Théorème de Krein-Milmann

Lemme 0.1. *Soit $a \in K$ tel qu'il existe un hyperplan d'appui H contenant a, alors a est extrémal dans K si et seulement si a est extrémal dans $K \cap H$.*

Démonstration. ⋆ Soit a extrémal dans K. Soit $u, v \in K \cap H$ tels que $a = \dfrac{u+v}{2}$, alors en particulier, u et v appartiennent à K. L'égalité $a = \dfrac{u+v}{2}$ est encore valable dans K, or a est extrémal dans K, donc $u = v = a$. Le point a est donc extrémal dans $K \cup H$.

⋆ Soit a un point extrémal de $K \cap H$. Il existe une forme linéaire φ telle que $H = \varphi^{-1}(\{1\})$ et $K \subset \{\varphi \leqslant 1\}$. Soit $u, v \in K$ tels que $a = \dfrac{u+v}{2}$, on a donc

$$1 = \varphi(a) = \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2} \leqslant 1$$

or $\varphi(u) \leqslant 1$ et $\varphi(v) \leqslant 1$, on doit donc avoir $\varphi(u) = \varphi(v) = 1$. On a donc $u, v \in K \cap H$, or a est extrémal dans $k \cap H$, l'égalité $a = \dfrac{u+v}{2}$ entraine donc $a = u = v$.

□

Théorème 0.1 (Krein-Milmann)**.** *Soit K un convexe compact de $\mathbb{R}^n$, alors K est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.*

Démonstration. Soit $E_a(K)$ l'espace affine engendré par K, nous allons montrer le résultat par récurrence sur la dimension de $E_a(K)$.

Supposons que $\dim(E_a(K)) = 0$, alors K est un singleton et le résultat est évident puisque l'ensemble des points extrémaux de K est K lui-même.

Supposons le résultat vrai pour tout convexe C tel que $\dim(E_a(C)) < p$. Supposons que $\dim(E_a(K)) = p$. Comme K est un convexe compact non vide, K est l'enveloppe convexe de sa frontière. Il suffit donc de montrer que $\mathrm{Fr}(K) \subset \mathrm{conv}(\mathcal{E}(K))$.

Soit $c \in \mathrm{Fr}(K)$, alors il existe un hyperplan d'appui contenant c. $c \in K \cap H$, or $\dim(E_a(k \cap H)) \leqslant \dim(H) < p$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, c est combinaison convexe des points extrémaux de $K \cap H$.

Or d'après la question précédente, $\mathcal{E}(K \cap H) \subset \mathcal{E}(K)$, donc a fortiori, c est combinaison convexe des points extrémaux de K. Ceci étant vrai pour tout point de la frontière, et comme $\mathrm{conv}(\mathrm{Fr}(K)) = K$, la propriété est vrai pour tout point de K. On a donc démontré le théorème.

$\square$