Théorème de Benedicks

Notations

Dans toute cette démonstration, notons :

- pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f définie par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x\xi} \mathrm{d}x,$$

- pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, |A| sa mesure de Lebesgue et $\mathbf{1}_A$ sa fonction caractéristique.

Théorème 1 (Benedicks, 1985)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ de sorte que A et B soient deux ensembles boréliens de mesure finie, où

$$A = \mathrm{supp}\ f \quad \text{et} \quad B = \mathrm{supp}\ \hat{f}.$$

Alors f est nulle presque partout.

Démonstration : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On peut supposer, sans perte de généralités, que A soit de mesure strictement plus petite que 1. En effet, quitte à remplacer f par sa dilatation f_λ où l'on a défini $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ avec $\lambda > |A|$, on peut se ramener au cas où $|A| < 1$. La mesure de B reste finie, puisqu'un simple calcul montre que

$$\widehat{f_\lambda}(\xi) = \frac{1}{\lambda} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$

Notons $\mathbf{1}_B$ la fonction caractéristique de l'ensemble B, et considérons la fonction 1-périodique Φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\Phi(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_B(\xi + k).$$

La suite de fonctions positives et mesurables $\left(\sum_{k=-n}^{k=n} \mathbf{1}_B(\cdot - n)\right)_{n\geq 0}$ étant croissante, le théorème de Beppo-Lévi assure que

$$\int_0^1 \Phi(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \mathbf{1}_B(\xi + k)\mathrm{d}\xi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{k+1} \mathbf{1}_B(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B(\xi)\mathrm{d}\xi = |B| < +\infty$$

Nécessairement, la fonction Φ est finie presque partout. Ainsi, la série définissant Φ n'étant constituée que des valeurs zéro ou un, on en déduit que pour presque tout $\xi_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{1}_B(\xi_0 + k) \neq 0$ seulement pour un nombre fini d'entiers k. Puisque $\hat{f} = \hat{f}\mathbf{1}_B$, il en découle la propriété suivante (que nous appellerons (*)) :

Pour presque tout $\xi_0 \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi_0+k) \neq 0$ seulement pour un nombre fini d'entiers k.

Fixons $\xi_0 \in \mathbb{R}$ vérifiant la propriété (*) et considérons la série de fonctions 1-périodique, notée g, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2i\pi\xi_0(x+k)} f(x+k).$$

L'ensemble A étant de mesure finie, par les mêmes raisons que précédemment, on peut démontrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+k) \neq 0$ seulement pour un nombre fini d'entiers k, ce qui montre que la somme g est finie presque partout. Démontrons quelques propriétés associées à la fonction g, à savoir :

(i) $g \in L^1(\mathbb{T})$ où $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left| \sum_{k=-n}^{k=n} e^{-2i\pi\xi_0(x+k)} f(x+k) \right| \mathrm{d}x &\leq \sum_{k=-n}^{k=n} \int_0^1 |f(x+k)| \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=-n}^{k=n} \int_k^{k+1} |f(x)| \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

et la dernière somme converge lorsque $n \to +\infty$ vers $\|f\|_1$ puisque $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dès lors que $g \in L^1(\mathbb{T})$, il est licite de calculer ses coefficients de Fourier (notés $c_k(g)$ pour k entier), à savoir :

(ii) pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(g) = \hat{f}(\xi_0 + k)$.

En effet, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$c_k(g) = \int_0^1 \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-2i\pi\xi_0(x+m)} f(x+m) e^{-2i\pi kx} \mathrm{d}x.$$

La série apparaissant dans la définition de $c_k(g)$ étant presque partout composée d'un nombre fini de termes, il vient :

$$\begin{aligned}
c_k(g) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^1 e^{-2i\pi\xi_0(x+m)} f(x+m) e^{-2i\pi kx} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_m^{1+m} e^{-2i\pi\xi_0 y} f(y) e^{-2i\pi ky} e^{2i\pi km} \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2i\pi(k+\xi_0)y} \mathrm{d}y \\
&= \hat{f}(\xi_0+k).
\end{aligned}$$

Enfin, la dernière propriété associée à g que nous allons démontrer est la suivante :

(iii) $|\{x\in[0,1], g(x)\neq 0\}| < 1$.

En effet, on a les inclusions suivantes :

$$\{x\in[0,1], g(x)\neq 0\} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{x\in[0,1], f(x-k)\neq 0\} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A\cap[k,k+1].$$

La propriété de σ sous-additivité de la mesure de Lebesgue assure que

$$\begin{aligned}
|\{x\in[0,1], g(x)\neq 0\}| &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |A\cap([k,k+1])| \\
&= |A|
\end{aligned}.$$

Ayant supposé que $|A|<1$, on a le résultat voulu.

Finalement, soit $\xi_0\in\mathbb{R}$ de sorte que $\hat{f}(\xi_0+k)\neq 0$ seulement pour un nombre fini d'entiers k. La propriété (ii) fournit le développement en série de Fourier suivant sur [0,1] :

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi_0+k) e^{2i\pi kx}.$$

Cette somme étant finie, g est alors un polynôme trigonométrique. Seulement, d'après la propriété (iii), ce polynôme trigonométrique s'annule sur un ensemble de mesure strictement positive, ce qui implique que g est le polynôme trigonométrique nul. On en déduit que, pour presque tout $\xi_0\in\mathbb{R}$ et pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $\hat{f}(\xi_0+k)=0$, donc $\hat{f}=0$ presque partout. Puis, d'après la formule d'inversion de Fourier ($\hat{f}$ étant évidemment intégrable), $f=0$ presque partout, ce qui prouve le théorème de Benedicks. $\square$

Remarques

1. Le théorème reste vrai pour $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leq p \leq \infty)$ puisque $L^p(A) \subset L^1(A)$ si A est de mesure finie.

2. En revanche, le théorème est faux dans l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. En effet, considérons la distribution

$$T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$$

où δ_n désigne la masse de Dirac en n. On a bien $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ puisque pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\langle T, f\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(1+n^2)f(n)}{1+n^2}.$$

D'où,

$$\langle T, f\rangle \leq C \cdot \|(1+x^2)f\|_\infty \quad \text{avec} \quad C = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2} < \infty$$

ce qui montre que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Par ailleurs, on a supp $T = \mathbb{Z}$, donc le support de T est de mesure nulle (à fortiori de mesure finie). Notons $\hat{T}$ la transformée de Fourier de T. Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle \hat{T}, f\rangle = \langle T, \hat{f}\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

Pour cette définition de la transformée de Fourier, la formule sommatoire de Poisson s'écrit

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$$

ce qui implique que

$$\langle \hat{T}, f\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \langle T, f\rangle,$$

c'est-à-dire $\hat{T} = T$. Le support de $\hat{T}$ est donc le même que celui de T, à savoir $\mathbb{Z}$, ensemble de mesure finie. On ne peut donc pas étendre le théorème de Benedicks à l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Références

M. BENEDICKS *On Fourier Transforms of Functions Supported on Sets of Finite Lebesgue Measure*. J. Fourier Anal. Appl **106**, 180-183 (1985).