# Questions, remarques et autres à propos des leçons d'agrégation 2014

Akita

ENS Ker Lann, Rennes, 2013-2014

# Table des matières

# Intro :

Ce document contient des remarques et des questions posées par les préparateurs et les élèves lors des leçons présentées en prépa agrég à Rennes en 2013-2014. Il comprend également une proposition de plan et de développements pour chaque leçon ainsi que quelques développements rédigés. On y trouvera aussi des remarques concernant l'épreuve de modélisation option A probas-stats. Toute question, remarque ou suggestion est la bienvenue à l'adresse mail suivante : alexis.ropiquet@ens-cachan.org.

# 1 Algèbre et Géométrie

## 1.1 101. Groupes opérant sur des ensembles. Exemples et applications.

*Intro :* Les groupes sont des objets mathématiques omniprésents en algèbre linéaire et en géométrie classique. Et un bon nombre de théorèmes classiques d'algèbre linéaire (comme la base incomplète, le rang, Jordan) sont des théorèmes de classification dont les résultats s'interprètent souvent comme la description d'orbites pour une action d'un groupe sur un ensemble. En fait, un groupe peut être vu comme une machine à partitionner et son action comme un moyen de classer les éléments d'un ensemble à l'aide d'invariants. cf C-G intro.

*Plan :*

I] Actions de groupes COM + PER

1. Définitions et premières propriétés
2. Cas où X et G sont finis

II] Théorie des groupes

1. Les $p$-Sylow PER
2. Action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par permutation cyclique
   applis : le théorème de Cauchy COM, loi de récip quad C-G

III] Actions de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ C-G

1. Action par conjugaison sur $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$
2. Action par conjugaison sur $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$
3. Action par conjugaison sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
4. Action par congruence sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ PAZ

IV] Autres actions

1. Le groupe symétrique GOU + OBJ + C-G
2. Représentations linéaires des groupes finis COL + PEY

*Annexe :* table(s) de caractères

*Développements :*

Loi de réciprocité quadratique C-G
Diagrammes de Young C-G

*Remarques :*

– penser à parler d'invariants dès que possible ! pour caractériser les orbites et l'action de groupe,

– citer (avec les énoncés complets !) les résultats importants du programme comme la trigonalisabilité, la diagonalisabilité, le théorème de Wedderburn, le lemme de Burnside,...

*Questions :*

1) Dans la preuve du théorème de Wedderburn, pourquoi $k$ est-il un $Z-ev$ ? (où $k$ est un corps et $Z$ l'ensemble des éléments de $k$ qui commutent avec tous les éléments de $k$)

2) Donner un exemple d'anneau non commutatif dans lequel il existe un élément pour lequel son commutant n'est pas commutatif.

3) Démontrer le lemme de Burnside.

4) Donner des applications du lemme de Burnside.

5) Donner des exemples de théorème concernant la trigonalisabilité ou la diagonalisabilité (avec des énoncés faisant intervenir des changements de bases avec différents groupes).

6) Sur l'espace des polynômes à plusieurs variables, donner des exemples d'actions classiques.

7) Donner une famille génératrice des polynômes homogènes.

8) Quelle est la dimension des composantes homogènes ?

9) Donner des exemples d'actions simplement transitives (autres que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$).

10) Montrer que l'action "groupe des homographies $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \curvearrowright$ droite projective $\mathbb{P}(\mathbb{C})$" est simplement 3-transitive.

11) Montrer que $\mathrm{Orb}(x)$ est en bijection avec $G/\mathrm{Stab}(x)$.

12) Interpréter la notion de matrices semblables en tant qu'action de groupes.

13) Trouver tous les morphismes de $\mathcal{S}_n$ dans $\{\pm 1\}$.

14) Trouver tous les morphismes de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathbb{C}^*$.

15) Quelles sont les classes de conjugaison dans $SO_2(\mathbb{R})$ ? Et dans $O_2(\mathbb{R})$ ?

