

# Formule d'inversion de Fourier.

2013 – 2014

Pour  $f \in L^1(\mathbb{R})$  on définit la transformée de Fourier de  $f$  par

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x) dx.$$

On donne aussi la définition d'une approximation de l'unité :

**Définition.** Une suite  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  d'éléments de  $L^1(\mathbb{R})$  est une approximation de l'unité si elle vérifie

(i) pour tout  $n \geq 1$ ,  $\int_{\mathbb{R}} \alpha_n = 1$ ,

(ii)  $\sup_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}} |\alpha_n| < +\infty$ ,

(iii) pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|t| \geq \varepsilon} |\alpha_n| = 0$ .

On rappelle le théorème suivant :

**Théorème.**

Soit  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  une approximation de l'unité,  $p \in [1, +\infty[$  et  $f \in L^p(\mathbb{R})$ . Alors

$$\forall n \geq 1, \quad f * \alpha_n \in L^p(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad f * \alpha_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f.$$

Le résultat à démontrer est le suivant :

**Théorème.**

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  telle que  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{ixt} dt = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(-x).$$

*Démonstration.* On pose

$$a_n(x) := \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{|x|}{n}}$$

et on introduit  $\alpha_n := \widehat{a_n}$ . Montrons que  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  est une approximation de l'unité.

$$\begin{aligned}
\alpha_n(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x|}{n} - itx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{\frac{x}{n} - itx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{n} - itx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{\frac{x}{n} - itx}}{\frac{1}{n} - it} \right]_{-\infty}^0 + \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{-\frac{x}{n} - itx}}{-\frac{1}{n} - it} \right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\frac{1}{n} - it} + \frac{1}{\frac{1}{n} + it} \right) \\
&= \frac{n}{\pi} \frac{1}{1 + (nt)^2}.
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \alpha_n(t) dt &= \frac{n}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1 + (nt)^2} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{1 + u^2} = 1.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned}
\int_{|t| \geq \varepsilon} \alpha_n(t) dt &= \frac{n}{\pi} \int_{|t| \geq \varepsilon} \frac{dt}{1 + (nt)^2} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{|u| \geq n\varepsilon} \frac{du}{1 + u^2} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + u^2} \mathbf{1}_{\{|u| \geq n\varepsilon\}}(u) du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0
\end{aligned}$$

par convergence dominée.

$(\alpha_n)_{n \geq 1}$  est donc une approximation de l'unité. On a alors

$$\begin{aligned}
\alpha_n * f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \alpha_n(x-t) f(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} a_n(u) e^{-iu(x-t)} du f(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} a_n(u) e^{-iux} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{iut} dt du
\end{aligned}$$

par application du théorème de Fubini, car  $|a_n(u) e^{-iu(x-t)} f(t)| = |a_n(u) f(t)|$  est intégrable pour la mesure produit  $dt du$  d'après le théorème de Fubini-Tonelli. On en déduit, par parité de  $a_n$ ,

$$\begin{aligned}
\alpha_n * f(x) &= \int_{\mathbb{R}} a_n(u) e^{iux} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-iut} dt du \\
&= \int_{\mathbb{R}} a_n(u) e^{iux} \hat{f}(u) du.
\end{aligned}$$

Or  $|a_n(u)e^{iux}\hat{f}(u)| \leq |\hat{f}(u)| \in L^1(\mathbb{R})$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(u) = \frac{1}{2\pi}$  pour tout  $u$ . En appliquant le théorème de convergence dominée on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n * f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u)e^{iux} du = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(-x).$$

Par ailleurs,  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $(\alpha_n)$  est une approximation de l'unité donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\alpha_n * f - f\|_1 = 0$ . D'après le théorème de Riesz-Fischer, il existe une sous-suite  $(\alpha_{\varphi(n)})$  telle que  $\alpha_{\varphi(n)} * f$  converge presque partout vers  $f$ . D'où  $f = \hat{f}(-\cdot)$  presque partout.  $\square$

*Remarque.* Si on prend pour convention

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi tx} dx,$$

il faut prendre  $a_n(x) := e^{-\frac{|x|}{n}}$ .

## Références

- [1] Marc Briane, Gilles Pagès, *Théorie de l'intégration*, Vuibert, 2006, page 279.