Abel angulaire et taubérien faible

Ce développement se trouve dans le Gourdon d'analyse.

Théorème. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $\geqslant 1$ *telle que* $\sum a_n$ *converge. On note* f *la somme de la série sur le disque unité. On fixe* $\theta_0 \in [0, \pi/2[$ *et on pose*

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1 \textit{ et } \exists \rho > 0, \theta \in [-\theta_0, \theta_0],\ z = 1 - \rho e^{i\theta}\}.$$

Alors

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Démonstration. On note $S = \sum a_n$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_n$. On va effectuer une transformation d'Abel en écrivant $a_n = R_{n-1} - R_n$. Pour $|z| < 1$, ça donne donc

$$f(z) - S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^n - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^{\infty} R_n (z^n - 1) \quad (1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} R_n (z^{n+1} - z^n) = (z - 1) \sum_{n=0}^{\infty} R_n z^n. \quad (2)$$

Fixons alors $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $R_N < \varepsilon$. On peut écrire

$$|f(z) - S| \leqslant |z - 1| \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| + \varepsilon \frac{|z - 1|}{1 - |z|}.$$

Or, si $|z| < 1$ est suffisamment proche de 1 (disons $|z - 1| \leqslant \alpha$), on a $|z - 1| \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| < \varepsilon$. Maintenant, si $z \in \Delta_{\theta_0}$, on a $z = 1 - \rho e^{i\varphi}$ avec $\varphi \in [-\theta_0, \theta_0]$, donc $|z|^2 = 1 - 2\rho \cos \varphi + \rho^2$ et

$$\frac{|z - 1|}{1 - |z|} = \frac{|z - 1|}{1 - |z|^2}(1 + |z|) = \frac{\rho}{2\rho \cos \varphi - \rho^2}(1 + |z|) \leqslant \frac{2}{2 \cos \varphi - \rho}.$$

Ainsi, si $\rho < \cos \theta_0$, on obtient

$$\frac{|z - 1|}{1 - |z|} \leqslant \frac{2}{2 \cos \theta_0 - \cos \theta_0} = \frac{2}{\cos \theta_0}.$$

De fait, si $z \in \Delta_{\theta_0}$ et $|z - 1| \leqslant \min(\alpha, \cos \theta_0)$, on a

$$|f(z) - S| \leqslant \varepsilon + \varepsilon \frac{2}{\cos(\theta_0)}$$

ce qui montre le résultat.

Remarque : en appliquant ça à la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$, on en déduit

$$\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \to 1} \sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n = \lim \arctan x = \frac{\pi}{4}.$$

On peut faire pareil avec $\sum (-1)^n / n = \ln 2$. $\square$

Théorème. *Soir* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence 1 et soit* f *la somme de cette série. On suppose qu'il existe* $S \in \mathbb{C}$ *tel que* $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = S$ *et que* $a_n = o(1/n)$. *Alors* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$.

Démonstration. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On a,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[, \quad S_n - f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(1-x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$$

et puisque $(1-x^k) = (1-x)(1+x+\cdots+x^{k-1}) \leqslant k(1-x)$ pour $0 < x < 1$, on en déduit

$$\forall n\ \forall x \in]0,1[, \quad |S_n - f| \leqslant (1-x)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k|a_k|}{n} x^k \leqslant (1-x)Mn + \frac{\sup_{k>n}(k|a_k|)}{n(1-x)}$$

où M désigne un majorant de la suite $k|a_k|$.

Fixons maintenant $0 < \varepsilon < 1$. On a, du coup

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leqslant M\varepsilon + \frac{\sup_{k>n}(k|a_k|)}{\varepsilon},$$

On peut choisir N_0 tel que $\sup_{k>N_0}(k|a_k|) < \varepsilon^2$, on en déduit

$$\forall n > N_0 \quad \left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leqslant M\varepsilon + \varepsilon = (1+M)\varepsilon.$$

Par hypothèse, f tend vers S quand $x \to 1$ donc $|S_n - S| \to 0$. $\square$