16) Comment surjecter géométriquement $\mathcal{S}_4$ sur $\mathcal{S}_3$, sachant que le groupe d'isométries du tétraèdre est $\mathcal{S}_4$ ?

17) Comment injecter $\mathcal{S}_4$ dans $\mathcal{S}_8$ avec le cube ?

18) Compter les endomorphismes nilpotents dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. Commencer avec $n = 2$.

*Réponses :*

1) car $k$ est une extension du corps $Z$.

4) Classification des sous-groupes de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ (en faisant agir le groupe sur l'ensemble de ses pôles). Dénombrement.

5) L'orthodiagonalisabilité des matrices symétriques réelles.

6) Permutation des variables.

8) pour les polynômes homogènes de degré $d$ dans $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ : $\binom{n-1}{d}$

9) (CNS : |G| = |X|) (on dit que X est un *espace principal homogène*) racines primitives n-ièmes de l'unité ; jours de la semaine ; gamme musicale.

10) $\varphi(z) = \dfrac{z-\alpha}{z-\gamma}\dfrac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}$ envoie $(\alpha, \beta, \gamma)$ sur $(0, 1, \infty)$ et c'est la seule homographie qui le fait.

## 1.2 102. Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

*Plan :* + MAD1

I] $\mathbb{U}$ : trois interprétations

1. Groupe des complexes de module 1 AF1
2. Exponentielle complexe et $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ AF2
3. Aspect géométrique : SO(2) AUD

II] Sous-groupes de $\mathbb{U}$

1. Caractérisation COM
2. Racines n$^e$ de l'unité AF1

III] Polynômes cyclotomiques GOZ

1. Construction
2. Propriétés

IV] Applications

1. Paramétrisation rationnelle du cercle de l'unité et équations diophantiennes COM
2. Représentations et critère de simplicité PEY (+ COL)

*Annexe :*

polygones avec $\mathbb{U}_n$

*Développements :*

Théorème de Kronecker SZP
Irréductibilité des polynômes cyclotomiques GOU

*Remarques :*

– penser à donner une définition de 'constructible',
– savoir répondre à la question : si $\omega \in \mathbb{U}$ alors montrer que $\omega$ est une racine ou non de l'unité,
– leçon en lien avec la théorie des groupes via le thm de Kronecker-Weber, pas forcément en parler mais le savoir et se cultiver,
– mentionner les angles.

*Questions :*

1) Énoncé du théorème de Dirichlet ?

2) Définition de 'constructible' ?

3) idée de la démo du thm de Wantzel ?

4) Si on connaît trois points $A, B$ et $C$ non alignés alors comment construire le cercle de centre $C$ et de rayon $[AB]$ avec pour seuls outils le compas et la règle (non graduée !) et un seul droit : construire un cercle de centre un point connu et passant par un autre point connu (ie : pas le droit de reporter les longueurs) ?

5) Appliquer le lemme ("pour $m$ et $n$ deux entiers premiers entre eux, alors le polygone régulier à $mn$ côtés est constructible ssi les polygones réguliers à $m$ et $n$ côtés le sont) au nombre 15.

6) Les nombres algébriques qui sont sur le cercle unité sont-ils des racines de l'unité ?

7) Que peut-on dire de $\mathbb{U}_n$ dans un autre corps que $\mathbb{C}$ ? cardinalité, cyclicité ?

8) $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ \theta & \longmapsto & \mathrm{e}^{i\theta} \end{array} \right.$ est surjectif, est-ce dur à montrer ?

9) Quelle est la complexité de la transformation de Fourier rapide ?

10) Comment construire $\sqrt{a}$ ? (trouver deux méthodes)

11) Qu'est-ce qu'un angle ?

*Réponses :*

3) on considère un segment et on dit que c'est l'unité (de longueur 1) et ...

4) considérer le parallélogramme $ABA'B'$ où $A' \in (AC)$ et $\overline{A'C} = \overline{CA}$...

