

# Complétude de la méthode de résolution.

Référence : Fondements mathématiques de l'informatique.  
Jacques STERN

2011-2012

Rappelons la méthode de résolution pour un ensemble  $\mathfrak{F}$  de formules closes :

1. on met chaque formule sous forme prénexe ;
2. on skolemise ces formules ;
3. on distribue les quantificateurs.

On a maintenant un ensemble de clauses, qu'on note  $\{C_1, \dots, C_r\}$ . On renomme les variables de chaque clauses pour que

$$\forall i \neq j, \text{Var}(C_i) \cap \text{Var}(C_j) = \emptyset.$$

On cherche à appliquer la règle de résolution :

## Définition 0.1 : règle de résolution

Soient  $C, C_1, C_2$  trois clauses. On dit que  $C$  est une résolvante de  $C_1$  et  $C_2$  s'il existe  $S_1 \subset C_1$  et  $S_2 \subset C_2$  deux ensembles de littéraux tels que :

- $S_1$  et  $\neg S_2$  sont unifiables par  $\sigma$  unificateur principal ;
- $C = ((C_1 \setminus S_1) \cup (C_2 \setminus S_2))\sigma$ .

Un *arbre de résolution* est un arbre dont les feuilles sont étiquetées par des clauses de  $\Sigma$ , et chaque nœud a deux fils dont il est une résolvante.

Si la racine de l'arbre est la clause vide  $\square$ , alors on dit que l'arbre est un arbre de *réfutation*.

On se donne un langage  $L$  qui a au moins un symbole de constante. On rappelle la définition d'un modèle de Herbrand (Jacques Herbrand, 1908 - 1931) :

## Définition 0.2

On appelle modèle de Herbrand  $\mathfrak{H}$  une réalisation de  $L$  de domaine  $H$  qui a les propriétés suivantes :

- $H$  est l'ensemble de tous les termes clos de  $L$  ;
  - chaque constante est interprétée par elle-même ;
  - l'interprétation d'une fonction  $f$  d'arité  $n$  est la fonction  $t_1, \dots, t_n \mapsto f(t_1, \dots, t_n)$ , où les  $t_i$  sont des termes ;
  - à chaque formule atomique close  $R(t_1, \dots, t_n)$  on associe une variable de Herbrand,  $p[R(t_1, \dots, t_n)]$ .
- On associe alors à la distribution de vérité  $\sigma$  le modèle de Herbrand  $\mathfrak{H}(\sigma)$  en interprétant  $R$  par

$$R^{\mathfrak{H}(\sigma)} = \{(t_1, \dots, t_n) \mid \sigma(p[R(t_1, \dots, t_n)]) = 1\}.$$

## Définition 0.3

À toute formule du calcul propositionnel  $F$  sur les variables de Herbrand, on associe une formule close sans

quantificateur  $\Phi(F)$  définie par induction, en partant de

$$\Phi(p[R(t_1, \dots, t_n)]) = R(t_1, \dots, t_n).$$

On a alors clairement  $Val(F, \sigma) = Val(\Phi(F), \mathfrak{A}(\sigma))$ .

On définit maintenant une particularisation :

#### Définition 0.4

Soit  $F$  une formule close. On appelle particularisation de  $F$  toute formule qui s'écrit  $F(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n)$  où les  $t_i$  sont des termes clos.

On a alors le :

#### Théorème 0.5 : de Herbrand

Soit  $\Sigma$  un ensemble de formules closes universelles. Alors l'une ou l'autre des propositions est vraie :

- il existe un modèle de Herbrand qui satisfait  $\Sigma$  ;
- il existe un ensemble fini de particularisations de formules de  $\Sigma$  qui est contradictoire.

*Démonstration.* On remplace chaque formule de  $\Sigma$  par l'ensemble de ses particularisations. On obtient ainsi un ensemble  $\Sigma'$  de formules closes. Par  $\Phi$ , cet ensemble provient d'un ensemble de formules du calcul propositionnel :

$$\Sigma' = \{\Phi(F) \mid F \in \Sigma\}.$$

S'il existe  $\sigma$  qui satisfait  $\Sigma_0$ , alors le modèle de Herbrand  $\mathfrak{A}(\sigma)$  satisfait toutes les formules de  $\Sigma'$  et donc de  $\Sigma$ .

Si  $\Sigma_0$  est contradictoire, alors par compacité du calcul propositionnel, on a un sous-ensemble fini de  $\Sigma_0$  qui est contradictoire, et par  $\Phi$ , on a un sous-ensemble fini de  $\Sigma'$  qui est contradictoire.  $\square$

#### Théorème 0.6 : de complétude de la méthode de résolution

Soit  $\Sigma$  un ensemble de clauses contradictoire. Alors il existe un arbre de résolution qui réfute  $\Sigma$ .

*Démonstration.* Notons  $\Sigma'$  l'ensemble des particularisations des clauses de  $\Sigma$ .

Par le théorème de Herbrand,  $\Sigma'$  est contradictoire. Via l'application  $\Phi$ , on a un ensemble de formules propositionnelles contradictoire.

On a donc un arbre de réfutation au sens propositionnel qui réfute  $\Sigma'$ . On va remplacer chaque nœud  $c$  de l'arbre par une clause  $C$  dont elle est une particularisation. Pour les feuilles, la construction est évidente. Pour les nœuds internes, on utilise le

#### Lemme 0.7 : de relèvement

Soient  $C_1$  et  $C_2$  des clauses au sens du calcul des prédicats, et soient  $c_1$  et  $c_2$  des clauses propositionnelles qui en sont respectivement des particularisations. Alors pour toute résolvente  $c$  de  $c_1$  et  $c_2$ , il existe une résolvente  $C$  de  $C_1$  et  $C_2$  donc  $c$  est une particularisation.

*Démonstration.* Quitte à renommer les variables, on peut supposer que les variables  $x_1, \dots, x_n$  de  $C_1$  et  $y_1, \dots, y_p$  de  $C_2$  sont distinctes.

$c_1$  et  $c_2$  étant des particularisations, il existe des termes  $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_p$  tels que  $c_1$  et  $c_2$  proviennent de  $C_1$  et  $C_2$  par la substitution

$$\tau = (x_1/t_1, \dots, y_p/t'_p).$$

Soit  $u$  le littéral qui intervient dans la coupure de  $c_1$  et  $c_2$ . On définit  $S_1$  (resp.  $S_2$ ) l'ensemble  $L$  des littéraux de  $C_1$  (resp.  $C_2$ ) tels que  $L\tau$  conduise à  $u$  (resp.  $\bar{u}$ ).

Alors  $S_1 \cup \neg S_2$  est unifiable par  $\tau$ . On choisit un unificateur principal  $\sigma$  : on a  $\tau = \sigma\theta$ .

$c$  est obtenue par l'action de  $\tau$  sur l'ensemble de littéraux

$$(C_1 \setminus S_1) \cup (C_2 \setminus S_2),$$

c'est-à-dire par l'action de  $\theta$  sur la résolvante de  $C_1$  et  $C_2$

$$C = ((C_1 \setminus S_1) \cup (C_2 \setminus S_2))\sigma.$$

Comme  $\theta$  élimine toutes les variables de  $C$ ,  $c$  est la particularisation de  $C$  obtenue en remplaçant chaque variable  $x$  par  $x\theta$ . ◇

□