^p pour $1 \leq p < +\infty$.

<u>déf</u> : $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d\ \exists N \in \mathbb{N}\ \exists C > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^d\ |\partial^\alpha \varphi(x)| \leq C(1+|x|)^N\}$

<u>Prop</u> : 1) $\mathcal{S}$ est stable par multiplication par $f \in \mathcal{O}_M$
En particulier par multiplication par des polynômes
2) $\mathcal{S}$ est stable par dérivation
3) $\mathcal{S}$ est stable par convolution.

<u>Prop</u> : La dérivation et la multiplication par un polynôme sont continues de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$.

2) Distributions tempérées.

<u>déf</u> : $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
C'est-à-dire que c'est l'ensemble des formes linéaires T sur $\mathcal{S}$ tq $\exists p \in \mathbb{N}\ \exists C \geq 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C\, N_p(\varphi)$.

<u>ex</u> : $\mathcal{S} \subset L^p \subset \mathcal{S}'$, $L^1_{loc} \not\subset \mathcal{S}'$, $C^\infty \not\subset \mathcal{S}'$

$\mathcal{O}_M \subset \mathcal{S}'$, $\delta \in \mathcal{S}'$, $vp(1/x) \in \mathcal{S}'$ où $vp(1/x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi}{x}$

<u>déf</u> : Convergence des distributions.
On dit que $(T_n) \in \mathcal{S}'^{\mathbb{N}}$ converge vers $T \in \mathcal{S}'$ si $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ $\langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow[n \to \infty]{} \langle T, \varphi \rangle$

<u>déf</u> : Support
On dit que T est nulle sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^d$ si $\langle T, \varphi \rangle = 0$ $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, $\operatorname{supp} \varphi \subset U$.
Le support de T est le plus grand ouvert sur lequel T est nulle (c'est une réunion d'ouverts).

<u>ex</u> : $\operatorname{supp} \delta_0 = \{0\}$, $\operatorname{supp} vp(1/x) = \mathbb{R}$.

<u>déf</u> : On note $\mathcal{E}'$ l'espace des distributions tempérées à support compact.

3) Opérations sur les distributions tempérées

a) Si $f \in \mathcal{O}_M$ et $T \in \mathcal{S}'$, on définit $fT \in \mathcal{S}'$ par $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, $\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle$.

b) Dérivation
On définit $\partial_i T$ par $\langle \partial_i T, \varphi \rangle = -\langle T, \partial_i \varphi \rangle$
Plus généralement $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$

Prop : Si $(T_n) \in \mathcal{S}'^{\mathbb{N}}$ converge vers $T \in \mathcal{S}'$ alors $\partial^\alpha T_n$ converge vers $\partial^\alpha T$ dans $\mathcal{S}'$.

ex : de dérivées

1) Si $H = 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}$, $H' = \delta_0$, $H'' = \delta_0'$.

2) $|.|' = \operatorname{sgn}$, $|.|'' = 2\delta_0$.

3) $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $T' = 0$ ssi T est constante.

Prop : Règle de Leibniz

On utilise les notations indicielles :

$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_d!$ et $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$

Alors, si $T \in \mathcal{S}'$ et $f \in \mathcal{O}_M$,

$$\partial^\alpha (f T) = \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ \beta \in \mathbb{N}^d}} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \, \partial^{\alpha-\beta} T.$$

c) Convolution

- Si $T \in \mathcal{E}'$ et $\varphi \in \mathcal{S}$, $(T * \varphi)(x) := \langle T, y \mapsto \varphi(x-y) \rangle$

Alors $T * \varphi \in \mathcal{S}$ et $\partial^\alpha (T * \varphi) = \partial^\alpha T * \varphi$
$= T * \partial^\alpha \varphi$.

- Si $T \in \mathcal{E}'$ et $S \in \mathcal{S}'$, $\langle S * T, \varphi \rangle := \langle S, T * \varphi \rangle$ et $S * T \in \mathcal{S}'$. $:= \langle T * S, \varphi \rangle$

ex : $\forall S \in \mathcal{S}'$, $\delta_0 * S = S$

$$\left(\begin{array}{l} F(T*S) = F(T).F(S) \\ F(TS) = F(T) * F(S) \end{array} \right\} \forall T, S \in \mathcal{S} \right)$$

II / Transformation de Fourier

1) Transformation de Fourier de L^1

déf : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on appelle transformée de Fourier de f la fonction notée $\hat{f}$ ou $F(f)$ définie par $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$ $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i x.\xi} f(x)\, dx$.

