

## L'ESPACE DE MINKOWSKI EN GÉOMÉTRIE

---

GUÉRIN Alexis  
Dirigé par ROCHON Frédéric  
Laboratoire du CIRGET, UQAM, Montréal  
mai-juin 2022

En 1905, dans son article *De l'électrodynamique des corps en mouvement* Albert Einstein énonce les deux postulats qui bouleverseront la conception de la physique de l'époque et qui donneront naissance à la théorie de la relativité restreinte :

- Tous les référentiels inertiels sont équivalents : les lois de la physique y sont les mêmes.
- La vitesse de la lumière dans le vide est toujours la même quelque soit le référentiel d'observation.

L'espace de Minkowski est une visualisation de l'espace-temps qui résulte de la théorie de la relativité restreinte. Cet espace est d'abord introduit par Henri Poincaré en 1905 dans son article *Mémoire de Palerme* soit deux ans avant l'article de Hermann Mikowski. Cependant c'est bien Minkowski qui sera le premier à interpréter cet espace comme représentation de l'espace-temps selon la théorie de la relativité restreinte.

En mathématiques, plus particulièrement en géométrie, on utilise cet espace pour visualiser dans un autre contexte certains objets géométriques.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>L'espace de Minkowski</b>	<b>4</b>
1.1	Les définitions . . . . .	4
1.2	Quelques résultats sur l'espace de Minkowski . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Un peu de géométrie inversive</b>	<b>10</b>
2.1	Les bases de la géométrie inversive. . . . .	10
2.2	Le lien avec l'espace de Minkowski . . . . .	15
<b>3</b>	<b>L'espace des cercles</b>	<b>21</b>
3.1	Les quadriques affines . . . . .	21
3.2	L'espace des cercles . . . . .	22
3.3	Le centre d'un cercle . . . . .	23
3.4	Les faisceaux de cercles . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Invariance des équations de Maxwell par action de <math>O(1,3)</math></b>	<b>26</b>
4.1	Le cas d'un boost . . . . .	27
4.2	Le cas des rotations spatiales . . . . .	28
4.3	Le cas de $S$ et $T$ . . . . .	28

# 1 L'espace de Minkowski

## 1.1 Les définitions

**Définition 1.1** L'espace de Minkowski  $\mathcal{M}$  est un espace affine pseudo-euclidien de dimension quatre :  $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^4, q_{\mathcal{M}})$  où  $q_{\mathcal{M}}$  est la forme quadratique suivante : Soit  $u = (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$

$$q_{\mathcal{M}}(u) = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

Dans la suite on notera  $b_{\mathcal{M}}$  la forme bilinéaire associée à la forme quadratique  $q_{\mathcal{M}}$ . Soient  $u = (t, x, y, z)$   $v = (t', x', y', z') \in \mathbb{R}^4$ , alors,

$$\begin{aligned} b_{\mathcal{M}}(u, v) &= \frac{1}{2} (q_{\mathcal{M}}(u+v) - q_{\mathcal{M}}(u) - q_{\mathcal{M}}(v)) \\ &= -tt' + xx' + yy' + zz' \end{aligned}$$

$q_{\mathcal{M}}$  est une forme quadratique de signature  $(-, +, +, +)$ , elle n'est pas définie positive partout. Dans la suite nous appellerons *cône de lumière* le sous ensemble de l'espace de Minkowski défini ainsi :

$$\mathcal{L} := q^{-1}(\{0\})$$

Cette appellation vient de l'interprétation physique de l'espace de Minkowski. En effet si l'objet étudié se situe en  $(0, 0, 0, 0)$  alors il ne pourra atteindre les points du cône de lumière que s'il se déplace à la vitesse de la lumière.

Un autre sous ensemble de l'espace de Minkowski avec lequel nous allons travailler est  $\mathbb{H}^3$  l'hyperbole de  $\mathbb{R}^4$  qui peut être définie ainsi :

$$\mathbb{H}^3 := \{u \in \mathcal{M} \text{ tel que } q_{\mathcal{M}}(u) = -1 \text{ et } t > 0\}$$

Nous noterons également  $\bar{\mathbb{H}}^3 = \{u \in \mathcal{M} \text{ tel que } q_{\mathcal{M}}(u) = -1\}$

La forme quadratique de Minkowski vient tout droit d'un résultat physique. En effet, en théorie de la relativité restreinte, lorsque l'on s'intéresse à des changements de référentiel, en théorie de la relativité, on voit apparaître des transformations linéaires qui ont comme propriété principale de conserver *l'intervalle espace temps* en tout point de l'espace temps ([Lang](#)). Cet intervalle espace temps n'est en fait, pour nous, que la valeur de la forme quadratique de Minkowski en un point de  $\mathcal{M}$ . Ces transformations sont appelées transformations de Lorentz et ont donc pour définition :

**Définition 1.2** Soit  $s$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^4$ , qui a comme représentation matricielle  $A \in M_4(\mathbb{R})$ , on dit que  $s$  est une *transformation de Lorentz* si elle vérifie la condition suivante :

$$\forall u \in \mathcal{M} \quad q_{\mathcal{M}}(Au) = q_{\mathcal{M}}(u) \tag{1}$$

Le groupe des transformations de Lorentz est en fait le groupe orthogonal pour la forme quadratique  $q_{\mathcal{M}}$ . On notera  $O(1, 3)$  l'ensemble des transformations de Lorentz.

Dans la suite nous confondrons application linéaire et représentation matricielle.

Discutons maintenant de certains sous groupes de  $O(1, 3)$  qui nous seront utiles dans la suite. Si on note  $\langle . | . \rangle$  le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^4$  alors pour tout  $u$  et  $v$  de  $\mathcal{M}$ ,  $b_{\mathcal{M}}(u, v) = \langle u | Mv \rangle$  où  $M = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ . On peut donc déduire de cette remarque une condition équivalente à la condition [\(1\)](#). Soit  $A$  une transformation de Lorentz, alors,

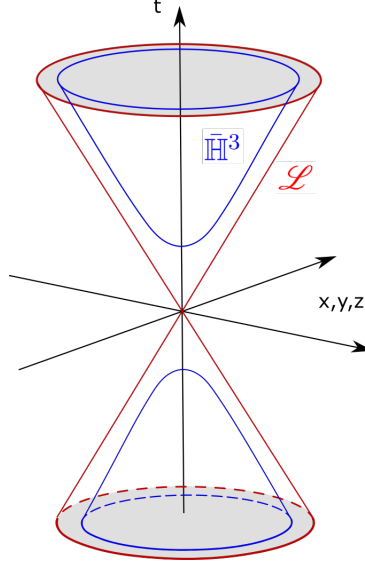


FIGURE 1 – Représentation de l'espace de Minkowski

$$\forall u, v \in \mathcal{M} \quad b_{\mathcal{M}}(Au, Av) = b_{\mathcal{M}}(u, v) \Leftrightarrow \forall u, v \in \mathcal{M} \quad \langle Au | MAv \rangle = \langle u | Mv \rangle \Leftrightarrow M = A^T M A \quad (2)$$

De cette nouvelle condition on peut en déduire que si  $A \in O(1, 3)$  alors  $\det(A) = \pm 1$ . Ainsi, il nous semble naturel d'introduire le sous groupe de  $O(1, 3)$  suivant :  $SO(1, 3) := \{A \in O(1, 3) \text{ tel que } \det(A) = 1\}$

On peut facilement prouver avec la condition (I) et la définition de  $\mathbb{H}^3$ , qu'une transformation de Lorentz conservera toujours  $\mathbb{H}^3$ . En revanche, ce n'est pas toujours le cas pour  $\mathbb{H}^3$ . En effet, la réflexion selon l'hyperplan spatiale ( $t = 0$ ) est bien une transformation de Lorentz mais elle ne conserve pas  $\mathbb{H}^3$ . Ce caractère n'est pas lié au signe du déterminant. Un exemple de transformation de Lorentz qui ne conserve pas  $\mathbb{H}^3$  mais qui a un déterminant égal à 1 est  $-I_4$ . On notera donc dans la suite  $O_o(1, 3)$  l'ensemble des transformation de Lorentz qui préserve  $\mathbb{H}^3$  :  $O_o(1, 3) := \{A \in O(1, 3) \text{ tel que } A(\mathbb{H}^3) = \mathbb{H}^3\}$ . En alliant les notations précédemment introduite, on pose  $SO_o(1, 3) := SO(1, 3) \cap O_o(1, 3)$ .

**Remarque 1.3** On peut caractériser les matrices de  $SO_o(1, 3)$  avec une autre condition. Si on prend  $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 0,3 \rrbracket} \in O(1, 3)$  alors dire que  $A$  conserve  $\mathbb{H}^3$  est équivalent à dire que  $a_{0,0} \geq 1$ . En effet la condition  $A$  conserve  $\mathbb{H}^3$  est équivalent à dire que  $A$  envoie un seul élément de  $\mathbb{H}^3$  dans  $\mathbb{H}^3$ , on choisit alors le vecteur  $e_0 = (1, 0, 0, 0) \in \mathbb{H}^3$  et la condition  $Ae_0 \in \mathbb{H}^3$  est équivalent à :

$$a_{0,0} > 0 \quad \text{et} \quad a_{0,0}^2 = 1 + a_{0,1}^2 + a_{0,2}^2 + a_{0,3}^2$$

La deuxième égalité étant toujours vérifiée par le fait que  $A \in O(1, 3)$ , on peut reformuler la première en utilisant la deuxième, ce qui nous donne :  $a_{0,0} \geq 1$ .

On peut réaliser le même raisonnement pour les transformations de Lorentz qui ne conservent pas  $\mathbb{H}^3$ , donc tel que  $A(\mathbb{H}^3) = \mathbb{H}^3 \setminus \mathbb{H}^3$ , et prouver que cette condition est équivalent à  $a_{0,0} \leq -1$ .

## 1.2 Quelques résultats sur l'espace de Minkowski

Dans la suite nous allons faire le lien entre différentes géométries et l'espace de Minkowski. Pour cela nous devons établir quelques résultats sur l'espace de Minkowski et les transformations de Lorentz.

**Propriété 1.4** Une combinaison linéaire de deux vecteurs du cône de lumière non colinéaires ne peut pas être dans le cône de lumière.

*Preuve* : Soient  $u_1$  et  $u_2$  deux vecteurs du cône de lumière qui ne sont pas colinéaires. Si pour  $i \in \{1, 2\}$  on note  $u_i = (t_i, x_i, y_i, z_i)$ , comme  $q_{\mathcal{M}}(u_i) = 0$  on a en particulier  $t_i = \pm \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$ . Donc,  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{M}}(\lambda u_1 + \mu u_2) &= \lambda^2 q_{\mathcal{M}}(u_1) + \mu^2 q_{\mathcal{M}}(u_2) + 2b_{\mathcal{M}}(\lambda u_1, \mu u_2) \\ &= 0 + 0 + 2b_{\mathcal{M}}(\lambda u_1, \mu u_2) \\ &= \lambda \mu (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - t_1 t_2) \\ &= \lambda \mu \underbrace{\left( x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \mp \sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)} \right)}_{\substack{< 0 \text{ par l'inégalité de Cauchy Schwarz si -} \\ > 0 \text{ par l'inégalité de Cauchy Schwarz si +}}} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Donc  $\lambda u_1 + \mu u_2$  n'appartient pas au cône de lumière. □

**Propriété 1.5** L'action naturelle de  $O_o(1, 3)$  sur  $\mathbb{H}^3$  induit un isomorphisme entre  $\mathbb{H}^3$  et  $O_o(1, 3)/O_3(\mathbb{R})$

*Preuve* : Nous allons commencer par prouver que l'action de  $O_o(1, 3)$  sur  $\mathbb{H}^3$  est une action transitive. Soient  $u_0, v_0 \in \mathbb{H}^3$ , montrons qu'il existe  $s \in O_o(1, 3)$  tel que  $s(u_0) = v_0$ . Soit  $D$  une droite de  $\mathbb{R}^4$  qui n'appartient pas au cône de lumière et  $P$  l'hyperplan orthogonal à  $D$  pour  $q_{\mathcal{M}}$ . Dans ce cas  $\mathbb{R}^4 = D \oplus P$ . On pose alors

$$s_P \left| \begin{array}{l} \mathcal{M} = D \oplus P \longrightarrow \mathcal{M} \\ u_1 + u_2 \longmapsto u_1 - u_2 \end{array} \right.$$

