Théorème de Cauchy-Arzela-Peano

Ce théorème se trouve dans Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles* (mais pas mal modifié).

Théorème. *Soit $f(t,y)$ continue. Soit $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ un cylindre de sécurité avec $T \leqslant \min(T_0, r_0/M)$ pour l'équation $y' = f(t,y)$. Alors il existe une solution avec conditions initiales $y(t_0) = y_0$ sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.*

Démonstration. Commençons par montrer que f vérifie le problème de Cauchy sur I équivaut au problème intégral y continue sur I et pour tout $t \in I$, $(t, y(t)) \in U$ et $\forall t \in I,\ y(y) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u))du$.
En outre, il existe bien un cylindre de sécurité : f est définie sur un ouvert $H \times U$, donc il existe un cylindre $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset U$. On note $M = \sup_I f$ et $T \leqslant \min(T_0, r_0/M)$: cela convient. On note C ce cylindre.

Construction d'une solution par la méthode d'Euler. On se donne une subdivision $t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t_0 + T$ régulière et on note $h = T/(N+1)$. on construit y_n par récurrence partant de y_0 en posant $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$ et en reliant les points par des droites. On note y la solution approchée obtenue.
Alors y_n reste dans $\overline{B}(y_0, r_0)$. On montre ceci par récurrence, en supposant plus précisément que :

$$y([t_0, t_n]) \subset \overline{B}(y_0, r_0) \quad \text{et} \quad \forall t \in [t_0, t_n]\ \|y(t) - y_0\| \leqslant M|t - t_0|.$$

Si c'est vrai pour n, en particulier $(t_n, y_n) \in C$ donc pour $t \in [t_n, t_{n+1}]$, on a $y(t) - y_n = y_n + (t - t_n)f(t_n, y_n)$ donc $\|y(t) - y_0\| \leqslant M|t - t_n| + \|y_n - y_0\| \leqslant M|t - t_0|$, ce qui conclut la récurrence.

Solutions ε-approchées. On appelle solution ε-approchée de f une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux (sur une subdivision $a = a_0 < \cdots < a_N = b$) telle que $\forall t \in [a,b],\ (t, y(t)) \in U$ et $\forall t \in]a_n, a_{n+1}[,\ \|y'(t) - f(t, y(t))\| \leqslant \varepsilon$. Si y est issue d'une méthode numérique, ε est appelé erreur de la méthode.

Majoration de l'erreur. On introduit le module de continuité

$$\omega_f(\delta) = \max\{\|f(t_1, y_1) - f(t_2, y_2)\| \ \mid\ \|y_1 - y_2\| + |t_1 - t_2| \leqslant \delta\}.$$

Comme C est compact, f est uniformément continue sur C donc $\omega_f(\delta) \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0$.
Si y est la solution approchée par la méthode d'Euler à N points, alors l'erreur vérifie

$$\varepsilon \leqslant \omega_f((M+1)h).$$

Pour ce faire, majorons $\|y'(t) - f(t, y(t))\|$. Pour $t \in]t_n, t_{n+1}[$, on a $\|y(t) - y_n\| \leqslant Mh$ et $|t - t_n| \leqslant h$. Ainsi, $\|f(t_n, y_n) - f(t, y(t)\| \omega_f((M+1)h$, ce qu'il fallait montrer.

Convergence des solutions approchées. Si y_p est une suite de solutions ε_p-approchées obtenues par la méthode d'Euler qui converge uniformément vers y, alors elle converge vers une solution exacte du problème de Cauchy.
Puisque $\|y_p'(t) - f(t, y_p(t))\| \leqslant 1/p$, une intégration donne

$$\left\| y_p(t) - y_0 - \int_{t_0}^t f(u, y(u))du \right\| \leqslant 1/p|t - t_0|.$$

Or, si $\delta_p = \sup \|y_p - y\|$, alors $\|f(t, y_p(t)) - f(t, y(t))\| \leqslant \omega_f(\delta_p)$ qui tend vers 0.
Ainsi, par convergence uniforme, on peut passer à la limite dans l'intégrale et obtenir $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u))du$. y est continue par convergence uniforme, donc est solution du problème de Cauchy.

Conclusion. soit y_p une suite de solutions approchées construite par la méthode d'Euler vérifiant $h \leqslant T/p$. Alors l'erreur est $\varepsilon_p \leqslant \omega_f((M+1)T/p)$ qui tend vers 0. Les y_p sont lipschitziennes par construction de rapport M. Par Ascoli, on peut extraire une suite qui converge uniformément vers y qui devient une solution.

$\square$