Théorème de Borel.

Référence : *F. Rouvière, Petit guide de calcul différentiel, p359.*

Théorème. *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. Il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \geq 0$, $f^{(n)}(0) = a_n$.*

Démonstration.

Lemme. *Existence de fonctions plateaux.*

Il existe $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1 \end{cases}$, $0 \leq \varphi \leq 1$.

Démonstration.

- Soit $\varphi_1(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$. φ_1 est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Montrons que $\varphi_1^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}$ avec P_k polynôme.
Pour $k = 0$, le résultat est vrai.
Si $\varphi_1^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}$ alors $\varphi_1^{(k+1)}(x) = \dfrac{-P_k'\left(\frac{1}{x}\right) + P_k\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} e^{-1/x}$. D'où le résultat avec $P_{k+1}(X) = X^2(P_k(X) - P_k'(X))$.
Montrons que φ_1 est $\mathcal{C}^\infty$ avec $\varphi_1^{(k)}(0) = 0$ pour tout k.
On procède par récurrence. Pour $k = 0$, le résultat est vrai.
Si $\varphi_1^{(k)}(0) = 0$ alors $\dfrac{\varphi_1^{(k)}(x) - \varphi_1^{(k)}(0)}{x} = \begin{cases} \frac{1}{x} P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.

- Soit $\varphi_2(x) = \varphi_1(x)\varphi_1(1-x)$. φ_2 est $\mathcal{C}^\infty$ à support $[0,1]$.

On pose $\varphi_3(x) = \dfrac{\int_0^x \varphi_2(t)\mathrm{d}t}{\int_0^1 \varphi_2(t)\mathrm{d}t}$. On a $\varphi_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad |x| \leq 0 \end{cases}$ et φ_3 est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Enfin, on pose $\varphi(x) = \varphi_3(2x+2)\varphi_3(2-2x)$. φ convient.

□

Soit $\varphi_k(x) = \varphi(\lambda_k x)\dfrac{a_k x^k}{k!}$. Montrons que l'on peut choisir $\lambda_k > 0$ de façon à avoir convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de $\sum_k \varphi_k$ et de chaque série dérivée.

- Pour $k \geq m$, par la formule de Leibniz,

$$\varphi_k^{(m)}(x) = a_k \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} \varphi^{(m-p)}(\lambda_k x)\lambda_k^{m-p} \frac{x^{k-p}}{(k-p)!}.$$

Soit $M_m = \sup_{i \leq m} \left\|\varphi^{(i)}\right\|_\infty$ (existe car φ est $\mathcal{C}^\infty$ à support compact).

Comme $\varphi(x) = 0$ pour $|x| > 1$, il suffit de majorer pour $|x| < \frac{1}{\lambda_k}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $0 \leq m \leq k$, on a

$$|\varphi_k^{(m)}(x)| \leq M_m|a_k| \sum_{p=0}^{m} \binom{p}{m} \lambda_k^{m-p} \frac{\lambda_k^{p-k}}{(k-p)!} \leq \frac{M_m|a_k|2^m}{\lambda_k^{k-m}(k-m)!}.$$

Soit $\lambda_k = \max(1, |a_k|)$.
On a $\lambda_k^{k-m} \geq \lambda_k \geq |a_k|$ pour $k - m \geq 1$. D'où $|\varphi_k^{(m)}(x)| \leq \dfrac{2^m M_m}{(k-m)!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \geq m+1$.

• De plus, pour $0 \leq k \leq m$, $\varphi_k^{(m)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ est nulle en dehors de $[-1/\lambda_k; 1/\lambda_k]$ d'où l'existence d'une borne uniforme. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^{(m)} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \varphi_k^{(m)} + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^{(m)}$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$ pour tout entier m.

Donc $u = \sum_k \varphi_k$ est $\mathcal{C}^\infty$ et on peut dériver terme à terme. Comme $\varphi_k(x) = a_k \dfrac{x^k}{k!}$ sur $\left\{|x| < \frac{1}{2\lambda_k}\right\}$, en particulier, $u^{(m)}(0) = a_m$ ce qui conclut.

□

Remarque.

– Cela signifie qu'il existe toujours une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ admettant un développement de Taylor donné (mais le rayon de convergence peut être nul).
– En conséquence, on peut prolonger toute fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur un compact en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.