Formule des compléments

Ce développement se trouve dans Amar-Matheron, *Analyse complexe*.

Théorème. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) \in]0,1[$, on a*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Lemme. *Pour tout $\alpha \in]0,1[$, on a* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$.

Démonstration. On note I_α ladite intégrale. Elle existe et est finie car l'intégrande u est continue et qu'au voisinage de 0, on a $u(t) \sim t^{-\alpha}$ et qu'au voisinage de $+\infty$, on a $u(t) \sim t^{-(1+\alpha)}$.
Soit alors $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ et f la fonction définie sur $\Omega \setminus \{1\}$ par $f(z) = \frac{1}{z^\alpha(1+z)}$. (on note $z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$ si $z = re^{i\theta}$. La fonction f est holomorphe dans $\Omega \setminus \{-1\}$ et possède un pôle simple en -1 de résidu $e^{-i\pi\alpha}$.
Pour $0 < \varepsilon < 1 < R$, on note $K_{\varepsilon,R}$ le compact délimité par le demi-cercle $C_\varepsilon = \{|z| = \varepsilon,\ \Re(z) \leqslant 0\}$, les deux segments $I^\pm_{\varepsilon R} = \{(\pm i\varepsilon, \pm i\varepsilon + \sqrt{R^2-\varepsilon^2}\}$ et l'arc de cercle $\Gamma_{\varepsilon R} = \{Re^{i\theta};\ \theta \in [-\pi,\pi], |\theta| \geqslant \theta_{\varepsilon R}\}$ où $\theta_{\varepsilon R} = \arctan(\varepsilon/\sqrt{R^2-\varepsilon^2})$.

Le théorème des résidus sur le bord donne

$$\int_{\partial K_{\varepsilon R}} f(z)dz = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}, \quad \forall \varepsilon, R.$$

En outre, quand $\varepsilon \to 0$, l'intégrale sur C_ε tend vers 0 car

$$\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)dz\right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^\alpha(1-\varepsilon)} \times \pi\varepsilon = \frac{\pi\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\varepsilon} \to 0.$$

Par ailleurs,

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int_{\theta_{\varepsilon R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon R}} iR^{1-\alpha}\frac{e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}}d\theta \longrightarrow \int_0^{2\pi} iR^{1-\alpha}\frac{e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}}d\theta$$

par convergence dominée.
Si $t \in]0,+\infty[$, alors $(t+i\varepsilon)^\alpha \longrightarrow t^\alpha$ et $(t-i\varepsilon)^\alpha \longrightarrow e^{2i\pi\alpha}t\alpha$ (l'argument de $t - i\varepsilon$ tend vers 2π). Comme en outre, $|f(t+iy)| \leqslant \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, et que cette dernière est intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée sur I^+ et I^-. Les intégrales sous-jacentes tendent respectivement vers $\int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$ et $e^{2i\pi\alpha}\int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$. Récapitulant, on obtient

$$(1-e^{-2i\pi\alpha})\int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} + i\int_0^{2\pi} R^{1-\alpha}\frac{e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}}d\theta = 2i\pi e^{-i\pi\alpha},$$

et ce pour tout $R > 1$.

Remarquons alors que pour $\theta \in [0,2\pi]$, on a $\left|R^{1-\alpha}\frac{e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}}\right| \leqslant \frac{R^{1-\alpha}}{R-1}$. Puisque $\alpha > 0$, le TCD indique que la seconde intégrale tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$. De fait

$$(1-e^{-2i\pi\alpha})I_\alpha = 2i\pi\alpha e^{-i\pi\alpha},$$

ce qui conclut la preuve du lemme. □

Pour conclure, comme on doit prouver une égalité de fonctions holomorphes, il suffit de le faire pour $z = \alpha \in]0,1[$. D'après le théorème de Fubini, on peut écrire

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_U t^{\alpha-1}s^{-\alpha}e^{-s-t}dtds = \int_U \left(\frac{t}{s}\right)^\alpha e^{-(t+s)}ds\frac{dt}{t},$$

où $U = \{s, t > 0\}$. On fait ensuite le changement de variable $\varphi : (t,s) \mapsto (s+t, t/s)$, d'inverse $(u,v) \mapsto (\frac{uv}{1+v}, \frac{u}{1+v})$ et dont le jacobien de l'inverse en $\varphi(t,s) = (u,v)$ est $-\frac{u}{(1+v)^2} = -\frac{t}{v(1+v)}$. Alors

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_U \frac{1}{v^{1-\alpha}(1+v)}e^{-u}dudv = \int_0^\infty \frac{dv}{v^{1-\alpha}(1+v)},$$

ce qui conclut la preuve du théorème.