218

Applications des formules de Taylor

0 Préliminaires

1 Une base des polynômes

Soit $a \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, on considère $B_N = \left\{ P_i = \frac{(X-a)^i}{i!}, 0 \leq i \leq N \right\}$ une base de $\mathbb{R}^N[X]$ et $B_N^* = \left\{ \varphi_i = P \mapsto P^{(i)}(a) \right\}$ sa base duale.

On a, $\forall P \in \mathbb{R}_N[X]$, $P = \sum_{i=0}^{N} \varphi_i(P) P_i = \sum_{i=0}^{N} P^{(i)}(a) \frac{(X-a)^i}{i!}$

Soit I un interval de $\mathbb{R}$, $a \in I$, et $f : I \to \mathbb{R}$ N fois dérivable en a :

$P_N^a(f) = x \mapsto \sum_{i=0}^{N} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)$ la projection de f sur B_N

$R_N^a(f) = f - P_N^a(f)$ le "reste", aussi noté $R_N^f(a,x)$

<u>Prop 0.1</u>. f est polynomiale ssi $\exists n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R} / R_n^a(f) = 0$

<u>Prop 0.2</u> : a est racine de $P \in \mathbb{R}_N[X]$ d'ordre p ssi
$\forall 0 \leq k \leq p-1$, $P^{(k)}(a) = 0$ et $P^{(p)}(a) \neq 0$

2 Formules de Taylor sur $\mathbb{R}$

Th 0.1 [Taylor-Young] Soit I un interval de $\mathbb{R}$, si $f : I \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable en $a \in \mathring{I}$,
alors $R_n^f(a,h) = o(h)$

Th 0.2 [Taylor Lagrange]
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^n$, $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$
Alors $\exists c \in]a,b[$ tq $R_n^f(a, b-a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$

Rq 0.1 : Pour $n=0$, on retrouve l'inégalité des accroissements finis : $\exists c \in]a,b[$ tq $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Th 0.3 [Inégalité de Taylor-Lagrange]
Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^n$ tq $f^{(n)}$ est dérivable, alors
$\forall x \in]a,b[$, $\forall h / x+h \in]a,b[$, $\left| R_n^f(x,h) \right| \leq \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{]a,b[} \left| f^{(n+1)} \right|$

Th 0.4 [Taylor - Reste intégral]
Soient I un interval ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$
alors $\forall x \in I$, $\forall h$ tq $x+h \in I$, $R_n^f(x,h) = \int_x^{x+h} \frac{(x+h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$

Rq 0.2 : Pour $n=0$, on retrouve le th fondamental de l'analyse : $f(a) - f(a+h) = \int_a^{a+h} f'(t) dt$

Rq 0.3 : Les théorèmes 0.1, 0.2 et 0.3 se généralisent pour $f : \mathbb{R}^d \to E$, $(E, \|.\|)$ evn de dim finie

I Applications en analyse

1 Développements limités

Prop 1.1 $f : I \to \mathbb{R}$ admet un DL à l'ordre n en $x_0 \in I$ si $\exists a_0, \dots, a_n$ tq $f(x_0+h) = a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + o(h^n)$
Les $(a_i)_i$ sont alors uniques

Prop 1.2 : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable en x_0, alors elle admet un DL en x_0 à l'ordre n. On connaît de plus une expression pour les $(a_i)_i$

Ex 1.1 : $\cos h = 1 + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{4}h^4 + o(h^4)$

2 Séries entières

Prop 1.3 Si f est développable en série entière en 0, alors la série entière de f est sa série de Taylor en 0.

