

# Lemme de Baire

2013-2014

Référence : Xavier Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994, p.392.

**Lemme (Baire).**

*Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet.*

*Alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans  $E$  est dense dans  $E$ .*

*Démonstration.* Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'ouverts denses dans  $E$ .

Soit  $V$  un ouvert non vide de  $E$ , montrons que  $V \cap (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n) \neq \emptyset$ .

$U_0$  étant un ouvert dense,  $U_0 \cap V$  est un ouvert non vide donc il existe  $r_0 \leq 1$  et  $x_0 \in E$  tels que  $\overline{B}(x_0, r_0) \subset U_0 \cap V$ .

Puis  $U_1$  est un ouvert dense donc  $U_1 \cap B(x_0, r_0)$  est un ouvert non vide, donc il existe  $r_1 \leq \frac{1}{2}$  et  $x_1 \in E$  tels que  $\overline{B}(x_1, r_1) \subset U_1 \cap B(x_0, r_0)$ .

On construit ainsi par récurrence une suite  $(B(x_n, r_n))_{n \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$r_n \leq \frac{1}{n} \text{ et } \overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset U_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$$

Soit  $n, m \geq k$ , alors  $x_n, x_m \in B(x_k, r_k)$  donc  $d(x_n, x_m) \leq \frac{2}{k}$ . La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc de Cauchy, donc converge vers un élément  $x$  car  $E$  est complet.

De plus, pour tout  $n, m \geq n$ ,  $x_m \in B(x_n, r_n)$  donc  $d(x_m, x_n) \leq r_n$ . En faisant  $m \rightarrow \infty$ , on obtient  $d(x, x_n) \leq r_n$ , i.e.  $x \in \overline{B}(x_n, r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1})$ .

D'où :

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(x_n, r_n) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

□