912 Fonctions récursives primitives et non-primitives. Exemples. 31/03 2015

But: Formaliser la notion de fonction calculable.

Notation: $\bar{x}$ désigne le n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$, n dépendant du contexte.

I Les fonctions récursives primitives

1) Définition et exemples

Def 1: On définit inductivement $\mathcal{F}_p$ l'ensemble des fonctions récursives primitives par:

- Fonctions de base:
  - $\to 0 : () \mapsto 0 \in \mathcal{F}_p$ (fonction constante nulle)
  - $\to \sigma : n \mapsto n+1 \in \mathcal{F}_p$ (fonction successeur)
  - $\to \forall N \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![1,N]\!]\ \pi_k^N(\bar{n}) \mapsto n_k \in \mathcal{F}_p$ ($k^{ème}$ projection)
- Induction:
  - $\to$ composition
    Soit g d'arité n et $h_1, \dots, h_n$ d'arité k
    Si $g, h_1, \dots, h_n \in \mathcal{F}_p$ alors la fonction f suivante est récursive primitive.
    $$f : \bar{x} \mapsto g(h_1(\bar{x}), \dots, h_n(\bar{x}))$$
  - $\to$ Récursion primitive.
    Soit g d'arité k et h d'arité k+2.
    Si g et h sont récursives primitives alors f est récursive primitive.
    $$f(\bar{x}, 0) = g(\bar{x})$$
    $$f(\bar{x}, \sigma(n)) = h(\bar{x}, n, f(\bar{x}, n))$$

Ex 2: Toutes les fonctions constantes sur $\mathbb{N}$ sont primitives récursives:

$$const_k : () \mapsto k.$$

$$const_k() = \underbrace{\sigma(\sigma(\dots\ \sigma}_{k \text{ fois}}(0())\dots))$$

Ex 3: La fonction somme est récursive primitive:

$$+(n, 0) = n$$

$$+(n, \sigma(m)) = \sigma \circ \pi_3^3(n, m, +(n,m))$$

Ex 4: Le produit est récursif primitif.

$$\times(n, 0) = 0$$

$$\times(n, \sigma(m)) = +(\pi_1^3(n, m, \times(n,m)), \pi_3^3(n, m, \times(n,m)))$$

Ex 5: La fonction prédecesseur est réc. prim.

$$pred(0) = 0$$

$$pred(\sigma(m)) = \pi_1^2(m, pred(m))$$

Ex 6: La fonction signe est réc. prim.

$$signe(0) = 0$$

$$signe(\sigma(m)) = \mathbb{1}_2(m, signe(m))$$

où $\mathbb{1}_2$ est la fonction à 2 argument qui renvoi toujours 1.

Ex 7: La fonction différence est réc. prim.

$$-(n, 0) = n$$

$$-(n, \sigma(m)) = pred(-(n, m))$$

② Prédicat récursif primitif.

Def 8: A tout prédicat P d'arité k sur $\mathbb{N}^k$ on peut associer sa fonction caractéristique:

$$f_P(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } P(\bar{x}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

P est dit récursif primitif quand f_P l'est.

Prop 9: Soit P, Q deux prédicats récursifs primitifs. Alors $\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$ sont des prédicats récursifs primitifs.

Ex 10: $(x,y) \mapsto x<y$ est un prédicat récursif primitif car sa fonction caractéristique est $\text{signe}(-(y,x))$.

Ex 11: $\text{div}: (x,y) \mapsto x \mid y$ (x divise y) et $x \mapsto \text{prime}(x)$ (x est premier) sont des prédicats récursifs primitifs.

③ Quantification bornée.

Prop 12: Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, et P un prédicat réc. prim. Alors les prédicats suivant sont récursifs primitifs

- $\forall k \in [\![1,n]\!]\ P(\bar{x},k)$
- $\exists k \in [\![1,n]\!]\ P(\bar{x},k)$

④ Fonctions définies par cas

Prop 13: Soit $g_1, \dots g_n \in \mathcal{F}_P$ et $P_1, \dots, P_n$ des prédicats réc prim.

