Le théorème de Glaeser [1]

Théorème (de Glaeser). *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. $\sqrt{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si, et seulement si, f' et f'' s'annulent en les points où f s'annule.*

Démonstration. On va procéder en trois étapes.

1. $\sqrt{f}$ est dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ ssi ou bien $f(x_0) \neq 0$ ou bien $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = 0$.
2. Pour $\alpha < 0$, en ayant noté $M(\alpha) = \sup\limits_{t \in [-2\alpha, 2\alpha]} |f''(t)|$ et supposé que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, on a $f'^2(x) \leqslant f(x)M(\alpha), \forall x \in [-2\alpha, 2\alpha]$.
3. On finit par montrer que $\sqrt{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

---

1. "$\Rightarrow$" Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que $\sqrt{f}$ est dérivable en x_0. Soit $\sqrt{f}(x_0) = 0$ soit $\sqrt{f}(x_0) \neq 0$.
   Si $f(x_0) = 0$ alors $f'(x_0) = \left(\sqrt{f(x_0)}^2\right)' = 2\sqrt{f}'(x_0) \times \sqrt{f(x_0)} = 0$. Il reste à montrer que $f''(x_0) = 0$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, d'après la formule de Taylor-Young de f à l'ordre 2 en x_0, on a $f(x) = \dfrac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$ d'où $\dfrac{f(x)}{(x - x_0)^2} = \dfrac{1}{2}f''(x_0) + o(1) = \left(\dfrac{\sqrt{f(x)}}{x - x_0}\right)^2$. Cela est équivalent à écrire que $\dfrac{\sqrt{f(x)}}{|x - x_0|} = \sqrt{\dfrac{f''(x_0)}{2} + o(1)}$. On passe à la limite en x_0^+ est x_0^- et on obtient $0 \leqslant \sqrt{\dfrac{f''(x_0)}{2}} \leqslant 0$ d'où $f''(x_0) = 0$.
   Sinon $f(x_0) \neq 0$ et .
   "$\Leftarrow$" Réciproquement, si $f(x_0) \neq 0$, $\sqrt{f}$ est dérivable en vertu du fait que $f(x_0) \neq 0$.
   Si $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, on a par la formule de Taylor-Young : $f(x) = o((x - x_0)^2)$. Donc $\dfrac{f(x)}{(x - x_0)^2} = o(1)$. Cela implique que $\dfrac{\sqrt{f}(x)}{|x - x_0|} = \sqrt{o(1)} \longrightarrow 0$ quand $x \to x_0$ et on peut dire que $(\sqrt{f})'(x_0) = 0$.
2. On reprend les notations et hypothèses du préambule. On remarque ici que $M(\alpha) < +\infty$ car f est de classe $\mathcal{C}^2$. $\forall x, h \in [-\alpha, \alpha], x + h \in [-2\alpha, 2\alpha]$ et l'inégalité de Taylor Lagrange sur $[x, x + h]$ donne
   $$|f(x + h) - f(x) - f'(x)h| \leqslant \frac{h^2}{2}|f''(x)| \leqslant \frac{h^2}{2}M(\alpha)$$
   donc $0 \leqslant f(x + h) \leqslant f(x) + f'(x)h + \dfrac{h^2}{2}M(\alpha) = P(h)$ où P est un polynôme du second degré. Son discriminant est $f'(x)^2 - 2f(x)M(\alpha)$ et est négatif car $P(h) \geqslant 0$ sur $[-\alpha, \alpha]$. On a donc établi l'égalité demandée.
3. On montre l'équivalence du théorème.
   "$\Leftarrow$" Si $f(x_0) \neq 0$, f ne s'annule pas dans un voisinage de x_0 donc par la formule de dérivation $(\sqrt{f})'$ est continue en x_0.
   Si $f(x_0) = 0$, on pose $g(x) = f(x + x_0)$. g est $\mathcal{C}^2$ et $g \geqslant 0$. Par les hypothèses sur f, $\sqrt{g}$ est dérivable.
   Soit V un voisinage de 0, on peut écrire $V =]-\alpha, \alpha[$. Si $x \in V$,
   - ou bien $g(x) = 0$, alors $g'(x) = g''(x) = 0$ et donc $(\sqrt{g})'(x) = 0$ par le point 1 ;
   - ou bien $g(x) \neq 0$, alors $g'(x)^2 \leqslant 2g(x)M(\alpha) \Leftrightarrow \dfrac{g'(x)^2}{2\sqrt{g}(x)} = (\sqrt{g})'(x) \leqslant \sqrt{\dfrac{M(\alpha)}{2}} \to 0$ quand $\alpha \to 0$.
     Donc $(\sqrt{g})'(x) \to 0$ quand $x \to 0$.

   Donc $(\sqrt{g})'$ est continue en 0 c'est à dire $(\sqrt{f})'$ est continue en x_0.
   "$\Rightarrow$" Si $\sqrt{f}$ est $\mathcal{C}^1$ alors elle est dérivable donc f' et f'' s'annulent en les points où f s'annule. □

1. Géométrie différentielle. Thèmes d'analyse pour l'agrégation, Stéphane GONNORD & Nicolas TOSEL, page 28