Calcul d'une intégrale

On a

$$F(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + a\cos x)}{\cos x} = \begin{cases} \frac{\pi^2}{8} - \frac{\arccos^2 a}{2} & \text{si } a \in]-1, 1[\\ \frac{\pi^2}{8} + \frac{\operatorname{argch}^2 a}{2} & \text{si } a > 1 \end{cases}.$$

L'intégrande est continue pour $a > -1$ (prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$), donc l'intégrale existe bien.
On introduit $f : (a, x) \mapsto \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}$, prolongée en $\pi/2$. f est dérivable par rapport à a de dérivée $\frac{1}{1+a\cos x}$ et qui est donc continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On peut donc dériver sous l'intégrale et obtenir

$$F'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + a\cos x}.$$

Cette intégrale se calcule facilement en posant $u = \tan\frac{t}{2}$. On obtient alors

$$F'(a) = \int_0^1 \frac{1}{1 + a\frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{2}{(1+a) + (1-a)u^2}.$$

On distingue ensuite selon a.

- Si $a \in]-1, 1[$, on peut écrire $a = \cos(2\theta)$ avec $\theta \in]0, \pi/2[$, d'où

$$F'(a) = \int_0^1 \frac{du}{\cos^2\theta + u^2\sin^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \int_0^1 \frac{du}{1 + \tan^2\theta} = \frac{2}{\sin(2\theta)} \int_0^{\tan\theta} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{2\theta}{\sin 2\theta}.$$

  Ainsi,

$$F'(a) = \frac{\arccos a}{\sqrt{1-a^2}} \quad \text{et} \quad F(a) = F(0) + \int_0^a \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\arccos^2 a}{2}.$$

  F étant continue en 1, un passage à la limite montre que $F(1) = \lim_{x\to 1^-} F(x) = \frac{\pi^2}{8}$.
- Si $a > 1$, on écrit $a = 2\cosh\theta$ avec $\theta > 0$. Alors

$$F'(a) = \int_0^1 \frac{du}{\cosh^2\theta - u^2\sinh^2\theta} = \frac{1}{\cosh^2} \int_0^1 \frac{du}{1 - u^2\tanh^2\theta} = \frac{1}{\cosh^2\theta} \int_0^{\tanh\theta} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{2\theta}{\sinh 2\theta}.$$

  Ainsi,

$$F'(a) = \frac{\operatorname{argch} a}{\sqrt{a^2-1}} \quad \text{donc} \quad F(a) = F(1) + \int_1^a \frac{\operatorname{argch} x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\operatorname{argch}^2 a}{2}.$$