Prop : • $\hat{f}$ est continue

• $\hat{f}(\xi) \xrightarrow[\|\xi\| \to \infty]{} 0$

• $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$

Théorème : Inversion de Fourier

Soit $f \in L^1$ tq $\hat{f} \in L^1$ alors $(2\pi)^{-d} \overline{F}(F(f)) = f$

où $\overline{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i x.\xi} f(x)\, dx = F(f)(-\xi)$

Théorème : Formule sommatoire de Poisson

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ tq :

• $\exists M > 0, \alpha > 1$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$ $|f(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^\alpha}$

• $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty$

Alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Application : Echantillonnage de Shannon

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tq • $\operatorname{supp}(\hat{f}) \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

• $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)| < +\infty$

Alors $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \sin(\pi(x-n))$ et la convergence est uniforme

DVP !

2) Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$.

__Théorème__ : Inversion de Fourier
$\mathcal{S}$ est stable par $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ est continue et même $\forall p \in \mathbb{N}\ \exists C_p \geq 0$ tq $N_p(\hat{\varphi}) \leq C_p N_{p+n+1}(\varphi)$
$\mathcal{F}$ est un automorphisme de $\mathcal{S}$ d'inverse $(2\pi)^{-d}\overline{\mathcal{F}}$

3) Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$

Si $f \in L^1 \subset \mathcal{S}'$, on a $\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle$ par le théorème de Fubini. Il vient :

__déf__ : Soit $T \in \mathcal{S}'$. On définit $\hat{T}$ par
$$\forall \varphi \in \mathcal{S} \quad \langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle$$
On a $\forall \varphi \in \mathcal{S}$
$$|\langle \hat{T}, \varphi \rangle| = |\langle T, \hat{\varphi} \rangle| \leq C\, N_p(\hat{\varphi}) \leq C'\, N_{p+n+1}(\varphi)$$
donc $\hat{T} \in \mathcal{S}'$.

__Théorème__ : Inversion de Fourier
$\mathcal{F}$ est un automorphisme de $\mathcal{S}'$ d'inverse $(2\pi)^{-d}\overline{\mathcal{F}}$

__Prop__ : Si $T_n \to T$ dans $\mathcal{S}'$ alors $\hat{T_n} \to \hat{T}$ dans $\mathcal{S}'$.

__Prop__ : Si $T \in \mathcal{E}'$, $\hat{T} \in C^\infty$ et $\hat{T}(\xi) = \langle T, e^{-ix.\xi} \rangle$

__Prop__ :
- $\forall (T,S) \in \mathcal{E}' \times \mathcal{S}'$ $\mathcal{F}(T*S) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(S)$
- $\mathcal{F}(\partial^\alpha T) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \mathcal{F}(T)$
- $\mathcal{F}(x^\alpha T) = i^{|\alpha|}\partial^\alpha \mathcal{F}(T)$

Les deux dernières assertions expriment que $\mathcal{F}$ échange régularité et décroissance à l'infini

III / Application à la résolution d'équations différentielles

1) Résolution de l'équation de la chaleur

(1) $(\partial_t - \Delta)\phi = 0$, $\phi(0,\cdot) = \phi_0$ (dimension 1)

__Méthode__ : $\mathcal{F}$ transforme (1) en une EDO dont la solution est $\hat{\phi}(t,\xi) = e^{-t\xi^2}\hat{\phi_0}(\xi)$
On cherche ensuite K tel que $\hat{K} = e^{-t\xi^2}$
On a alors $\hat{\phi} = \hat{K}\hat{\phi_0} = \widehat{K*\phi_0}$ puis $\phi = K*\phi_0$

remarques : 1) On peut aussi résoudre (1) avec la condition initiale δ_0 (solution élémentaire) : $K(t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\xi^2/4t} H(t)$

2) Irréversibilité et effet régularisant de l'éq. Propagation à vitesse infinie.

2) Résolution de l'équation de Laplace

(2) $\Delta T = 0$, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

__Théorème__ : Les solutions de (2) sont des polynômes.

__Corollaire__ : Soit f une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^d$.
- Si f est à croissance modérée, f est polynomiale
- Si f est bornée, f est constante.
- Si f tend vers 0 à l'infini, f est nulle.