Soient  $u$  et  $v$  dans  $\mathbb{R}^4$  et  $s$  une transformation de Lorentz. Alors,

$$\begin{aligned} b_{\mathcal{M}}(s_P(u), s_P(v)) &= b_{\mathcal{M}}(u_1 - u_2, v_1 - v_2) = b_{\mathcal{M}}(u_1, v_1) + 0 + 0 + b_{\mathcal{M}}(u_2, v_2) \\ b_{\mathcal{M}}(u, v) &= b_{\mathcal{M}}(u_1 + u_2, v_1 + v_2) = b_{\mathcal{M}}(u_1, v_1) + 0 + 0 + b_{\mathcal{M}}(u_2, v_2) \end{aligned}$$

Donc  $s_P \in O(1, 3)$ . Pour le cas particulier de  $D = Vect(v_0 - u_0)$  alors l'hyperplan orthogonal à  $D$  est défini par la forme linéaire  $\phi \left| \begin{array}{l} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \\ u \longmapsto b_{\mathcal{M}}(u, u_0 - v_0) \end{array} \right.$  Un élément remarquable du noyau de  $\phi$  est  $\frac{u_0 + v_0}{2}$ . Ainsi,

$$s_P(u_0) = s_P\left(\frac{u_0 + v_0}{2}\right) + s_P\left(\frac{u_0 - v_0}{2}\right) = \frac{u_0 + v_0}{2} - \frac{u_0 - v_0}{2} = v_0$$

Pour terminer la première partie de la démonstration, il faut que l'on prouve que  $s_P$  appartient bien à  $O_o(1, 3)$ . Or comme  $s_P$  est une transformation de Lorentz  $s_P(\mathbb{H}^3) = \mathbb{H}^3$  de plus  $\mathbb{H}^3$  a deux composantes connexes,  $\mathbb{H}^3$  et son symétrique par rapport à l'hyperplan d'équation  $t = 0$ . Or  $s_P|_{\mathbb{H}^3}$  est continue donc envoie une composante connexe de  $\mathbb{H}^3$  sur une composante connexe de ce même

espace, et comme  $s_P|_{\mathbb{H}^3}(u_0) = v_0 \in \mathbb{H}^3$  alors  $s_P(\mathbb{H}^3) = \mathbb{H}^3$ . Donc  $s_P \in O_o(1, 3)$ . L'action naturelle de  $O_o(1, 3)$  sur  $\mathbb{H}^3$  est bien transitive.

Avec le résultat que nous venons d'établir on peut affirmer que  $\mathbb{H}^3 \simeq O_o(1, 3)/Stab(u)$  avec  $u$  un élément quelconque de  $\mathbb{H}^3$ . Prenons  $u_0 = (1, 0, 0, 0)$  et calculons son stabilisateur : Soit  $s \in Stab(u_0)$  donc  $s(e_0) = e_0$ . De plus, si on note  $A$  la représentation matricielle de  $s$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ , alors comme  $M = A^T M A$  (2) cela nous permet d'écrire que :  $M u_0 = A^T M A u_0 \Rightarrow -u_0 = A^T u_0$ . En utilisant aussi que  $A u_0 = u_0$ , on peut affirmer que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ avec } A' \in M_3(\mathbb{R})$$

Or, si on note  $\langle \cdot | \cdot \rangle_3$  le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^3$ , pour tout  $u_1 = (t_1, x_1, y_1, z_1), u_2 = (t_2, x_2, y_2, z_2)$  de l'espace de Minkowski :

$$\begin{aligned} q_M(Au_1, Au_2) &= q_M(u_1, u_2) \\ \Rightarrow \langle Au_1, MAu_2 \rangle &= \langle u_1, Mu_2 \rangle \\ \Rightarrow -tt' + \langle A'u'_1 | A'u'_2 \rangle_3 &= -tt' + \langle u'_1 | u'_2 \rangle_3 \text{ avec } u'_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3 \\ \Rightarrow A' &\in O_3(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Donc  $Stab(u_0) \subset \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} A' \in O_3(\mathbb{R}) \right\}$ , l'inclusion inverse étant évidente, on a donc l'égalité. Ainsi  $Stab(u_0) \simeq O_3(\mathbb{R})$ .

En combinant les différents résultats de cette démonstration on peut conclure que  $\mathbb{H}^3 \simeq O_o(1, 3)/O_3(\mathbb{R})$

□

**Remarque 1.6** En reproduisant le même type de démonstration, on peut également prouver que  $\mathbb{H}^3 \simeq SO_o(1, 3)/SO_3(\mathbb{R})$

Grâce à ce résultat on peut exhiber les composantes connexes de  $O(1, 3)$ .

**Propriété 1.7** L'ensemble des transformations de Lorentz  $O(1, 3)$ , a quatre composantes connexes : les transformations de Lorentz de déterminant  $\pm 1$ , qui préservent ou nous  $\mathbb{H}^3$ . De plus les composantes connexes sont toutes les quatres isomorphes à  $SO_o(1, 3)$ .

*Preuve :* Nous allons introduire des notations provisoires qui ne serviront que dans cette preuve. On notera  $\hat{SO}(1, 3)$  le sous groupe des transformations de Lorentz de déterminant égal à  $-1$  et  $SO_1(1, 3)$  les transformations de Lorentz qui ne préserve pas  $\mathbb{H}^3$ . Ainsi, il est évident que

$$O(1, 3) = SO_o(1, 3) \sqcup \hat{SO}_o(1, 3) \sqcup SO_1(1, 3) \sqcup \hat{SO}_1(1, 3)$$

De plus il existe les homéomorphismes suivants :

$$\left| \begin{array}{ccc} \hat{SO}_o(1, 3) & \longrightarrow & SO_o(1, 3) \\ A & \longmapsto & SA \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} SO_1(1, 3) & \longrightarrow & SO_o(1, 3) \\ A & \longmapsto & STA \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} \hat{SO}_1(1, 3) & \longrightarrow & SO_o(1, 3) \\ A & \longmapsto & TA \end{array} \right|$$

$$\text{avec } T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ la réflexion par rapport à l'hyperplan } t = 0 \text{ et } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On peut donc écrire :

$$O(1, 3) = SO_o(1, 3) \sqcup S SO_o(1, 3) \sqcup ST SO_o(1, 3) \sqcup T SO_o(1, 3) \quad (3)$$

Montrons que  $SO_o(1,3)$  est connexe. Pour cela, utilisons les variétés différentielles. Pour cela nous allons utiliser la notion de faisceau de fibre :

Soient  $E, B$  et  $F$  des variétés différentielles et  $\pi : E \rightarrow B$  qui est  $C^\infty$ . Le triplet  $(\pi, E, B)$  est un *faisceau de fibre* (avec  $F$  la fibre,  $B$  la base et d'espace total  $E$  si,  $\pi$  est surjective et il existe un recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$  de  $B$ , et des difféomorphismes  $h_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$  tel que  $h_i(\pi^{-1}(x)) = \{x\} \times F \ \forall x \in U_i$ . Nous utiliserons alors le lemme suivant :

*Lemme* : Soit  $\pi$  un fibré de base et de fibre  $F$  connexe alors l'espace total  $E$  est connexe par arc donc en particulier connexe.

Prouvons ce lemme :  $E$  et  $F$  sont des variétés ils sont donc localement connexes par arc, de plus  $F$  est connexe donc  $F$  est connexe par arc.  $E = \cup_{i \in I} \pi^{-1}(U_i)$  or  $\pi^{-1}(U_i) \simeq U_i \times F$  et on peut supposer que les  $U_i$  sont connexes par arc, donc  $U_i \times F$  est connexe par arc, ainsi  $\pi^{-1}(U_i)$  l'est aussi. Soient  $x \in \pi^{-1}(U_i)$  et  $y \in \pi^{-1}(U_{i'})$ ,  $F$  étant connexe par arc, il existe  $\gamma$  un chemin de  $\pi(x)$  à  $\pi(y)$ . Or  $\gamma([0,1])$  est compact donc  $\gamma([0,1]) \subset \cup_{j=1}^{n+1} U_{i_j}$  avec  $U_{i_j} \cap U_{i_{j+1}} \neq \emptyset$ . On note  $z_j \in U_{i_j} \cap U_{i_{j+1}}$  avec  $U_{i_1} = U_i$  et  $U_{i_{n+1}} = U_{i'}$ . On note  $w_\epsilon \in \pi^{-1}(\{z_j\})$  tel que  $\pi(w_\epsilon) = z_j$  avec  $\epsilon \in \{j, j+1\}$ . Or  $w_\epsilon \in \pi^{-1}(\{z_j\})$  et  $\pi^{-1}(\{z_j\}) \simeq \{z_j\} \times F$  qui est connexe par arc, donc  $w_j \rightarrow w_{j+1}$ . De plus  $w_1$  et  $x$  appartiennent à  $\pi^{-1}(U_{i_1})$  qui est connexe par arc donc  $x \rightarrow w_1$ . De même  $w_n$  et  $y$  appartiennent à  $\pi^{-1}(U_{i_{n+1}})$  qui est aussi connexe par arc donc  $w_n \rightarrow y$ . Ainsi  $x \rightarrow y$  pour tout  $x, y$  appartenant à  $E$ . Donc  $E$  est connexe par arc, ainsi  $E$  est connexe.

Ainsi en utilisant le lemme précédent sur le fibré  $\pi : SO_o(1,3) \xrightarrow{\sim} SO_o(1,3)/SO(3) \simeq \mathbb{H}^3$ , or  $\mathbb{H}^3$  et  $SO(3)$  sont connexes, donc  $SO_o(1,3)$  l'est aussi. Donc nous avons au plus quatre composantes connexes. L'application déterminant nous permet d'affirmer qu'il en existe au moins deux (déterminant égale à  $\pm 1$ ) et avec la remarque 1.3, l'application  $\left. \begin{array}{l} O(1,3) \longrightarrow \{-1,1\} \\ A \longmapsto \frac{a_{0,0}}{|a_{0,0}|} \end{array} \right\}$  nous permet de conclure qu'il en existe au moins quatre, donc exactement quatre.

□

La décomposition en composante connexe de  $O(1,3)$  mise en évidence dans la démonstration :

$$O(1,3) = SO_o(1,3) \sqcup S SO_o(1,3) \sqcup ST SO_o(1,3) \sqcup T SO_o(1,3) \quad (4)$$

nous permet de simplifier la recherche de générateur du groupe  $O(1,3)$ .

En physique, les transformations de Lorentz correspondent à des changements de référentiels inertiels. Lorsque l'on se place dans le cas où un des deux référentiels à un mouvement rectiligne uniforme selon un des axes de l'autre référentiel, alors la transformation de Lorentz associée est un boost, sa matrice a alors la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \cosh(\phi) & \sinh(\phi) & 0 & 0 \\ \sinh(\phi) & \cosh(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \phi \in \mathbb{R}$$

Ce type de boost correspond à un mouvement rectiligne uniforme selon l'axe des  $x$ .

$$\text{On note } \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & \sinh(\phi) & 0 & 0 \\ \sinh(\phi) & \cosh(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \phi \in \mathbb{R} \right\} \text{ l'ensemble des boosts selon une coordon-}$$



née et  $\mathcal{K} = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ avec } A' \in SO(3) \right\}$  l'image de  $SO(3)$  dans  $SO(1,3)$ . Avec la remarque [1.3](#) il est évident que  $\mathcal{A}, \mathcal{K} \subset SO_o(1,3)$ .