Alors la fonction f suivante est réc. prim.

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} g_1(\bar{x}) & \text{si } P_1(\bar{x}) \\ \vdots & \\ g_n(\bar{x}) & \text{si } P_n(\bar{x}) \end{cases}$$

⑤ Minimisation bornée

Prop 14: Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, soit P un prédicat réc. prim. Alors la fonction suivante est réc. prim.

$$\mu i \leq m\ P(\bar{x},i) = \begin{cases} \text{le plus petit } i \in [\![0,m]\!] \text{ tel que } P(\bar{x},i) \\ m+1 \quad \text{s'il n'en existe pas.} \end{cases}$$

III Limites des fonctions récursives primitives

Def 15 (fonction d'Ackermann):

$$A(0,n) = \sigma(n)$$
$$A(\sigma(m),0) = A(m,\sigma(0))$$
$$A(\sigma(m),\sigma(n)) = A(m, A(\sigma(m),n))$$

Prop 16: A est calculable par une méthode effective.

Prop 17: A n'est pas primitive récursive.

III Les fonctions μ-récursives.

① Fonctions μ-récursives totales

Def 18: Soit P un prédicat d'arité $k+1$.

P est un prédicat sûr si

$$\forall \bar{x} \in \mathbb{N}^k, \exists i \in \mathbb{N} \; / \; P(\bar{x}, i).$$

Def 19: Soit P un prédicat réc. prim. sûr.
On appelle minimisation non-bornée de P la fonction

$$\mu i P(\cdot, i) : \bar{x} \mapsto \inf \{ i \; / \; P(\bar{x}, i) \}$$

Def 20: L'ensemble des fonction μ-récursives $\mathcal{F}_\mu$ est défini inductivement par

- $\mathcal{F}_p \subset \mathcal{F}_\mu$
- $\mathcal{F}_\mu$ est stable par
  - composition
  - récursion primitive
  - minimisation non-bornée des prédicats sûrs.

Prop 21:

Une fonction est μ-récursive
ssi
elle est calculable par une machine de Turing.

② Fonctions μ-récursives partielles

Def 22: L'ensemble $\mathcal{F}_{\mu part}$ des fonctions μ-récursives partielles est défini inductivement par

- $\mathcal{F}_p \subset \mathcal{F}_{\mu\text{-part}}$
- $\mathcal{F}_{\mu\text{-part}}$ est stable par :
  - composition
  - récursion primitive
  - minimisation non-bornée

si $\nexists i$ tq $P(\bar{x}, i)$ alors $\mu i P(\cdot, i)$ n'est pas défini en $\bar{x}$.

Prop 23:

Une fonction est μ-récursive partielle
ssi
elle est semi calculable par une MT.

Rappel:

f Calculable: Pour tout entier n, la MT qui commence avec le codage de n sur le ruban termine et a sur le ruban final le codage de $f(n)$

f semi-calculable: Pour tout entier n, la MT qui commence avec le codage de n sur le ruban, soit termine avec $f(n)$ sur le ruban, soit ne termine pas.

Rem : On définit des nouveaux ensembles PVIS : on se rend compte qu'ils coïncident avec ceux définis par la MT.

parler de la somme finie, produit fini.

-> Ackermann : décroissance stricte (lexicographique).

-> argument de diagonalisation.

-> énumération des fonctions RP ; $g(n) := f_n(n)+1$ n'est pas RP.

On peut utiliser la même fonction pour les fonctions (non-primitives) récursives partielles.

-> minimisation bornée est dedans ; qu'en est-il pour la non bornée ? $\Rightarrow$ introduct° pour la notion de prédicats sûrs.

QVT : Cantor affiné.

QVT fonctions calculables $\Rightarrow$ récursives.