DVP2

__Références__ : - Cours d'analyse, J.M Bony
- Eléments de distributions et d'EDP, Zuily

Formule sommatoire de Poisson

Simon André

Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit $\hat{f}$ par $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi x t} dt$.

Théorème. *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ vérifiant :*

1. $\exists M > 0$, $\alpha > 1$ *tels que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \dfrac{M}{(1+|x|)^\alpha}$ *(en particulier, $f \in L^1(\mathbb{R})$)*
2. $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty$

Alors on a, pour tout réel x :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$$

En particulier :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)$$

Démonstration. La série $\sum f(\,\cdot + n)$ (indexée par $\mathbb{Z}$) converge normalement sur tout compact. En effet, pour $R > 0$ et $|x| \leq R$, on peut minorer $|x+n|$ par $|n|/2$ pour $|n| \geq 2R$; on obtient $|f(x+n)| \leq M \times (1 + |n|/2)^{-\alpha}$, terme général d'une série convergente.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n)$. Ce qui précède montre que g est continue (car f l'est). De plus, g est 1-périodique.

On vérifie ensuite que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(g)| < +\infty$. Pour cela, on montre que $c_n(g) = \hat{f}(n)$. La convergence normale de g sur le segment $[0,1]$ justifie l'interversion série - intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
c_n(g) &= \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k) e^{-2i\pi n x} dx \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+k) e^{-2i\pi n x} dx \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+k) e^{-2i\pi n (x+k)} dx \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(x) e^{-2i\pi n x} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi n x} dx = \hat{f}(n)
\end{aligned}$$

Il reste à voir, pour conclure, que g est somme de sa série de Fourier. Pour cela, on pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(g) e^{2i\pi n x}$. h est une fonction continue car la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(g) e^{2i\pi n \cdot}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et les $e^{2i\pi n \cdot}$ sont continues. h est de plus 1-périodique. On vérifie ensuite que $c_n(h) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ce qui démontre que

$h = g$. En effet, l'application qui à une fonction continue périodique associe la suite de ses coefficients de Fourier est injective (par exemple car c'est une isométrie pour les normes 2 (égalité de Parseval)). ■

Corollaire (Échantillonnage de Shannon). *Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ telle que :*

1. $\mathrm{supp}(\hat{f}) \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
2. $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |f(n)| < +\infty$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n)\ \mathrm{sinc}(\pi(x - n))$$

De plus, la convergence de la série ci-dessus est uniforme sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que $\hat{f}$ vérifie les hypothèses du théorème (formule sommatoire) : $\hat{f}$ est continue car f est L^1 (par convergence dominée), puis l'hypothèse sur le support montre que $\hat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Les deux autres hypothèses sont également clairement vérifiées. On peut donc appliquer la formule sommatoire à $\hat{f}$, ce qui fournit l'égalité suivante, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n + \xi) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(-n) e^{2i\pi n\xi}$$

Or, on peut écrire $\hat{f}(\xi) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n + \xi)\chi(\xi)$ (grâce à l'hypothèse sur le support de $\hat{f}$), où χ désigne $1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$. En combinant les deux égalités précédentes, on obtient, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(-n) e^{2i\pi n\xi} \chi(\xi)$$

On peut ensuite effectuer une transformation de Fourier inverse. L'échange somme - intégrale est justifié car l'intégration sur $\mathbb{R}$ se ramène à une intégration sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (grâce à la présence de l'indicatrice), et parce que la série converge normalement sur ce segment en vertu de la deuxième hypothèse du corollaire. Pour obtenir l'égalité souhaitée, il suffit donc de constater que :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2i\pi\xi(n-x)} d\xi = \mathrm{sinc}(\pi(x - n)), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

La fonction sinus cardinal est bornée sur $\mathbb{R}$, et $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |f(n)| < +\infty$ par hypothèse, donc la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n)\ \mathrm{sinc}(\pi(\cdot - n))$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, donc uniformément convergente. ■

Commentaire : une fonction f vérifiant les hypothèses du corollaire est entièrement déterminée par la suite $(f(n))_{n \in \mathbf{Z}}$. Il n'y a donc aucune perte d'information lorsque l'on échantillonne la fonction f en prenant ses valeurs en les entiers. Application : l'oreille humaine ne perçoit pas les fréquences supérieures à 20000 Hz, ce qui explique pourquoi les CDs sont échantillonnés à environ 40000 Hz.

