

Diagrammes de Young et réduction de Jordan

Akita

ENS Rennes, 2013-2014

Référence : *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*, Caldero-Germoni

Développement pour les leçons :

- 101. Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 150. Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
- 151. Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
- 153. Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
- 157. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Les définitions suivantes sont à mettre dans le plan :

Notons $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Considérons l'action par conjugaison de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Remarquons que cette action stabilise $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$. Nous parlerons alors d'*orbite nilpotente* : c'est une orbite de l'action restreinte à $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$, ou autrement dit une classe de similitude de matrices nilpotentes.

Définition : La *partition* d'un entier n est une suite d'entiers naturels $\lambda = (\lambda_i)$ décroissante, nulle à partir d'un rang $m + 1$ et dont la somme vaut n : $\sum_{j=1}^m \lambda_j = n$.

Définition : Un *diagramme de Young* de taille n associé à une partition λ de n est une représentation de λ par n cases juxtaposées de la manière suivante :

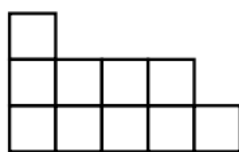


DIAGRAMME DE YOUNG DE $(5,4,1)$

où la i^e ligne contient λ_i cases. Le diagramme dual est le diagramme obtenu en mettant à la i^e ligne le nombre de cases de la i^e colonne du diagramme d'origine. Le diagramme dual peut être vu comme le diagramme symétrique par rapport à la première bissectrice.

Définition : Soit p un entier non nul. Le *bloc de Jordan* de taille p est la matrice :

$$J_p := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}).$$

Nous noterons également J_λ la matrice avec des zéros et des blocs diagonaux qui sont les blocs de Jordan J_{λ_i} de tailles respectives $\lambda_1, \lambda_2, \dots$

Montrons le résultat suivant :

Théorème : Pour A et B deux matrices nilpotentes de même taille, A et B sont dans la même orbite nilpotente si et seulement si leurs diagrammes de Young sont égaux. En particulier, A est semblable à J_{λ^*} , où λ^* est la partition associée au diagramme de Young dual de A .

preuve :

Notons $K_i := \ker(A^i)$.

Commençons par montrer le lemme suivant :

Lemme : $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, 0 \leq \dim K_{i+1} - \dim K_i \leq \dim K_i - \dim K_{i-1}$.

preuve du lemme :

Soit $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. La première inégalité est immédiate car $K_i \subset K_{i+1}$. Pour la deuxième, nous avons $AK_{i+1} \subset K_i$. Considérons alors les morphismes suivants :

$$\nu : \begin{cases} K_{i+1} & \longrightarrow & K_i \\ X & \longmapsto & AX \end{cases} \quad \text{et} \quad \pi : \begin{cases} K_i & \longrightarrow & K_i/K_{i-1} \\ Y & \longmapsto & \bar{Y} \end{cases} .$$

Nous avons alors les égalités suivantes :

$$\ker(\pi \circ \nu) = (\pi \circ \nu)^{-1}(\{\bar{0}\}) = \nu^{-1}(\pi^{-1}(\{\bar{0}\})) = \nu^{-1}(K_{i-1}) = K_i.$$

D'où : $K_{i+1}/K_i \hookrightarrow K_i/K_{i-1}$ et donc $\dim(K_{i+1}/K_i) \leq \dim(K_i/K_{i-1})$.

Retour à la preuve du théorème : ainsi $(\dim(K_i))_i$ est une suite strictement décroissante avant de devenir stationnaire car si $K_i = K_{i+1}$ pour un certain i alors avec l'inégalité des dimensions on obtient :

$$\mathbb{C}^n = K_n = K_{n-1} = \dots = K_{i+1} = K_i.$$

Posons maintenant $\lambda_i := k_i - k_{i-1}$ (avec $k_i := \dim(K_i)$). Montrons que A est semblable à J_{λ^*} .

Notons p l'indice de nilpotence de A . D'après ce qui a été vu avant, nous avons :

$$\{0\} \subsetneq K_1 \subsetneq \dots \subsetneq K_p = \mathbb{C}^n.$$

Soit G un supplémentaire de K_{p-1} dans $K_p = \mathbb{C}^n$. Remarquons que $\lambda_p = \dim(G)$. Soit $(e_1, \dots, e_{\lambda_p})$ une base de G . Comme G est un supplémentaire de K_{p-1} , si $x \in G$ est tel que $A^{p-1}x = 0$ alors $x = 0$. Donc $(Ae_1, \dots, Ae_{\lambda_p})$ est une famille libre de K_{p-1} intersectant K_{p-2} trivialement, aussi nous pouvons la compléter en une base $(Ae_1, \dots, Ae_{\lambda_p}, e_{\lambda_p+1}, \dots, e_{\lambda_{p-1}})$ d'un supplémentaire de K_{p-2} . Par récurrence descendante sur r , nous construisons ainsi une famille libre $(A^{p-r}e_1, \dots, A^{p-r}e_{\lambda_p}, A^{p-r-1}e_{\lambda_p+1}, \dots, A^{p-r-1}e_{\lambda_{p-1}}, \dots, e_{\lambda_{r+1}+1}, \dots, e_{\lambda_r})$ qui engendre un supplémentaire de K_{r-1} dans K_r de dimension $\lambda_r = \dim(K_r) - \dim(K_{r-1})$.

Comme $\sum_{j=1}^p \lambda_j = n$, nous obtenons finalement une base de \mathbb{C}^n (on intervertit les vecteurs afin d'obtenir une matrice triangulaire supérieure) :

$$(A^{p-1}e_1, \dots, Ae_1, e_1, \dots, A^{p-2}e_{\lambda_p+1}, \dots, e_{\lambda_p+1}, \dots, e_{\lambda_1}),$$

dans laquelle la matrice de A est J_{λ^*} . (dessiner le diagramme de Young associé à A et à la base construite au tableau, cf C-G)

Achevons maintenant la preuve du théorème :

Si A et B sont dans une même orbite alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B = PAP^{-1}$, d'où $\forall i, \dim(\ker(B^i)) = \dim(\ker(A^i))$ et donc $Y(A) = Y(B)$.

Si $Y(A) = Y(B)$ alors A et B ont même partition et donc même partition duale. Avec ce qui a été fait avant, A et B sont donc semblables à une même matrice de Jordan et ainsi elles sont dans la même orbite.

Remarques :

- coquille p88 dans le C-G : l'ensemble d'arrivée du morphisme π_i n'est pas K_i/K_{i+1} mais K_i/K_{i-1} ,
- développement un peu long, attention à ne pas traîner.