**Propriété 1.8 Décomposition de Cartan de  $SO_o(1,3)$**

On peut décomposer  $SO_o(1,3)$  grâce aux deux groupes décrit précédemment. Cette décomposition est la décomposition de Cartan de  $SO_o(1,3)$  :

$$SO_o(1,3) = \mathcal{K} \mathcal{A} \mathcal{K}$$

*Preuve :* Dans la suite nous noterons  $Sym_4^+$  l'ensemble des matrices symétriques définies positives. La décomposition polaire de  $O(1,3)$  (voir [\[Paul\]](#) Chap 1) nous permet de dire que l'application :

$$\left| \begin{array}{l} O(1,3) \cap O(4) \times O(1,3) \cap Sym_4^+ \longrightarrow O(1,3) \\ ( A \quad , \quad B ) \longmapsto AB \end{array} \right.$$

est un homéomorphisme. De plus en utilisant les définitions des groupes  $O(1,3)$  et  $O(4)$ , on peut montrer que :

$$O(1,3) \cap O(4) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad a = \pm 1 \quad B \in O(3) \right\}$$

Grâce à cette description, on peut facilement montrer que  $O(1,3) \cap O(4)$  a quatre composantes connexes ( $a = \pm 1$ ,  $B$  appartient ou non à  $SO(3)$ ). La composante connexe de l'identité étant exactement le groupe  $\mathcal{K}$ . De plus, on sait que  $O(1,3)$  a également quatre composantes connexes, donc l'homéomorphisme précédent nous permet d'affirmer que  $O(1,3) \cap Sym_4^+$  est connexe. Ainsi  $\mathcal{K} \times (SO_o(1,3) \cap Sym_4^+)$  est connexe, ce qui nous permet d'affirmer que l'application

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{K} \times (SO_o(1,3) \cap Sym_4^+) \longrightarrow SO_o(1,3) \\ ( A \quad , \quad B ) \longmapsto AB \end{array} \right.$$

est un homéomorphisme.

Comme dernière étape de la preuve nous allons montrer que tout élément  $H \in SO_o(1,3) \cap Sym_4^+$  est conjugué par un élément  $K \in \mathcal{K}$  à un élément  $A \in \mathcal{A}$ . Soit  $H = \begin{pmatrix} a & v^T \\ u & B \end{pmatrix}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $u, v \in \mathbb{R}^3$ ,  $B \in M_3(\mathbb{R})$  un élément de  $SO_o(1,3) \cap Sym_4^+$ . Par symétrie de  $H$ , alors  $u = v$  et  $B \in Sym_3$ . Comme  $H \in O(1,3)$  elle doit vérifier la condition [\(2\)](#). Ainsi :

$$\begin{pmatrix} a & u^T \\ u & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & u^T \\ u & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Ce qui est équivalent au système suivant :

$$-a^2 + u^T u = -1, -au + Bu = 0, -uu^T + B^2 = I_3$$

En utilisant la remarque [1.3](#) pour  $H$  on sait que  $a \geq 1$ . La matrice  $I_3 + uu^T$  est définie positive, elle admet donc une racine carrée qui est elle aussi définie positive et que l'on notera  $\sqrt{I_3 + uu^T}$ .  $H$  étant définie positive,  $B$  l'est aussi. Le système est donc équivalent à :

$$a = \sqrt{1 + u^T u}, Bu = au, B = \sqrt{I_3 + uu^T}$$

Soit  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ , nous avons alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & u^T \\ u & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & (C'u)^T \\ C'u & C'BC'^T \end{pmatrix}$$

De plus  $SO(3)$  agit transitivement sur les droites vectorielles de  $\mathbb{R}^3$  (car chaque droite unitaire à un vecteur directeur qui fait parti d'une base orthonormée direct), donc il existe  $C'_0 \in SO(3)$  tel que  $C'_0 u$  appartient à la droite vectorielle de vecteur directeur  $(1, 0, 0)$ . On note alors  $C'_0 u = (b, 0, 0)$ . Ainsi avec les calculs que l'on a précédemment réalisé,

$$C'_0 B C_0'^T = \sqrt{I_3 + C'_0 u u^T C_0'^T} = \sqrt{I_3 + C'_0 u (C'_0 u)^T} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En posant  $\sqrt{1+b^2}$ , nous avons prouvé qu'il existe  $C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C'_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$  tel que

$$CHC^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: A$$

Comme  $A \in SO_o(1, 3)$  avec la condition [\(2\)](#) appliquée à  $A$  on obtient que :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne en particulier que  $-a^2 + b^2 = -1$ . Or d'après l'expression de  $a$ ,  $a > 0$  ainsi, il existe  $\phi \in \mathbb{R}$  tel que  $a = \cosh(\phi)$  et  $b = \sinh(\phi)$ . De plus comme  $\det(A) = 1$   $ad - b^2 = 1 = a^2 - b^2$ , alors  $d = a$ . On peut donc conclure que  $A$  est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & \sinh(\phi) & 0 & 0 \\ \sinh(\phi) & \cosh(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui achève la preuve. □

## 2 Un peu de géométrie inversive

### 2.1 Les bases de la géométrie inversive.

La géométrie inversive est la géométrie qui étudie les angles entre des courbes du plan étendu  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  ayant un point d'intersection. Pour rappel, grâce à la projection stéréographique, on peut prouver que le plan étendu est homéomorphe à la sphère  $\mathbb{S}^2$ .

**Définition 2.1** Une courbe de  $\hat{\mathbb{C}}$  est l'image d'une fonction  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  différentiable en tout point. Soient deux courbes  $C_1$  et  $C_2$ , données par les fonctions  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , qui s'intersectent au point  $P \in \mathbb{C}$ .

Ainsi, il existe  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  tel que  $\gamma_1(t_1) = P = \gamma_2(t_2)$ . On appelle alors *angle entre  $C_1$  et  $C_2$  au point  $P$* , la valeur  $\theta \in [0, \pi[$  tel que :

$$\cos(\theta) = \frac{\langle d_{t_1}\gamma_1(0) | d_{t_2}\gamma_2(0) \rangle}{\|d_{t_1}\gamma_1(0)\| \|d_{t_2}\gamma_2(0)\|}$$

avec  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  le produit scalaire de  $\mathbb{R}^2$  et  $\|\cdot\|$  sa norme associée.

**Définition 2.2** Une *transformation conforme*  $t : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  est une bijection qui préserve les angles. En d'autres termes, si deux courbes de  $\hat{\mathbb{C}}$ ,  $C_1$  et  $C_2$ , s'intersectent en  $P$  pour former un angle  $\theta$  alors les courbes  $t(C_1)$  et  $t(C_2)$  s'intersectent en  $t(P)$  pour former un angle  $\psi$  tel que  $\cos(\psi) = \cos(\theta)$

On notera  $TC(\hat{\mathbb{C}})$  l'ensemble des transformations conformes

De plus si  $C_1$  et  $C_2$  sont orientées, alors on dit que  $t$  *préserve l'orientation* si l'ordre (horaire ou anti-horaire) dans lequel les deux courbes se croisent est préservé. Dans le cas de la figure [2.1](#), la transformation conforme ne préserve pas l'orientation.

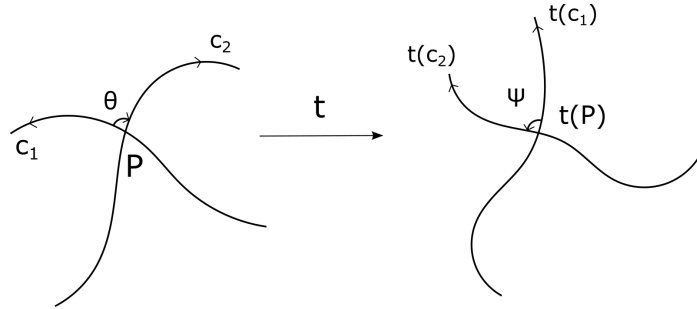


FIGURE 2 – Illustration de la propriété de conservation des angles d'une transformation conforme.

**Remarque 2.3** Avec la définition précédente, il est facile de prouver que l'ensemble des transformations conforme muni de la composition forme un groupe.

**Propriété 2.4** Les transformations de  $\hat{\mathbb{C}}$  induite par les transformations orthogonales, les translations, les isométries et les homothéties de  $\mathbb{R}^2$ , en ajoutant que l'image de  $\infty$  est  $\infty$ , sont des transformations conformes.

*Preuve :* Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux courbes, images des fonctions  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , qui s'intersectent en  $P$  ( $\gamma_1(t_1) = P = \gamma_2(t_2)$ ) avec un angle  $\theta$ . Soit  $t$  une transformation de  $\hat{\mathbb{C}}$  induite par une transformation orthogonale de  $\mathbb{R}^2$ , alors

$$\frac{\langle d_{t_1}(t \circ \gamma_1)(0) | d_{t_2}(t \circ \gamma_2)(0) \rangle}{\|d_{t_1}(t \circ \gamma_1)(0)\| \|d_{t_2}(t \circ \gamma_2)(0)\|} = \frac{\langle t(d_{t_1}\gamma_1(0)) | t(d_{t_2}\gamma_2(0)) \rangle}{\|t(d_{t_1}\gamma_1(0))\| \|t(d_{t_2}\gamma_2(0))\|} = \frac{\langle d_{t_1}\gamma_1(0) | d_{t_2}\gamma_2(0) \rangle}{\|d_{t_1}\gamma_1(0)\| \|d_{t_2}\gamma_2(0)\|} = \cos(\theta)$$

Donc  $t$  est bien une transformation conforme. Avec le même genre de démonstration, il est évident que les translations et les homothéties sont des transformations conformes. De plus une isométrie de  $\mathbb{R}^2$  est la composition d'une transformation orthogonale et d'une translation. C'est donc bien une transformation conforme.

□

**Définition 2.5** Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $P \in \mathbb{R}^2$  et de rayon  $r$ . L'inversion par rapport au cercle  $\mathcal{C}$  est l'application  $i_{\mathcal{C}} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  telle que  $i_{\mathcal{C}}(\infty) = P$ ,  $i_{\mathcal{C}}(P) = \infty$  et pour  $Q \in \mathbb{C} \setminus \{P\}$  alors  $i_{\mathcal{C}}(Q) = Q'$  où  $Q'$  est le point de demi-droite  $[PQ)$  tel que  $\overline{PQ} \cdot \overline{PQ'} = r^2$ .

Soit  $L$  une droite de  $\mathbb{R}^2$ . On pose  $\mathcal{C} = L \cup \{\infty\}$ , alors l'inversion par rapport à  $\mathcal{C}$  est la réflexion par rapport à la droite  $L$  dans le plan  $\mathbb{R}^2$  et telle que  $i_{\mathcal{C}}(\infty) = \infty$

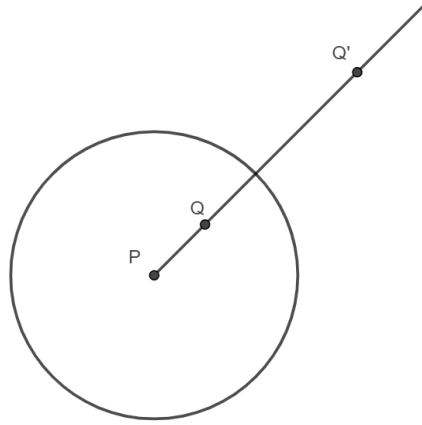


FIGURE 3 – Image de  $Q(Q')$  par une inversion associée au cercle  $\mathcal{C}$

**Remarque 2.6** Les deux définitions données dans le paragraphe précédent (2.5) sont reliées par le concept de cercle généralisé que nous aborderons dans la partie 3.

**Exemple 2.7** Pour  $\mathcal{C}_0$  le cercle unité, l'inversion correspondante est l'application :

$$i_{\mathcal{C}_0} \left| \begin{array}{l} \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ z \longmapsto \begin{array}{ll} \frac{1}{z} & \text{si } z \in \mathbb{C}^* \\ \infty & \text{si } z = 0 \\ 0 & \text{si } z = \infty \end{array} \end{array} \right.$$

**Définition 2.8** Une transformation inversive  $t : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  est la composition d'un nombre fini d'inversion de  $\hat{\mathbb{C}}$ .

Il est évident que l'ensemble des transformations inversives de  $\hat{\mathbb{C}}$  forme un groupe.

**Propriété 2.9** Les transformations de  $\hat{\mathbb{C}}$  induites par des rotations, des translations ou des homothéties de  $\mathbb{R}^2$  sont des transformations inversives.

