Fonctions lipschitziennes

Je ne connais pas de référence bibliographique pour ce développement...

Théorème. *une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne si et seulement s'il existe une fonction $g \in L^\infty$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0) + \int_0^x g(x)dx$.*

Démonstration. La condition suffisante est claire.
On suppose donc f $L-$lipschitzienne et on considère la dérivée f' de f au sens des distributions. Montrons que f' se prolonge en une forme linéaire T sur L^1. On peut écrire que

$$\langle T, \varphi, =\rangle \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}dx = \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\frac{f(x-h)-f(x)}{h}dx$$

par convergence dominée, découpage de l'intégrale et changement de variables affines. De fait, $|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant L\|\varphi\|_1$ et T est une forme linéaire continue pour la norme 1. Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans L^1, on peut prolonger T à L^1 tout entier, par une forme linéaire de même norme.

Remarquons alors que $L^2([-n,n]) \hookrightarrow L^1([-n,n]) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R})$; on peut donc restreindre T à ce premier espace. Par théorème de représentation de Riesz, il existe $g_n \in L^2$ tel que $\forall \varphi \in L^2([-n,n])$, $\langle T, \varphi\rangle = \int_{-n}^n g_n\varphi$. Par unicité dans le théorème de Riesz et par l'injection continue $L^2([-n,n]) \hookrightarrow L^2([-n-n,n+1])$, g_{n+1} et g_n coïncident sur $[-n,n]$. On peut alors définir une fonction g presque partout sur $\mathbb{R}$ en associant, à $x \in [-n,n]$, $g_n(x)$.

Montrons alors que $g \in L^\infty$. Si ce n'était pas le cas, alors l'ensemble $A = \{x \mid |g(x)| < L\}$ serait de mesure non nulle. Comme A est limite croissante des $A_n = A \cap [-n,n]$, l'un serait de mesure non nulle. Soit u à valeurs dans $\{-1,1\}$ telle que $|g| = ug$ (elle est mesurable), posons $\varphi = 1_{A_n}u$. Alors, $\langle T, \varphi\rangle = \int_{-n}^n |g| > L\lambda(A_n)$, c'est-à-dire que $|\langle T, \varphi\rangle| > L\|\varphi\|_1$, ce qui empêche L d'être la norme de T. Ainsi, $g \in L^\infty$.

Enfin, posons $G(x) = \int_0^x g(t)dt$. Comme $g \in L^1_{loc}$, G est continue et pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$-\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)G(x)dx = \int_{-\infty}^0 \int_x^0 \varphi'(x)g(t)dtdx - \int_0^\infty \int_0^x \varphi'(x)g(t)dtdx.$$

Par théorème de Fubini (il est clair que l'intégrale double est convergente puisque g est bornée), on obtient

$$-\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)G(x)dx = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t g(t)\varphi'(x)dxdt - \int_0^\infty \int_t^\infty g(t)\varphi'(x)dxdt.$$

Ainsi, puisque φ est à support compact, donc incluse dans un $L^2([-n,n]$, on obtient

$$-\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)G(x)dx = \int_{-\infty}^\infty g(t)\varphi(t) = \langle T, \varphi\rangle.$$

C'est exactement dire que $(f-G)' = 0$ au sens des distributions. Or, ceci implique que $f - G = C^{te}$. Comme f et G sont continue, cette constante vaut $f(0) - G(0) = f(0)$, ce qu'il fallait montrer.

□

Remarque. La démonstration est ici faite dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Néanmoins, elle fonctionne au sens des distributions tempérées, en utilisant la densité (au sens de la topologie de $\mathscr{S}$) des fonction $\mathscr{C}_c^\infty$. Remarquer pour cela qu'une fonction lipschitzienne, grâce à sa croissance lente, définit une distribution tempérée.