Ex 1.2 : la solution de $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ est a série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$

DVP 1

Th 1.1 [Bernstein] Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(]-a,a[, \mathbb{R})$
Si $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-a,a[, f^{(2k)}(x) \geq 0$, alors f est développable en série entière sur $]-a,a[$

Ex 1.2 : le rayon de convergence de $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ est $+\infty$

Ex 1.3 : $x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$ ne coïncide pas avec sa série de Taylor en 0

3) Lemme de Morse

Prop 1.3 [Lemme d'Hadamard]
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$; Si $f(0) = 0$, alors $\exists g_1, \dots g_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tq
$\forall x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}, \ f(x_1, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, \dots x_n)$

Prop 1.4 (Application)
Le noyau du morphisme d'algèbres
$\varphi : \begin{array}{l} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(0) \end{array}$ est un idéal principal

DVP 2

Th 1.2 [Lemme de Morse] Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$ tq $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$ et $H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j}$ inversible
Alors $\exists \varphi = (\varphi_1, \dots \varphi_n)$ $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme $W \ni 0 \to V \ni 0$ tq
$f(x) = \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$

II Applications en analyse numérique

1 Méthode de Newton

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R})$, si $\exists x_* \in [a,b]$ tq $\begin{cases} f(x_0) = 0 \\ f'(x_0) \neq 0 \end{cases}$ alors, pour x assez proche de x_*, la suite $\begin{cases} x_0 = x \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$ cvg vers x_* à vitesse quadratique

Prop 2.1 (Application) Calcul effectif de racines

Ex 2.1 Appliquée à la fonction $f : x \mapsto x^2 - a$, la méthode de Newton permet d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{a}$

2 Intégration numérique

Pour $f\,[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a = a_0 < \dots < a_n = b$ une subdivision, on cherche à approcher $f_{|[a_i, a_{i+1}]}$ par un terme de la forme $C_i = \sum_{j \in J} \omega_{ij} f(x_{ij})$, $x_{ij} \in [a_i, a_{i+1}]$, $\sum_{j \in J} \omega_{ij} = 1$, J fini

Ce terme correspond dans certains cas à l'intégration d'une interpolation polynômiale de f en les $(x_{ij})_j$

Définition : on dit qu'une méthode est d'ordre N si elle est exacte pour les polynômes d'ordre $\leq N$

On appelle $E(f) = \int_a^b f - \sum_i (a_{i+1} - a_i) \sum_j \omega_{ij} f(x_{ij})$

l'erreur d'approximation

Th 2.1 [Peano] Si $f \in \mathcal{C}^{N+1}([a,b], \mathbb{R})$ est approximée par une méthode d'ordre N, alors

$$E(f) = \frac{1}{N!} \int_a^b K_N(t)\, f^{(N+1)}(t)\, dt$$

avec $K_N(t) : \begin{array}{l} [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto E(x \mapsto (x-t)_+^N) \end{array}$

Méthode	Condition	Points d'interpolation de $f_{|[a_i, a_{i+1}]}$	Ordre	$\sim E(f)$
Rectangles (gauche)	f $\mathcal{C}^1$	a_i	0	$(b-a)h \, \|f'\|_\infty$
Trapèzes	f $\mathcal{C}^2$	a_i, a_{i+1}	1	$(b-a)h^2 \|f''\|_\infty$
Simpson	f $\mathcal{C}^4$	a_i, $\frac{a_i + a_{i+1}}{2}$, a_{i+1}	3	$(b-a)h^4 \|f^{(4)}\|_\infty$

III Applications en géométrie

Th 3.1 [Taylor-Young] Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f : U \to E$ $(E, \|.\|)$ evn de dim finie

Si f est n fois diff. en $x \in U$, alors

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(x).(h)^k + o(\|h\|^n)$$

Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $a \in U$

Prop 3.1 : Si f admet un min local en a et f diff. en a, alors $Df(a) = 0$

Th 3.2 : Si f deux fois diff en a et $Df(a) = 0$,

(i) a min local $\Rightarrow D^2 f(a)$ positive

(ii) $D^2 f(a)$ définie positive $\Rightarrow a$ est un min local

Ex 3.1 : $f(x,y) = x^2 - y^3$ $\to$ pas de min local en 0, $Df(0) = 0$,

$g(x,y) = x^2 + y^4$ $\to$ min local en 0, $D^2 f(0) \not> 0$

Rq 3.1 Donne la position de f par rapport au plan tangent en tout point

Th 3.2 : $f : I \to \mathbb{R}^2$ courbe paramétrée $\mathcal{C}^\infty$, $t_0 \in I$

La 1ère dérivée non nulle $f^{(2)}(t_0)$ et la 1ère dérivée non colinéaire à celle-ci $f^{(s)}(t_0)$ donnent l'aspect local de la courbe