*Preuve :* La démonstration devient évidente lorsque l'on se souvient que les transformations euclidiennes de  $\mathbb{R}^2$  sont engendrés par les réflexions de  $\mathbb{R}^2$ . Ainsi les rotations et les translations de  $\hat{\mathbb{C}}$  sont des composés d'inversions par rapport à des droites. On pourrait invoquer le même argument pour les homothéties mais on peut aussi le faire de la façon suivante : Soit  $h_r$  une homothétie de  $\hat{\mathbb{C}}$ , alors

$$h_r = i_{\mathcal{C}_{\sqrt{r}}} \circ i_{\mathcal{C}_r}$$

avec  $\mathcal{C}_{\sqrt{r}}$  et  $\mathcal{C}_r$  les cercles de centre l'origine et de rayon respectif  $\sqrt{r}$  et  $r$ .

□

**Propriété 2.10** Une transformation inversive est une transformation conforme.

*Preuve :* Comme le groupe des transformations inversives est engendré par les inversions, il suffit de vérifier que la propriété est vraie pour les inversions. Si  $\mathcal{C} = L \cup \{\infty\}$ , alors  $i_{\mathcal{C}}$  est induite par une isométrie de  $\mathbb{R}^2$  et est donc une transformation conforme par la propriété 2.4. Maintenant si  $\mathcal{C}$  est un cercle de centre  $P$  et de rayon  $r$ . Soient  $t_P$  la translation qui envoie  $P$  sur l'origine et  $h_r$  l'homothétie de rapport  $r$ . Alors :

$$i_{\mathcal{C}} = h_r \circ t_P \circ i_{\mathcal{C}_0} \circ t_P^{-1} \circ h_r^{-1} = h_r \circ t_P \circ i_{\mathcal{C}_0} \circ t_{-P} \circ h_{r^{-1}}$$

où  $\mathcal{C}_0$  est le cercle unitaire. Or  $i_{\mathcal{C}_0}$  est bien une transformation conforme (L'argument est développé dans le chapitre 5 de [Roch], la démonstration s'appuie sur le fait que l'application  $p_N^{-1} \circ i_{\mathcal{C}_0} \circ p_N : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  est une isométrie de la sphère, donc conserve les angles et que la projection stéréographique  $p_N$  a comme propriété de préserver les angles). Ainsi comme  $(TC(\hat{\mathbb{C}}), \circ)$  est un groupe alors  $i_{\mathcal{C}}$  est une transformation conforme. On a donc prouvé que toutes les transformations inversives sont des transformations conformes. □

Nous allons maintenant prouver l'implication inverse, pour cela nous devons introduire les transformations de Möbius.

**Définition 2.11** Une *transformation de Möbius* est une bijection  $M : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  de la forme

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{où } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ avec } ad - bc \neq 0$$

On convient que si  $c = 0$  alors  $M(\infty) = \infty$ , sinon  $M(\frac{-d}{c}) = \infty$  et  $M(\infty) = \frac{a}{c}$ .  
On note  $\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})$  l'ensemble des transformations de Möbius de  $\hat{\mathbb{C}}$ .

**Propriété 2.12** Toutes les transformations de Möbius sont des transformations inversives.

*Preuve :* Soit  $M \left| \begin{array}{l} \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{array} \right.$  une transformation de Möbius.

Si  $c = 0$ , alors  $M(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ . On pose alors  $\frac{a}{d} = re^{i\theta}$ , alors  $M = t_{\frac{b}{d}} \circ h_r \circ R_{\theta}$

où  $t_{\frac{b}{d}} \left| \begin{array}{l} \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ z \longmapsto z + \frac{b}{d} \end{array} \right.$  est une translation,  $h_r$  est l'homothétie de rapport  $r$  et  $R_{\theta}$  est une rotation d'angle  $\theta$ . Or par la propriété 2.9,  $t_{\frac{b}{d}}$ ,  $h_r$  et  $R_{\theta}$  sont des transformations inversives. Donc  $M$  en est une aussi.

Maintenant si  $c \neq 0$ , alors pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ ,

$$M(z) = \frac{c(az + b)}{c(cz + d)} = \frac{a(cz + d) - ad + bc}{c(cz + d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)} = \left(\frac{bc - ad}{c}\right) \left(\frac{1}{cz + d}\right) + \frac{a}{c}$$

Donc  $M$  est la composée de rotation, d'homothétie, de translation, de l'inversion  $i_{\mathcal{C}_0}$  et de la réflexion  $z \mapsto \bar{z}$  qui sont toutes des transformations inversives. Ainsi  $M$  est également une transformation inversive. □

**Propriété 2.13** L'ensemble des transformations de Möbius muni de la composition est un groupe.

La preuve de cette propriété, étant assez classique, elle ne sera pas traitée dans ce rapport. Elle est tout de même disponible dans le chapitre 5 de [\[Roch\]](#).

Pour le prochain théorème nous avons besoin d'un lemme d'analyse complexe.

**Lemme 2.14** Soit  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  une transformation conforme qui préserve l'orientation et telle que  $f(z_\infty) = \infty$  et  $f(\infty) = w$ . Alors  $f : \mathbb{C} \setminus \{z_\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction holomorphe. De plus, si  $z_\infty \neq \infty$ , alors

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_\infty} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_\infty)^k$$

pour  $z$  proche de  $z_\infty$  avec  $a_{-1} \neq 0$ . Alors que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\frac{1}{z}\right)^k$$

pour  $|z|$  assez grand. Si  $z_\infty = \infty = w$ , alors

$$f(z) = c_{-1}z + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{1}{z}\right)^k$$

pour  $|z|$  assez grand et avec  $c_{-1} \neq 0$

**Propriété 2.15** Une transformation conforme qui préserve l'orientation est une transformation de Möbius.

*Preuve :* Soit  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  une transformation conforme qui préserve l'orientation. Soient  $z_\infty$  et  $z_0$  les points de  $\hat{\mathbb{C}}$  tels que  $f(z_\infty) = \infty$ ,  $f(\infty) = w$  et  $f(z_0) = 0$ .

Si  $z_\infty = w = \infty$ , alors par le lemme [2.14](#) la fonction

$$g : \begin{cases} \hat{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{C}} \\ z & \longmapsto & \frac{f(z)}{z - z_0} \end{cases}$$

est holomorphe et bornée, donc grâce au théorème de Liouville on peut affirmer que  $g$  est une fonction constante, ainsi il existe  $C \in \mathbb{C}^*$  telle que  $f(z) = C(z - z_0)$ . Ce qui prouve que  $f$  est bien une transformation de Möbius.

Maintenant si  $z_\infty \neq \infty$  et que  $z_0 \neq \infty$ , alors par le lemme [2.14](#), la fonction

$$g : \begin{cases} \hat{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{C}} \\ z & \longmapsto & \frac{z - z_\infty}{z - z_0} f(z) \end{cases}$$

est holomorphe et bornée. Donc par le théorème de Liouville,  $g$  est constante : il existe  $C \in \mathbb{C}^*$  telle que

$$f(z) = C \frac{z - z_0}{z - z_\infty}$$

qui est bien une transformation de Möbius. Il nous reste le dernier cas, si  $z_\infty \neq \infty$ , mais que  $z_0 = \infty$ , alors toujours en utilisant le lemme [2.14](#) la fonction

$$g : \begin{cases} \hat{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{C}} \\ z & \longmapsto & (z - z_\infty)f(z) \end{cases}$$

est holomorphe et bornée, donc par le théorème de Liouville, il existe  $C \in C^*$  telle que

$$f(z) = \frac{C}{z - z_\infty}$$

qui est également une transformation de Möbius. Ce qui achève la preuve. □

Cette propriété nous permet de conclure.

**Théorème 2.16** Une transformation conforme est une transformation inversive.

*Preuve :* Avec la propriété 2.15 on sait que les transformations conformes qui préservent l'orientation sont des transformations de Möbius, qui sont, par la propriété 2.12, elles même des transformations inversives. Ainsi, il nous reste à prouver qu'une transformation conforme qui ne préserve pas l'orientation est une transformation inversive.

Soit  $t \in TC(\hat{\mathbb{C}})$  qui ne préserve pas l'orientation, alors la transformation  $t \circ i_{\mathcal{C}_0}$  est une transformation qui préserve l'orientation. Ce qui nous permet de conclure,  $t$  est bien une transformation inversive. □

## 2.2 Le lien avec l'espace de Minkowski

En quelques mots, dans cette partie, nous allons étudier l'action des transformations de Lorentz sur les droites de  $\mathcal{L}$ , le cône de lumière, et la comparer à celle des transformations conformes sur  $\hat{\mathbb{C}}$ .

Pour pouvoir faire la comparaison, il faut d'abord comprendre que ces deux actions peuvent être transposées toutes les deux en des actions sur la sphère  $\mathbb{S}^2$ . En effet, comme rappelé précédemment,  $\hat{\mathbb{C}}$  est homéomorphe à la sphère  $\mathbb{S}^2$  grâce à la projection stéréographique, dont on rappelle l'expression ci-dessous :

$$p_N \left| \begin{array}{l} \mathbb{S}^2 \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ (x, y, z) \longmapsto \begin{array}{l} \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z} \quad \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 1) \\ \infty \quad \text{sinon} \end{array} \end{array} \right.$$

et qui a pour réciproque :

$$p_N^{-1} \left| \begin{array}{l} \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ Z \longmapsto \begin{array}{l} \left( \frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right) \quad \text{si } Z \neq \infty \\ (0, 0, 1) \quad \text{sinon} \end{array} \end{array} \right.$$

Ainsi toute transformation conforme sur  $\hat{\mathbb{C}}$  peut être associée à une fonction de  $\mathbb{S}^2$  dans  $\mathbb{S}^2$ . Soit  $t$  une transformation conforme, on peut alors faire correspondre à  $t$  la fonction  $t_s : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  qui est définie ainsi :

$$t_s \left| \begin{array}{l} \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ a \longmapsto p_N^{-1} \circ t \circ p_N \end{array} \right.$$

Il faut maintenant que nous réalisons le même travail pour les transformations de Lorentz restreintes aux droites du cône de lumière. On note :  $P\mathcal{L} := \mathcal{L} \setminus \{0\} / \mathbb{R}^*$  l'ensemble des droites du

cône de lumière. On se donne maintenant un système de représentant des éléments de  $P\mathcal{L}$  grâce à l'application  $\xi$  qui à chaque classe d'équivalence de  $P\mathcal{L}$  associe son unique élément de  $\mathcal{L} \cap H$  avec  $H = \{(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid t = 1\}$ .

$$\xi \left| \begin{array}{l} P\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} \cap P \\ [u] \longmapsto (1, x, y, z) \end{array} \right.$$

On introduit aussi  $p_{sp}$  la projection de l'espace de Minkowski sur l'hyperplan des coordonnées spatiales :

$$p_{sp} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, x, y, z) \longmapsto (x, y, z) \end{array} \right.$$

On peut donc introduire la fonction  $\phi$  que l'on définit ainsi :  $\phi = p_{sp} \circ \xi$ . Si on note  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^4$ , soit  $[u] \in P\mathcal{L}$  si on note  $\xi([u]) = (t, x, y, z) \in \mathcal{L} \cap H$  alors comme  $\xi([u])$  appartient à  $\mathcal{L}$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$  et comme  $\xi([u])$  appartient à  $H$  alors  $t = 1$ . Ce qui nous permet de conclure que  $\|\phi([u])\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = t^2 = 1$ . Il est de plus évident que  $\phi$  est une bijection. Donc  $\phi : P\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{S}^2$  est l'application qui va nous permettre de faire le lien entre l'ensemble des droites de  $\mathcal{L}$  et  $\mathbb{S}^2$ .