Références : Peyrière, *Convolution, séries et intégrales de Fourier*, page 78. Zuily-Queffélec, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, page 93.

Équation de Laplace dans $\mathcal{S}'$

Simon André

Théorème. *Les solutions tempérées de l'équation $\Delta T = 0$ dans $\mathbb{R}^n$ sont des polynômes.*

Démonstration. Soit T vérifiant $\Delta T = 0$. La transformation de Fourier appliquée à cette égalité donne $|\xi|^2\hat{T} = 0$. On en déduit que $\operatorname{supp}(\hat{T}) \subset \{0\}$. En effet, soit $\varphi \in \mathcal{S}$ de support inclus dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors φ s'annule sur un voisinage de 0 donc la fonction ψ définie par $\psi(\xi) = \varphi(\xi)/|\xi|^2$ pour $\xi \neq 0$ et $\psi(0) = 0$ est dans $\mathcal{S}$, donc $\langle \hat{T}, \varphi\rangle = \langle \hat{T}, |\xi|^2\psi\rangle = \langle |\xi|^2\hat{T}, \psi\rangle = 0$.

Nous allons montrer que $\hat{T}$ est une combinaison linéaire de dérivées de la masse de Dirac en 0, ce qui permettra de conclure en appliquant la transformée de Fourier inverse, puisque $\mathcal{F}(\partial^\alpha\delta) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha$.

$\hat{T}$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}$ donc, par définition, il existe un réel $C > 0$ et un entier p tels que $\forall\varphi \in \mathcal{S}$, $|\langle \hat{T}, \varphi\rangle| \leqslant \mathrm{N}_p(\varphi)$ où $\mathrm{N}_p(\varphi) = \sup_{|\alpha|\leqslant p, |\beta|\leqslant p} \|x^\alpha\partial^\beta\varphi(x)\|_{\mathrm{L}^\infty}$.

Soit $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty$ valant 1 au voisinage de 0. Soit $\varphi \in \mathcal{S}$, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$r(x) = \varphi(x) - \sum_{|\alpha|\leq p} \frac{\partial^\alpha\varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha\psi(x)$$

r est donc dans $\mathcal{S}$ en tant que combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{S}$. En outre, l'expression suivante (obtenue à l'aide du développement de Taylor de φ en 0 à l'ordre p) montre que r est nulle en 0 ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur à p (car ψ vaut 1 au voisinage de 0), pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$r(x) = \sum_{|\alpha|\leq p} \frac{\partial^\alpha\varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha(1 - \psi(x)) + \varepsilon(x)x^p$$

avec ε de classe $\mathcal{C}^\infty$ et négligeable devant 1 en 0.

Pour pouvoir conclure, il suffit de montrer que $\langle \hat{T}, r\rangle = 0$, car on aura alors, en notant $c_\alpha = \langle \hat{T}, \psi(x)x^\alpha\rangle/\alpha!$:

$$\langle \hat{T}, \varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\leq\beta} c_\alpha\partial^\alpha\varphi(0)$$

Montrons que $\langle \hat{T}, r\rangle = 0$:

Pour $\varepsilon > 0$, on pose $\psi_\varepsilon = \chi_\varepsilon * \rho_\varepsilon$ où χ_ε désigne l'indicatrice de $\mathrm{B}'(0, 2\varepsilon)$ et, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\rho(\frac{x}{\varepsilon})$ avec ρ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ positive, d'intégrale valant 1 et de support inclus dans $\mathrm{B}'(0, 1)$. Les ρ_ε sont donc des approximations de l'unité de support inclus dans $\mathrm{B}'(0, \varepsilon)$. Les propriétés de régularisation de la convolution démontrent que ψ_ε est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $\partial^\alpha\psi_\varepsilon = \chi_\varepsilon * \partial^\alpha\rho_\varepsilon$. De plus ψ_ε est à support dans $\mathrm{B}'(0, 3\varepsilon)$, comprise entre 0 et 1, et égale à 1 sur $\mathrm{B}'(0, \varepsilon)$.