Maintenant, comme pour  $\hat{\mathbb{C}}$  et les transformations conformes de cet espace, transposons l'action des transformations de Lorentz sur les droites du cône de lumière, sur la sphère  $\mathbb{S}^2$ . Soit  $A$  une transformation de Lorentz, on pose alors pour tout  $[u]$  dans l'ensemble des droites du cône de lumière,  $A.[u] := [Au]$ . Cette action des transformations de Lorentz sur les droites du cône de lumière est bien définie car  $A$  est une application linéaire et une transformation de Lorentz, elle envoie donc une droite du cône de lumière sur une droite du cône de lumière. Soit  $X = (x, y, z)$  un point de la sphère  $\mathbb{S}^2$ , on définit alors  $A * X := \phi(A.[u]) = \phi([Au])$  avec  $u = (1, x, y, z)$ . Explicitons un peu plus cette action : commençons par remarquer que si on note  $Au = (t', x', y', z')$ , comme  $u \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$  alors  $Au$  est différent du point  $(0, 0, 0, 0)$  qui est le seul point du cône de lumière à avoir sa première coordonnée qui s'annule donc  $t' \neq 0$ . Ce qui nous autorise donc à écrire que :

$$A * X = \phi([Au]) = p_{sp} \circ \xi([Au]) = p_{sp} \left( 1, \frac{x'}{t'}, \frac{y'}{t'}, \frac{z'}{t'} \right) = \left( \frac{x'}{t'}, \frac{y'}{t'}, \frac{z'}{t'} \right)$$

On peut donc maintenant faire correspondre à une transformation de Lorentz  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 0,3 \rrbracket}$ , une fonction de  $\mathbb{S}^2$  dans  $\mathbb{S}^2$  définie ainsi :

$$\psi_A \left| \begin{array}{l} \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ X = (x_1, x_2, x_3) \longmapsto A * X = \left( \frac{\sum_{i=0}^3 a_{1,i} x_i}{\sum_{i=0}^3 a_{0,i} x_i}, \frac{\sum_{i=0}^3 a_{2,i} x_i}{\sum_{i=0}^3 a_{0,i} x_i}, \frac{\sum_{i=0}^3 a_{3,i} x_i}{\sum_{i=0}^3 a_{0,i} x_i} \right) \end{array} \right. \quad (5)$$

**Propriété 2.17** Les deux ensembles d'application de  $\mathbb{S}^2$  dans  $\mathbb{S}^2$  introduits précédemment

$$\left\{ p_N^{-1} \circ t \circ p_N \text{ avec } t \in TC(\hat{\mathbb{C}}) \right\} \text{ et } \left\{ \psi_A \text{ avec } A \in O(1, 3) \right\}$$

munis de la composition, sont des groupes.

*Preuve :* La vérification pour l'ensemble associé aux transformations conforme est évidente. Détaillons la vérification pour le second ensemble.

Il est évident que  $\psi_{I_4} = id$ . Verifions que  $\psi_A \circ \psi_B = \psi_{AB}$ . Pour tout  $X \in \mathbb{S}^2$ , en notant  $u = (1, x, y, z)$  et  $Bu = (t', x', y', z')$  :

$$\psi_A \circ \psi_B(X) = A * (B * X) = \phi \left( \left[ A \left( 1, \frac{x'}{t'}, \frac{y'}{t'}, \frac{z'}{t'} \right) \right] \right) = \phi([A(t', x', y', z')]) = \phi([ABu]) = \psi_{AB}(X)$$



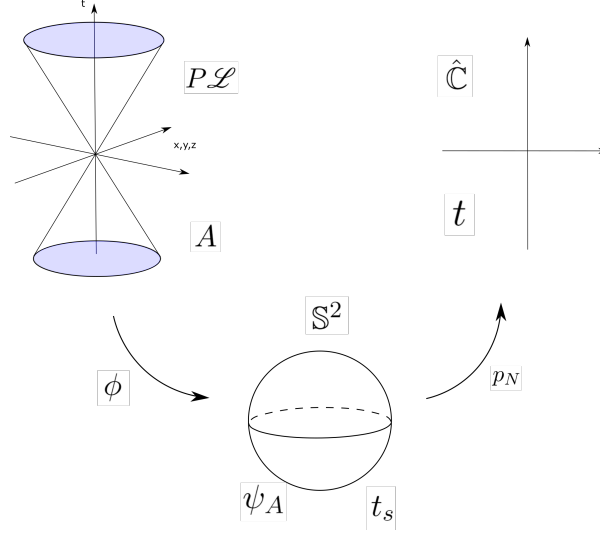


FIGURE 4 – Schéma récapitulatif des différents objets introduits précédemment

On en déduit que  $\psi_A \circ \psi_{A^{-1}} = \psi_{A^{-1}} \circ \psi_A = \psi_{I_4} = id_{\mathbb{S}^2}$ . Donc  $\psi_A$  est une application bijective et  $\psi_A^{-1} = \psi_{A^{-1}}$ .

On vient donc de prouver que  $\{\psi_A \text{ avec } A \in O(1, 3)\}$  est un sous groupe des bijections de  $\mathbb{S}^2$  dans  $\mathbb{S}^2$ .

□

**Théorème 2.18** L'action des transformations conformes sur la sphère est la même action que celle des transformations de Lorentz. En d'autres termes on a égalité entre les deux groupes d'application suivants :

$$\{p_N^{-1} \circ t \circ p_N \text{ avec } t \in TC(\hat{\mathbb{C}})\} = \{\psi_A \text{ avec } A \in O(1, 3)\}$$

*Preuve :* Pour la première inclusion, nous allons utiliser le théorème 2.16 qui nous assure que toutes les transformations conformes sont des transformations inversives. Or les transformations inversives sont engendrés par les inversions. Il nous suffit donc de vérifier que pour toute inversion  $i_{\mathcal{C}}$  l'application  $p_N^{-1} \circ i_{\mathcal{C}} \circ p_N$  se met sous la forme  $\psi_A$ .

Commençons par l'inversion par rapport au cercle unité :

$$i_{\mathcal{C}_0} \left| \begin{array}{l} \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ z \longmapsto \frac{1}{z} \text{ si } z \in \mathbb{C}^* \\ \infty \text{ si } z = 0 \\ 0 \text{ si } z = \infty \end{array} \right.$$

or  $p_N^{-1} \circ i_{\mathcal{C}_0} \circ p_N \left| \begin{array}{l} \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (x, y, -z) \end{array} \right.$  et avec l'expression (5) des fonctions  $\psi_A$ , on en déduit

que cette fonction correspond à une fonction  $\psi_{A_0}$  avec  $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in O(1, 3)$

On note  $\mathcal{C}_i = D_i \cup \{\infty\}$  avec  $D_1 = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \text{Im}(z) = 0\}$  et  $D_2 = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \text{Re}(z) = 0\}$  alors ,

$$p_N^{-1} \circ i_{\mathcal{C}_1} \circ p_N \Big| \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, -y, z) \end{array} \quad \text{et} \quad p_N^{-1} \circ i_{\mathcal{C}_2} \circ p_N \Big| \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (-x, y, z) \end{array}$$

Ce qui correspond respectivement aux fonctions  $\psi_{A_1}$  et  $\psi_{A_2}$  avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui sont toutes les deux des matrices de transformations de Lorentz.

Une fois que ces 3 cas particuliers sont fait (même s'il ne suffisait de faire qu'un seul des deux  $i_{\mathcal{C}_i}$ ), pour que l'on prouve le théorème pour toutes les inversions et donc toutes les transformations conformes, il nous suffit de le prouver pour les homothéties, les translations et les rotations.

Le cas des homothéties : Soit  $h_r$  une homothétie de rapport  $r \in \mathbb{R}^*$  alors pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ ,

$$\begin{aligned} p_N^{-1} \circ h_r \circ p_N(x, y, z) &= p_N^{-1} \circ h_r\left(\frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z}\right) \\ &= p_N^{-1}\left(\frac{rx}{1-z} + i\frac{ry}{1-z}\right) \\ &= \left(\frac{2x\frac{1-z}{r}}{x^2 + y^2 + \frac{(1-z)^2}{r^2}}, \frac{2y\frac{1-z}{r}}{x^2 + y^2 + \frac{(1-z)^2}{r^2}}, \frac{x^2 + y^2 - \frac{(1-z)^2}{r^2}}{x^2 + y^2 + \frac{(1-z)^2}{r^2}}\right) \\ &= \left(\frac{2x\frac{1-z}{r}}{(1-z)(1+z + \frac{1-z}{r^2})}, \frac{2y\frac{1-z}{r}}{(1-z)(1+z + \frac{1-z}{r^2})}, \frac{(1-z)(1+z - \frac{1-z}{r^2})}{(1-z)(1+z + \frac{1-z}{r^2})}\right) \\ &= \left(\frac{2x}{r(1+z + \frac{1-z}{r^2})}, \frac{2y}{r(1+z + \frac{1-z}{r^2})}, \frac{1 - \frac{1}{r^2} + z(1 + \frac{1}{r^2})}{1 + \frac{1}{r^2} + z(1 - \frac{1}{r^2})}\right) \end{aligned}$$

Cette expression correspond à  $\psi_{A_h}$  avec

$$A_h = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r}) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r}) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) \end{pmatrix}$$

Il faut maintenant vérifier que  $A_h$  est bien une matrice associée à une transformation de Lorentz. On pourrait poser les calculs pour prouver que pour tout  $u$  dans l'espace de Minkowski,  $q_{\mathcal{M}}(A_h u) = q_{\mathcal{M}}(u)$ . Or en posant  $r = e^l$  avec  $l \in \mathbb{R}$ , on peut mettre  $A_h$  sous la forme suivante :

$$A_h = \begin{pmatrix} \cosh(l) & 0 & 0 & \sinh(l) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh(l) & 0 & 0 & \cosh(l) \end{pmatrix}$$

ce qui correspond à un boost selon l'axe des  $z$ . Donc  $A_h$  correspond bien à une transformation de Lorentz.

Le cas des translations : Soit  $t_w \left| \begin{array}{l} \hat{C} \rightarrow \hat{C} \\ z \mapsto z + w \end{array} \right.$  avec  $w = w_1 + iw_2$ , alors pour  $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$  :

$$\begin{aligned} p_N^{-1} \circ t_w \circ p_N(x, y, z) &= p_N^{-1} \left( \frac{x + w_1(1-z)}{1-z} + i \frac{y + w_2(1-z)}{1-z} \right) \\ &= \dots \\ &= \left( \frac{2x - 2w_1z + 2w_1}{2w_1x + 2w_2y - (w_1^2 + w_2^2)z + 2 + w_1^2 + w_2^2}, \right. \\ &\quad \left. \frac{2y - 2w_2z + 2w_2}{2w_1x + 2w_2y - (w_1^2 + w_2^2)z + 2 + w_1^2 + w_2^2}, \right. \\ &\quad \left. \frac{2w_1x + 2w_2y + (2 - w_1^2 - w_2^2)z + (1-z)^2(w_1^2 + w_2^2 - 1)}{2w_1x + 2w_2y - (w_1^2 + w_2^2)z + 2 + w_1^2 + w_2^2} \right) \end{aligned}$$

ce qui correspond à la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 + \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} & w_1 & w_2 & \frac{-w_1^2 - w_2^2}{2} \\ w_1 & 1 & 0 & -w_1 \\ w_2 & 0 & 1 & -w_2 \\ \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} & w_1 & w_2 & 1 - \left( \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} \right) \end{pmatrix}$$

vérifions que  $A_t$  soit bien une matrice de  $O(1, 3)$ . Soit  $u = (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$

$$A_t u = \begin{pmatrix} \left( 1 + \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} \right) t + w_1x + w_2y - \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} z \\ w_1t + x - w_1z \\ w_2t + y - w_2z \\ \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} t + w_1x + w_2y + \left( 1 - \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} \right) z \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{M}}(A_t u) &= t^2 \left( - \left( 1 + \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} \right)^2 + w_1^2 + w_2^2 + \left( \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} \right)^2 \right) \\ &\quad + x^2(-w_1^2 + 1 + w_1^2) + y^2(-w_2^2 + w_2^2 + 1) \\ &\quad + z^2 \left( - \left( \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} \right)^2 w_1 + w_1 \left( \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} \right)^2 \right) \\ &\quad + tx \left( - \left( 1 + \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} \right) w_1 + w_1 + w_1 \left( \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} \right) \right) \\ &\quad + ty \left( - \left( 1 + \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} \right) w_2 + w_2 + w_2 \left( \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} \right) \right) \\ &\quad + tz \left( \left( 1 + \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} \right) \left( \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} \right) - w_1^2 - w_2^2 + \left( 1 - \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} \right) \left( \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} \right) \right) \\ &\quad + xy(w_1w_2 - w_1w_2) + xz \left( \left( \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} \right) w_1 - w_1 + w_1 \left( 1 - \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} \right) \right) \\ &\quad + yz \left( \left( \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} \right) w_2 - w_2 + w_2 \left( 1 - \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} \right) \right) \\ &= -t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = q_{\mathcal{M}}(u) \end{aligned}$$

Donc  $A_t \in O(1, 3)$ .

Le cas des rotations : soit  $r_\theta \left| \begin{array}{l} \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ z \longmapsto ze^{i\theta} \end{array} \right.$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ , alors après calcul, pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$  :

$$p_N^{-1} \circ r_\theta \circ p_N(x, y, z) = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), y \cos(\theta) + x \sin(\theta), z)$$

Ce qui correspond bien à une application de la forme  $\psi_{A_r}$  avec

$$A_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est bien une matrice de  $O(1, 3)$  car  $A_r \in \mathcal{K}$  (1.8).

Comme nous avons prouvé que les actions de  $i_{\mathcal{E}_0}, i_{\mathcal{E}_1}$ , des homothéties, des rotations et des translations sur  $\mathbb{S}^2$  correspondent bien à celles des applications de la forme  $\psi_A$  avec  $A \in O(1, 3)$ , cela nous prouve que toutes les inversions et donc toutes les transformations conformes ont une action sur la sphère qui correspond à celle d'un  $\psi_A$  avec  $A \in O(1, 3)$ . Ce qui prouve la première inclusion.

Pour la seconde inclusion, en utilisant la décomposition en composante connexe de  $O(1, 3)$  (1.7) et le théorème de Cartan (1.8) on peut exhiber un système de générateur de  $O(1, 3)$  :

$$O(1, 3) = \langle S, T, KAK \text{ avec } K \in \mathcal{K} \text{ et } A \in \mathcal{A} \rangle$$

Il nous reste donc à vérifier que les fonctions  $\psi_T, \psi_S, \psi_K$  et  $\psi_A$  pour  $K \in \mathcal{K}$  et  $A \in \mathcal{A}$  sur la sphère, peuvent se mettre sous la forme  $p_N^{-1} \circ t \circ p_N$  avec  $t$  une transformation conforme de  $\hat{\mathbb{C}}$ . Or avec l'expression (5) on peut facilement calculer que  $\psi_S = \psi_T = -id_{\mathbb{S}^2}$  et on peut remarquer que  $-id_{\mathbb{S}^2} = p_N^{-1} \circ i_{\mathcal{E}_0} \circ i_{\mathcal{E}_1} \circ i_{\mathcal{E}_2} \circ p_N$ .

Pour  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & A' & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ ,  $\psi_A$  est la fonction  $X \mapsto A'X$ . Ainsi  $\psi_A$  est une isométrie de

$\mathbb{S}^2$  donc  $p_N \circ \psi_A \circ p_N^{-1}$  est bien une transformation conforme de  $\hat{\mathbb{C}}$ .

Pour  $K = \begin{pmatrix} \cosh(l) & \sinh(l) & 0 & 0 \\ \sinh(l) & \cosh(l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{K}$  avec les calculs précédemment réalisés,  $\psi_K = p_N^{-1} \circ$

$h_r \circ p_N$  avec  $r = e^l$ .

Donc toutes applications de la forme  $\psi_A$  avec  $A \in O(1, 3)$  peuvent se mettre sous la forme  $p_N^{-1} \circ t \circ p_N$  avec  $t$  une transformation conforme de  $\hat{\mathbb{C}}$ .

□

**Corollaire 2.19** L'ensemble des transformations conformes de  $\hat{\mathbb{C}}$  est isomorphe aux transformations de Lorentz modulo le signe. En d'autres termes :

$$O(1, 3)/_{\pm Id} \simeq TC(\hat{\mathbb{C}})$$

*Preuve* : Prenons le morphisme de groupe suivant

$$\xi \left\{ \begin{array}{l} O(1,3) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2) \\ A \longmapsto \psi_A \end{array} \right.$$

avec le théorème précédent,  $Im(\xi) = \left\{ p_N^{-1} \circ t \circ p_N \text{ avec } t \in TC(\hat{\mathbb{C}}) \right\} \simeq TC(\hat{\mathbb{C}})$ . Calculons le noyau de  $\xi$  : Soit  $A \in O(1,3)$  tel que :  $\psi_A = id_{\mathbb{S}^2}$ , donc pour tout  $X \in \mathbb{S}^2$   $A * X = X$ . On en déduit que pour tout  $u \in \mathcal{L} \cap H$   $[Au] = [u]$  ce qui se traduit  $\forall u \in \mathcal{L} \cap H$   $Au \in Vect(u)$  et par linéarité  $\forall u \in \mathcal{L}$   $Au \in Vect(u)$ . On note  $u_0 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $u_1 = (1, 0, 1, 0)$ ,  $u_2 = (1, 0, 0, 1)$  et  $u_3 = (1, -1, 0, 0)$ . La famille  $(u_0, u_1, u_2, u_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$  incluse dans  $\mathcal{L}$ . Cette base est pour la matrice  $A$  une base de diagonalisation. On notera  $(\lambda_i)_i$  les valeurs propres de  $A$  associées aux  $(u_i)_i$ . On prend maintenant  $u \in \mathcal{L}$ , alors  $u = \sum_{i=0}^3 \alpha_i u_i$  avec  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ . Avec ce qu'on a dit précédemment on a alors  $Au = \lambda u$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$  et même  $\lambda = \lambda_j$  avec  $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Ce qui se traduit par  $\sum_{i=0}^3 \alpha_i (\lambda_i - \lambda_j) u_i = 0$ . Avec  $u = u_0 - u_1 + u_3 \in \mathcal{L}$  si  $j = 2$  alors  $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ . Si  $j \in \{0, 1, 3\}$  alors  $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_3$  et pour prouver que  $\lambda_2$  a la même valeur que les autres on reproduit la même démarche avec  $u = u_0 - u_2 + u_3$ . On note donc  $\lambda$  l'unique valeur propre de  $A$ . Or  $det(A) = 1$  donc  $\lambda = \pm 1$ . On conclut donc que  $Ker(\xi) = \{\pm I_4\}$  (la preuve que  $\pm I_4$  soient dans le noyau étant évidente). On achève donc notre démonstration en utilisant le premier théorème d'isomorphisme sur  $\xi$ .

□

### 3 L'espace des cercles

Dans cette section nous allons étudier l'espace des cercles d'un plan affine euclidien  $\mathcal{P}$ . Pour cela nous allons faire l'analogie entre cet espace et l'espace des droites de l'espace de Minkowski.

#### 3.1 Les quadriques affines

**Définition 3.1** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine et  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On appelle *quadrique affine* un pôlynome du second degré  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{K}$ . Une quadrique plane est appelée *conique*. L'ensemble des point de  $\mathcal{E}$  verifiant l'équation  $f = 0$  est *l'image de la quadrique*

**Propriété 3.2** Soit  $f$  une quadrique affine, alors pour tout point  $M$  de  $\mathcal{E}$ ,  $f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L_O(\overrightarrow{OM}) + c_O$  avec  $O$  un point quelconque de  $\mathcal{E}$ ,  $q$  une forme quadratique,  $L_O$  une forme linéaire et  $c_O$  une constante.

On peut remarquer que la quadrique affine ne dépend pas du choix du point  $O$  : Soit  $O'$  un autre point de  $\mathcal{E}$ ,

$$\begin{aligned} f(M) &= q(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}) + L_O(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}) + c_O \\ &= q(\overrightarrow{O'M}) + 2(b(\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{O'M}) + L_O(\overrightarrow{O'M})) + q(\overrightarrow{O'O}) + L_O(\overrightarrow{OO'}) + c_O \\ &= q(\overrightarrow{O'M}) + L_{O'}(\overrightarrow{O'M}) + c_{O'} \end{aligned}$$

avec  $b$  la forme bilinéaire associée à la forme quadratique  $q$ . Ce calcul nous prouve également que la forme quadratique  $q$  ne dépend pas du point  $O$  choisi.

**Définition 3.3** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $\mathbb{P}(E)$  son espace projectif associé. Une *quadrique projective*  $\tilde{f}$  de  $\mathbb{P}(E)$  est la donnée d'une forme quadratique non nulle  $f$  sur  $E$ , modulo multiplication par un scalaire non nul. En d'autres termes, c'est un élément de l'espace projectif associé à l'espace vectoriel des formes quadratiques sur  $E$ .

L'image d'une telle quadrique est la projection sur  $\mathbb{P}(E)$  de l'image d'une quadrique de  $E$  qui lui est associé.

**Remarque 3.4** Par la suite si  $f$  est une quadrique, nous utiliserons la notation  $\tilde{f}$  pour désigner la classe d'équivalence de  $f$  dans l'espace projectif des quadriques.

### 3.2 L'espace des cercles

On se place maintenant dans un plan affine euclidien ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) que l'on note  $\mathcal{P}$ , d'espace vectoriel  $P$ . Les cercles de cet espaces sont les images des coniques dont la forme quadratique est un multiple non nul de la norme euclidienne : Soit  $\lambda, c \in \mathbb{R}$

$$f(M) = \lambda \|\overrightarrow{OM}\|^2 + L(\overrightarrow{OM}) + c$$

ou encore par le théorème de représentation de Riesz, il existe un vecteur  $u \in P$  tel que,

$$f(M) = \lambda \|\overrightarrow{OM}\|^2 + 2\overrightarrow{OM}.u + c \quad (6)$$

Ainsi un cercle est déterminé par le triplet  $(u, \lambda, c) \in P \times \mathbb{R}^2$  modulo la multiplication par un scalaire. On appelle donc *l'espace des cercles* de  $\mathcal{P}$  l'espace projectif déduit de l'espace vectoriel  $P \times \mathbb{R}^2$ . On le note  $\mathcal{C}(\mathcal{P})$  et on notera  $(\lambda : c : u) \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$  la classe d'équivalence de  $(\lambda, c, u) \in P \times \mathbb{R}^2$ .

Or pour que l'image des coniques définit par (6) décrivent un cercle comme nous les connaissons, il faut que :

$$f(M) = \lambda(\|\overrightarrow{AM}\|^2 - R^2)$$

Avec  $A$  un certain point de  $P$ ,  $\lambda$  non nul et  $R^2 > 0$ . Ainsi, si on fait le parallèle avec les expressions des quadriques définit par (6), en supposant  $\lambda$  non nul et en prenant  $A$  tel que  $u = \lambda \overrightarrow{AO}$  :

$$\begin{aligned} \lambda \|\overrightarrow{OM}\|^2 + 2\overrightarrow{OM}.\lambda \overrightarrow{AO} + c &= \lambda \|\overrightarrow{AM}\|^2 - \lambda \|\overrightarrow{AO}\|^2 + c \\ &= \lambda \left( \|\overrightarrow{AM}\|^2 - \|\overrightarrow{AO}\|^2 + \frac{c}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

Donc, les cubiques décrits par (6) sont "de vrais cercles" si  $\lambda \neq 0$  et  $R^2 = \frac{\|u\|^2}{\lambda^2} - \frac{c}{\lambda} > 0$ . On peut maintenant mieux décrire et comprendre ce que contient  $\mathcal{C}(\mathcal{P})$  :

- l'ensemble  $\Theta$  des "vrais cercles" correspondant à  $\lambda \neq 0$  et  $\|u\|^2 - \lambda c > 0$
- l'ensemble  $\mathcal{D}$  des droites affines de  $\mathcal{P}$  correspondant à  $\lambda = 0$  et  $u \neq 0$
- l'ensemble  $\mathcal{I}$  des cercles de rayon imaginaire, d'image vide, correspondant à  $\lambda \neq 0$  et  $\|u\|^2 - \lambda c < 0$
- l'ensemble des "cercles points" correspondant à  $\lambda \neq 0$  et  $\|u\|^2 - \lambda c = 0$  que l'on identifie à  $\mathcal{P}$ .
- l'équation correspondant à  $\lambda = 0$  et  $u = 0$ , dont l'image est vide.