On écrit $\langle \hat{T}, r\rangle = \langle \hat{T}, r - r\psi_\varepsilon\rangle + \langle \hat{T}, r\psi_\varepsilon\rangle$. Le premier terme est nul car $r - r\psi_\varepsilon$ est nulle au voisinage de 0. Nous allons majorer le second terme par une constante fois ε, ce qui permettra de conclure. On a (grâce à la nullité de $\partial^\beta(r\psi_\varepsilon)$ en dehors de $\mathrm{B}'(0, 3\varepsilon)$ pour tout β) :

$$
\begin{aligned}
|\langle \hat{T}, r\psi_\varepsilon\rangle| \leq \mathrm{N}_p(r\psi_\varepsilon) &= \sup_{|\alpha|\leqslant p, |\beta|\leqslant p} \|x^\alpha \partial^\beta (r\psi_\varepsilon)(x)\|^\infty_{\mathbb{R}^n} \\
&= \sup_{|\alpha|\leqslant p, |\beta|\leqslant p} \|x^\alpha \partial^\beta (r\psi_\varepsilon)(x)\|^\infty_{\mathrm{B}'(0,3\varepsilon)} \\
&\leq \mathrm{K} \sup_{|\beta|\leqslant p} \|\partial^\beta (r\psi_\varepsilon)(x)\|^\infty_{\mathrm{B}'(0,3\varepsilon)}
\end{aligned}
$$

Or, la formule de Leibniz donne :

$$\partial^\beta (r\psi_\varepsilon) = \sum_{\alpha\leq\beta} \binom{\beta}{\alpha} \partial^\alpha r \; \partial^{\beta-\alpha}\psi_\varepsilon$$

Il suffit donc de majorer les dérivées de r et de ψ_ε sur $\mathrm{B}'(0, 3\varepsilon)$.

1. **Majoration de ψ_ε :** $\partial^\alpha \rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n-|\alpha|}(\partial^\alpha \rho)(x/\varepsilon)$ donc $\|\partial^\alpha \rho_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^1} = C_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|}$ en notant C_α la norme L^1 de $\partial^\alpha \rho$, donc $\|\partial^\alpha \psi_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq C_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|}$.

2. **Majoration de r sur $\mathrm{B}'(0, 3\varepsilon)$:** pour tout $|\alpha|$ inférieur à p, on écrit le développement de Taylor de $\partial^\alpha r$ en 0 à l'ordre $p - |\alpha|$. La nullité de r en 0 ainsi que celle de ses dérivées d'ordre inférieur à p donne (avec $m = p + 1 - |\alpha|$) :

$$\sup_{\mathrm{B}'(0,3\varepsilon)} |\partial^\alpha r(x)| \leq C'_\alpha (3\varepsilon)^m = C''_\alpha \varepsilon^m$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$|\partial^\beta (r\psi_\varepsilon)(x)| \leq \sum_{\alpha\leq\beta} \binom{\beta}{\alpha} C_\alpha C''_{\beta-\alpha} \varepsilon^{p+1-|\alpha|-|\beta-\alpha|} \leq C\varepsilon^{p+1} \leq C\varepsilon$$

■

Comme toute fonction à croissance modérée peut être vue comme une distribution tempérée, on obtient immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire. *Toute fonction harmonique de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ à croissance modérée est polynomiale. Toute fonction harmonique de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ bornée est constante. Toute fonction harmonique de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ qui tend vers 0 à l'infini est nulle.*

Ce résultat est une généralisation du théorème de Liouville qui énonce que toute fonction holomorphe bornée est constante.

On peut démontrer que le potentiel électrostatique $V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 |x|}$ créé par une charge est solution de l'équation de Poisson : $-\Delta V = \frac{q\delta_0}{\epsilon_0}$. Grâce à ce qui précède, on obtient le résultat d'unicité suivant :

Corollaire. *Si W est une autre solution de l'équation de Poisson dans S', alors il existe un polynôme P tel que $W = V + P$. Ainsi, le potentiel électrostatique est l'unique solution de l'équation de Poisson dans S' qui est nulle à l'infini (et donc la seule raisonnable d'un point de vue physique).*

Démonstration. Si W est une autre solution dans S', alors $\Delta(W - V) = 0$. Le résultat découle donc immédiatement du corollaire précédent. ■

Remarque : l'unicité est en fait également vraie dans $\mathcal{D}'$.

Références : Bony, *Cours d'analyse*, pages 116 et 149. Zuily, *Éléments de distributions et d'edp*, page 49.