Dans la suite, l'union des deux derniers ensembles sera identifié à  $\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \{\infty\}$ . L'équation correspondant à  $\lambda = 0$  et  $u = 0$  étant identifié au point  $\infty$  de  $\hat{\mathcal{P}}$ . De plus on notera  $\mathcal{O} = \Theta \cup \mathcal{D}$  l'ensemble des cercles généralisés de  $\mathcal{P}$ . Ainsi ,

$$\mathcal{C}(\mathcal{P}) = \Theta \sqcup \mathcal{D} \sqcup \hat{\mathcal{P}} \sqcup \mathcal{I} = \mathcal{O} \sqcup \hat{\mathcal{P}} \sqcup \mathcal{I} \quad (7)$$

On voit donc que la quadrique projective  $\tilde{r}$  avec :

$$r \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \times P \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda, c, u) \longmapsto \|u\|^2 - \lambda c \end{array} \right.$$

joue un rôle imporant. On peut mettre  $r$  sous la forme :  $r(u, \lambda, c) = \|u\|^2 + \frac{1}{4}((\lambda - c)^2 - (\lambda + c)^2)$ . Cette quadrique est donc une forme quadratique de signature  $(-, +, +, +)$ , comme la forme quadratique de Minkowski (notée  $q_{\mathcal{M}}$ ). Faisons donc le lien entre l'espace projectif de l'espace de Minkowski et l'espace des cercles :

$$m \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \times \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{M} \\ (\lambda, c, u = (y, z)) \longmapsto \left(\frac{\lambda+c}{2}, \frac{\lambda-c}{2}, y, z\right) \end{array} \right.$$

$m$  nous permet de faire le lien entre la forme quadratique  $r$  et la forme quadratique de Minkowski avec la relation suivante :  $r = q_{\mathcal{M}} \circ m$ . Mais surtout  $m$  induit une bijection  $\bar{m}$  entre l'espace des cercles et l'espace projectif de l'espace de Minkowski.

Identifions maintenant les différents sous ensembles de  $\mathcal{C}(\mathcal{P})$  que l'on a précédemment décrit (7) aux sous ensembles de  $\mathbb{P}(\mathcal{M})$  associés par  $\bar{m}$  :

L'ensemble des cercles généralisés  $\mathcal{O}$ , correspond à

$$\bar{m}(\mathcal{O}) = m(\{(\lambda : c : u) \in \mathcal{C}(\mathcal{P}) \mid r(\lambda, u, c) > 0\}) = \{(t : x : y : z) \in \mathbb{P}(\mathcal{M}) \mid q_{\mathcal{M}}(t, x, y, z) > 0\}$$

qui est l'ensemble des droites à l'extérieur du cône de lumière. Par des raisonnements identiques, on peut voir que  $\hat{\mathcal{P}}$  correspond à l'ensemble des droites du cône de lumière, qui est isomorphe à la sphère  $\mathbb{S}^2$  (2.2),  $\mathcal{I}$  correspond aux droites à l'intérieur du cône de lumière, le point infini de  $\hat{\mathcal{P}}$  correspond à la droite  $d_{\infty} = \{(t, -t, 0, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$  et enfin  $\mathcal{D}$  correspond aux droites de l'hyperplan d'équation  $x + t = 0$ . Cet hyperplan est tangent au cône de lumière en la droite  $d_{\infty}$ .

### 3.3 Le centre d'un cercle

**Propriété 3.5** Soit  $\mathcal{C} \in \Theta$ , un "vrai cercle" de centre  $A \in \mathcal{P}$ . Alors les points  $\bar{m}(\infty)$ ,  $\bar{m}(\mathcal{C})$  et  $\bar{m}(A)$  sont alignés dans  $\mathbb{P}(\mathcal{M})$ .

*Preuve :* Soit  $\mathcal{C} = (\lambda : c : u) \in \Theta$  alors  $\bar{m}(\mathcal{C}) = (\frac{\lambda+c}{2} : \frac{\lambda-c}{2} : u) = (\frac{\lambda+c}{2} : \frac{\lambda-c}{2} : y : z)$  est le point de  $\mathbb{P}(\mathcal{M})$  associé à notre cercle. D'après des calculs précédents le centre de  $\mathcal{C}$  est le point  $A = O - \frac{u}{\lambda}$ . Ce point  $A$  peut être identifié au cercle point (de rayon 0) de centre  $A : A = (\lambda : \frac{\|u\|^2}{\lambda} : u)$ . L'image de  $A$  par  $\bar{m}$  est le point  $(\frac{\lambda^2 + \|u\|^2}{2} : \frac{\lambda^2 - \|u\|^2}{2} : \lambda y : \lambda z) \in \mathbb{P}(\mathcal{M})$ . Maintenant que nous avons les expressions de  $\bar{m}(\mathcal{C})$ ,  $\bar{m}(A)$  et que  $\bar{m}(\infty) = (1 : -1 : 0 : 0)$  on peut conclure en remarquant que :

$$\frac{\|u\|^2 - \lambda c}{2}(1, -1, 0, 0) + \lambda \left( \frac{\lambda + c}{2}, \frac{\lambda - c}{2}, y, z \right) = \left( \frac{\lambda^2 + \|u\|^2}{2}, \frac{\lambda^2 - \|u\|^2}{2}, \lambda y, \lambda z \right)$$

□

Grâce à cette propriété, on peut étendre la définition du centre d'un cercle à tous les éléments de l'espace des cercles, tout en gardant une sorte de cohérence :

**Définition - Propriété 3.6** Soit  $\mathcal{C} \in \mathcal{C}(\mathcal{P}) \setminus \{\infty\}$ , alors la droite qui passe par  $\bar{m}(\mathcal{C})$  et  $\bar{m}(\infty)$  intersecte  $\bar{m}(\mathcal{P})$  en un ou deux points. Si c'est en un seul point, qui est obligatoirement  $\bar{m}(\infty)$ , alors le centre de  $\mathcal{C}$  est défini comme étant le point  $\infty$ . Sinon les deux points d'intersections sont  $\bar{m}(\infty)$  et  $\alpha$  alors le centre de  $\mathcal{C}$  est défini comme étant le point (cercle point)  $\bar{m}^{-1}(\alpha)$ .

*Preuve :* En reprenant les notations de la définition - propriété 3.6, il est évident que la droite qui passe par  $\bar{m}(\mathcal{C})$  et  $\bar{m}(\infty)$  intersecte  $\bar{m}(\mathcal{P})$  au moins au point  $\bar{m}(\infty)$  puisque  $\bar{m}(\infty) \in \bar{m}(\mathcal{P})$ . De plus, dans  $\mathcal{M}$ , cette intersection correspond à l'intersection du cône de lumière  $\mathcal{L}$  et d'un plan  $P_0$  passant par l'origine et par  $d_\infty$ . Soit  $x \in \mathcal{L} \cap P_0 \setminus d_\infty$  alors  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \lambda x \in \mathcal{L}$  et  $\lambda x \in P_0$ , car  $P_0$  est un plan qui passe par l'origine. Donc  $\mathcal{L} \cap P_0$  est une union de droite passant par l'origine. Or soit  $d_1, d_2, d_3$  trois droites distinctes passant par l'origine, incluses dans  $\mathcal{L} \cap P_0$ . En particulier ces trois droites appartiennent à  $P_0$ , donc  $\forall u_1 \in d_1 \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $\exists u_2, u_3 \in d_2 \times d_3$  tel que  $u_1 = \lambda u_2 + \mu u_3$ , or par hypothèse  $u_1 \in \mathcal{L}$ . On obtient donc une contradiction avec la propriété 1.4. Ainsi l'intersection  $\mathcal{L} \cap P_0$  contient une ou deux droites. Donc dans l'espace projectif  $\mathbb{P}(\mathcal{M})$ , la droite qui passe par  $\bar{m}(\mathcal{C})$  et  $\bar{m}(\infty)$  intersecte  $\bar{m}(\mathcal{P})$  en un ou deux points. □

**Remarque 3.7** La preuve précédente peut être raccourcie en utilisant les résultats sur l'intersection d'une droite avec une quadrique dans un espace projectif réel, développés dans la partie sur les faisceaux de cercle 3.4.

Cette extension de la notion de centre pour un élément de l'espace des cercles est en accord avec notre intuition : avec cette définition les droites de  $\mathcal{D}$  ont pour centre le point infini. En effet une droite affine est représentée dans  $\mathcal{M}$  par une droite  $d_0$  qui passe par l'origine et qui est contenue dans l'hyperplan d'équation  $x + t = 0$ . Cet hyperplan est tangent au cône de lumière en la droite  $d_\infty$ . Ainsi le plan qui passe par  $d_\infty$  et  $d_0$  n'intersecte le cône de lumière que en  $d_\infty$ .

### 3.4 Les faisceaux de cercles

**Définition 3.8** Soit  $A \in \mathcal{P}$ , le *faisceau de cercle concentrique en A* noté  $\mathcal{F}_A$  est l'ensemble des cercles de centre  $A$ . Si on traduit cette définition dans  $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ , on peut décrire  $\mathcal{F}_A$  de la façon suivante :

$$\mathcal{F}_A = \left\{ (\lambda : c : u) \text{ tel que } O - \frac{u}{\lambda} = A \right\}$$

Grâce au travail précédemment réalisé, on peut facilement se rendre compte que  $\mathcal{F}_A$  est représenté dans  $\mathbb{P}(\mathcal{M})$  par la droite passant par  $\bar{m}(\infty)$  et  $\bar{m}(A)$ . C'est de là que vient le terme faisceau, car en mathématiques il désigne une famille linéaire d'objet.

Comme pour le centre d'un cercle on peut donc étendre notre définition de faisceau.

**Définition 3.9** Un *faisceau de cercle* est un sous ensemble  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{C}(\mathcal{P})$  tel que  $\bar{m}(\mathcal{F})$  est une droite de  $\mathbb{P}(\mathcal{M})$ .

Pour décrire les autres type de faisceaux, nous allons caractériser les différentes façon qu'une droite intersecte une quadrique (dans notre cas  $q$ ) dans un espace projectif réel. Soit  $f$  une quadrique



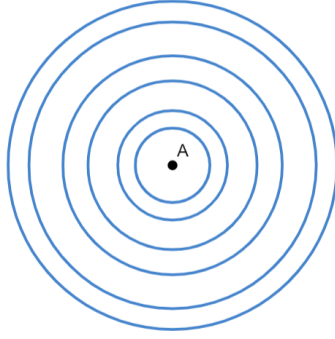


FIGURE 5 – exemple de faisceau centré en  $A$

et  $d$  une droite qui passe par  $A$  et de vecteur directeur  $e$ .

$$f(M) = q(\overrightarrow{AM}) + L_A(\overrightarrow{AM}) + c_A \quad \text{et} \quad d = \left\{ M \in \mathcal{P} \mid \exists \mu \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = \mu e \right\}$$

L'intersection de l'image de la quadrique  $f$  et de la droite  $d$  est donc l'ensemble des points  $M$  de la droite définis par les racines de l'équation en  $\mu$  :

$$\mu^2 q(e) + \mu L_A(e) + c_A = 0$$

Dans notre cas on sait que  $q \neq 0$  et de plus notre corps de base est  $\mathbb{R}$ . On a alors 3 cas qui se présentent à nous :

- L'intersection est constituées de deux points (on dit qu'elle est sécante) si l'équation du second degré a deux racines distinctes
- L'intersection n'est constituée d'un unique point (double) si l'équation du second degré a une racine double, c'est à dire si  $L_A(e)^2 - 4c_A q(e) = 0$
- L'intersection n'est constituée d'aucun point, si l'équation du second degré n'admet pas de racine réel.

Ainsi, si on note  $\mathcal{F}$  un faisceau de cercle, on peut décrire  $\mathcal{F}$  selon la façon dont  $\bar{m}(\mathcal{F})$  intersecte l'image de  $\tilde{q}$  qui est  $\bar{m}(\hat{\mathcal{P}})$ .

- Si les points d'intersections sont imaginaires et que la droite  $\bar{m}(\mathcal{F})$  n'est pas incluse dans le plan  $\mathcal{D}$ , alors tous les cercles du faisceau sont de vrais cercles. Il s'agit en fait d'un faisceau dit de cercles sécants.
- Si la droite  $\bar{m}(\mathcal{F})$  est incluse dans le plan  $\mathcal{D}$  mais ne passe pas par le point  $\bar{m}(\infty)$  alors le faisceau est constitué exclusivement de droites qui s'intersectent en un point. C'est un faisceau de droites concourantes.
- Si la droite  $\bar{m}(\mathcal{F})$  est incluse dans le plan  $\mathcal{D}$  et passe par le point  $\bar{m}(\infty)$  le faisceau est constitué de droites parallèles.
- Si  $\bar{m}(\mathcal{F})$  intersecte  $\bar{m}(\hat{\mathcal{P}})$  en deux points (autres que  $\bar{m}(\infty)$ ) alors on a un faisceau dit à point limite. (voir figure [6](#))
- Si un des deux points d'intersection est le point  $\bar{m}(\infty)$  alors on est dans le cas d'un faisceau de cercle concentrique. (voir figure [5](#))
- Si l'unique point d'intersection n'est pas le point  $\bar{m}(\infty)$  alors on a un faisceau de cercles dits tangents.

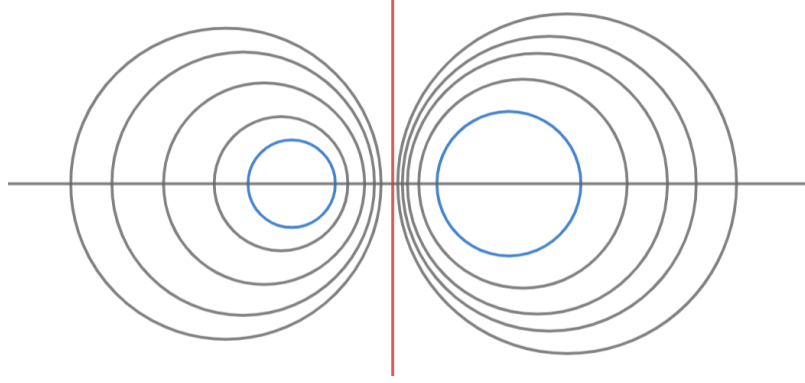


FIGURE 6 – Faisceau de cercle à point limite

## 4 Invariance des équations de Maxwell par action de $O(1, 3)$

On se place dans l'espace de Minkowski :  $\mathcal{M}$ . La théorie de l'électromagnétisme traite des quantités suivantes :

$H$ : le champs magnétique	$E$ : le champs électrique
$B$ : l'induction magnétique	$J$ : la densité de courant électrique
$\rho$ : la densité de charge	$D$ : l'induction électrique

Ces différentes fonctions qui dépendent des variables espace  $(x, y, z)$  et du temps  $t$  sont liées par les équations de Maxwell que l'on rappelle ci-dessous (où  $c$  est la vitesse de la lumière) :

- (i)  $\vec{rot}(E) = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$
- (ii)  $\vec{rot}(H) = \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}$
- (iii)  $div(D) = 4\pi\rho$
- (iv)  $div(B) = 0$

Le premier postulat qu'émet Einstein dans son article de 1905 stipule que toutes les lois de la physique, en particulier celles de l'électromagnétisme, sont les mêmes dans tout référentiel inertiel. Nous allons donc vérifier cette affirmation pour les équations de Maxwell. Pour cela nous allons traduire les équations de Maxwell avec des formes sur la variété différentielle qu'est l'espace de Minkowski. On pose alors :

$$\alpha = (E_x dx + E_y dy + E_z dz) \wedge (cdt) + (B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy)$$

$$\beta = -(H_x dx + H_y dy + H_z dz) \wedge (cdt) + (D_x dy \wedge dz + D_y dz \wedge dx + D_z dx \wedge dy)$$

$$\gamma = (J_x dy \wedge dz + J_y dz \wedge dx + J_z dx \wedge dy) \wedge dt - \rho dx \wedge dy \wedge dz$$

Pour retrouver les équations (i) et (iv), calculons  $d\alpha$  :

$$d\alpha = ((\partial_y E_x dy + \partial_z E_x dz) \wedge dx + (\partial_x E_y dx + \partial_z E_y dz) \wedge dy + (\partial_x E_z dx + \partial_y E_z dy) \wedge dz) \wedge cdt$$

$$+ (\partial_x B_x dx + \partial_t B_x dt) \wedge dy \wedge dz + (\partial_t B_y dt + \partial_y B_y dy) \wedge dz \wedge dx + (\partial_t B_z dt + \partial_z B_z dz) \wedge dx \wedge dy$$

Si on pose  $\alpha$  fermé :

$$d\alpha = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\partial_y E_x + \partial_x E_y + \frac{1}{c} \partial_t B_z = 0 \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z + \frac{1}{c} \partial_t B_y = 0 \\ -\partial_z E_y + \partial_y E_z + \frac{1}{c} \partial_t B_1 = 0 \\ \partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (iv) \\ (i) \end{array}$$

Par des calculs similaires, les équations (ii) et (iii) sont équivalentes à  $d\beta + 4\pi\gamma = 0$ . Les équations de Maxwell sont donc équivalentes au système :

$$\begin{array}{l} (a) \quad d\alpha = 0 \\ (b) \quad d\beta + 4\pi\gamma = 0 \end{array}$$

Pour prouver que les équations de Maxwell sont invariantes par action des transformations de Lorentz, nous allons prouver qu'elles le sont par l'action des générateurs de  $O(1, 3)$  que nous avons mis en évidence avec les propriétés [1.7](#) avec la décomposition [\(4\)](#) et [1.8](#).

#### 4.1 Le cas d'un boost

On commence par l'action d'un boost. Soit  $A = \begin{pmatrix} ch\phi & sh\phi & 0 & 0 \\ sh\phi & ch\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On remarque dans un premier temps que :

$$\begin{aligned} A^*(dx \wedge dt) &= (sh(\phi)dt' \wedge ch(\phi)dx') \wedge (ch(\phi)dt' + sh(\phi)dx') \\ &= (sh^2(\phi) - ch^2(\phi))(dt' \wedge dx') \\ &= dx' \wedge dt' \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} A^*\alpha &= c(E_x \circ A)dx' \wedge dt' + c((E_y \circ A)dy' + (E_z \circ A)dz') (ch(\phi)dt' + sh(\phi)dx') \\ &\quad + (B_x \circ A)dy' \wedge dz' + (B_y \circ A)dz' \wedge (sh(\phi)dt' + ch(\phi)dx') + (B_z \circ A)(sh(\phi)dt' + ch(\phi)dx') \wedge dy' \\ &= c(E_x \circ A)dx' \wedge dt' + c \left( ch(\phi)(E_y \circ A) - \frac{sh(\phi)}{c}(B_z \circ A) \right) dy' \wedge dt' \\ &\quad + c \left( ch(\phi)(E_z \circ A) + \frac{sh(\phi)}{c}(B_y \circ A) \right) dz' \wedge dt' \\ &\quad + (B_x \circ A)dy' \wedge dz' + (ch(\phi)(B_y \circ A) - c sh(\phi)(E_z \circ A)) dz' \wedge dx' \\ &\quad + (ch(\phi)(B_z \circ A) - c sh(\phi)(E_y \circ A)) dx' \wedge dy' \end{aligned}$$

On peut donc identifier les expressions du champ électrique et de l'induction magnétique dans le nouveau référentiel :

$$E' = \begin{cases} E'_x = E_x \circ A \\ E'_y = ch(\phi)(E_y \circ A) - \frac{sh(\phi)}{c}(B_z \circ A) \\ E'_z = ch(\phi)(E_z \circ A) + \frac{sh(\phi)}{c}(B_y \circ A) \end{cases} \quad B' = \begin{cases} B'_x = B_x \circ A \\ B'_y = ch(\phi)(B_y \circ A) - c sh(\phi)(E_z \circ A) \\ B'_z = ch(\phi)(B_z \circ A) + c sh(\phi)(E_y \circ A) \end{cases}$$

Ces deux champs correspondent à la 2-forme  $A^*\alpha$  qui vérifie l'équation suivante :

$$dA^*\alpha = A^*d\alpha = 0$$

Ainsi le champs électromagnétique décrit par  $E'$  et  $B'$  vérifie les équations (i) et (iv). En effectuant le même genre de calcul sur  $\beta$  et  $\gamma$ , on trouve les expressions de  $H'$ ,  $J'$  et  $D'$  qui vérifient eux aussi les équations (ii) et (iii). Les équations de Maxwell sont donc indépendantes pour un changement de référentiel inertiel de type boost.

## 4.2 Le cas des rotations spatiales

Le cas des rotations spatiales se traite rapidement. En effet, si on prend  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

en posant le calcul, on obtient que le champs électromagnétique dans le nouveau référentiel est de la forme :

$$E' = \begin{cases} E'_x = \cos(\theta)(E_x \circ A) - \sin(\theta)(E_y \circ A) \\ E'_y = \sin(\theta)(E_x \circ A) + \cos(\theta)(E_y \circ A) \\ E'_z = E_z \circ A \end{cases} \quad B' = \begin{cases} B'_x = \cos(\theta)(B_x \circ A) + \sin(\theta)(B_y \circ A) \\ B'_y = \cos(\theta)(B_y \circ A) - \sin(\theta)(B_x \circ A) \\ B'_z = B_z \circ A \end{cases}$$

et on a également  $dA^*\alpha = 0$ . On peut également effectuer le calcul pour vérifier que  $H'$ ,  $J'$  et  $D'$  vérifient les équations (ii) et (iii), mais celui-ci est analogue aux calculs précédents. Ainsi les rotations spatiales et donc  $SO(3)$  préservent les équations de Maxwell.

Les parties [4.1](#) et [4.2](#) nous permettent de prouver que l'action de  $SO_o(1,3)$  sur l'espace de Minkowski préserve les équations de Maxwell. Pour finaliser notre preuve il faut le vérifier pour les matrices  $T$  et  $S$ , introduites dans la démonstration de la propriété [1.7](#).

## 4.3 Le cas de $S$ et $T$

Pour rappel :  $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Il n'est même pas nécessaire de passer par la forme différentielle des équations de Maxwell pour voir que ces transformations les préserve. Il suffit de travailler directement sur les équations (i), (ii), (iii) et (iv). Par exemple pour  $S$  avec l'équation (i) :

$$E'(t, x, y, z) = -E(t, -x, -y, -z), \quad B'(t, x, y, z) = B(t, -x, -y, -z) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}}_{\mathcal{R}} = -\overrightarrow{\text{rot}}_{\mathcal{R}'}, \quad \text{ainsi :}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}_{\mathcal{R}'}(E')(t, x, y, z) = \overrightarrow{\text{rot}}_{\mathcal{R}}(E)(t, -x, -y, -z) = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}(t, -x, -y, -z) = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}(t, x, y, z)$$

En effectuant le même travail avec les autres équations pour  $S$  et pour  $T$ , on obtient que les deux transformations associées à  $S$  et  $T$  préservent les équations de Maxwell. On peut donc conclure que la théorie de la relativité restreinte vérifie bien le premier postulat qu'Einstein a émis dans son article de 1905 pour les lois de l'électromagnétique.

## Références

- [Aud] Michèle Audin, Géométrie, EDP sciences
- [BergI] Marcel Berger, Geometry I, Springer, 2009
- [BergII] Marcel Berger, Geometry II, Springer, 2009
- [Flan] Harley Flanders, Differential forms with app to the Physical Sciences, 2012
- [Fren] A.P Frensh, Special Relativity, 1968
- [GHL] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, Jacques Lafontaine, Riemannian Geometry, 2004
- [Iver] Birger Iversen, Hyperbolic Geometry, 1992
- [Lang] David Langlois, Introduction à la relativité, cours de l'école polytechnique, 2020
- [Paul] Frédéric Paulin, Introduction aux groupes de Lie pour la physique, cours de l'école Centrale Paris, 2016
- [Raym] Raymond A. Serway, Optique et physique moderne, 2013, Chapitre 9
- [Roch] Frédéric Rochon, Géométries, cours de l'UQAM, 2021