5) 15=5*3, $\frac{2\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{3}$ construits, $2*5-3*3=1$ et alors $\frac{2\pi}{15} = 2*\frac{2\pi}{3} - 3*\frac{2\pi}{5}$ et concrètement (cercle unité, se balader dessus en sommant les angles)

6) *indice :* penser à la paramétrisation rationnelle du cercle unité
*réponse :* Non

8) théorème d'inversion locale

9) $O(N^2)$

## 1.3 103. Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient.

*Plan :*

I] Définitions et premières propriétés

1. Définitions PER
2. Sous-groupe distingué et simplicité PER + OXEalg3
3. Groupe quotient PER + COM
4. Théorèmes d'isomorphisme COM

II] Groupes et sous-groupes remarquables

1. Centre et groupe dérivé PER
2. Groupes symétriques et alternés TAUV
3. Isomorphismes particuliers PER

III] $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et applications

1. Définition et action par permutation cyclique COM + C-G
2. Produit de groupes COM

IV] Représentations et sous-groupes distingués COL + PEY

1. Représentations et caractères
2. Tables de caractères et groupes simples

*Annexe :* table(s) de caractères

*Développements :*

Simplicité de SO(3) OXEalg3

Loi de réciprocité quadratique C-G

## 1.4 104. Groupes finis. Exemples et applications. [1]

*Plan :*

I] Introduction aux groupes finis COM

1. Définition et ordre + OXEalg2
2. Actions de groupes COM + C-G

II] Groupes abéliens finis COM

1. Groupes cycliques
2. Décomposition des groupes abéliens finis

III] Groupes finis non abéliens

1. Les groupes symétriques COM
2. Les $p$-Sylow COM
3. Des groupes de matrices C-G

IV] Représentations linéaires de groupes finis COL + PEY

*Annexe :* table(s) de caractères

*Dvlpts :*

Théorème de Burnside OXEalg2
Loi de réciprocité quadratique C-G

*Remarques :*

– connaître absolument $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_p)$ (par ex cf Perrin) pour $n, p$ petits : intéressant pour obtenir des groupes finis,
– pareil avec $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_p)$ (qui donnent la plupart du temps des groupes simples) et lien intéressant avec la géométrie projective,
– parler des groupes susnommés,
– bien insister sur les exemples et les applications.

*Questions :*

1) Montrer que si $|G| = p^2$ alors $G$ est abélien.

2) Montrer : $G$ abélien $\Leftrightarrow G/\mathcal{Z}(G)$ est cyclique

1. Celle où qqun a dit : "Pas la peine d'insister là-dessus. Si vous voulez vraiment être impeccable, eh bien vous écrivez un livre.".

3) Contre-exemple pour $G$ non abélien ?

4) D'autres exemples de groupe non abélien ?

5) Que veut dire P dans $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_p)$ ?

6) $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) = ?$

7) Montrer : $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \cong \mathcal{S}_4$.

8) Que savez-vous sur les groupes simples ?

9) Y a-t-il des groupes simples pour tout cardinal ?

10) Montrer qu'il n'existe pas de groupe simple d'ordre 30.

11) Que pouvez-vous dire sur les sous-groupes du groupe diédral ?

12) Est-ce que tout sous-groupe dont tous les sous-groupes sont finis est fini ?

13) Est-ce que tout sous-groupe qui admet un nombre fini de sous-groupes est fini ?

14) Est-ce que faire agir un groupe sur un ensemble nous apprend quelque chose sur le groupe ?

15) Énoncer le lemme d'Iwasawa.

16) Famille de groupes finis importante dont l'étude donne des cas de groupes simples ?

17) $\mathcal{A}_4$ est-il simple ? Pourquoi ?

18) "Les $\mathcal{S}_n$ sont en quelque sorte universels". Détailler cette affirmation.

19) Dans le théorème chinois, expliquer rapidement comment on construit l'isomorphisme.

20) Comment l'applique-t-on sur un exemple ?

21) Et pour $n, m$ non premiers entre eux ?

22) Calculer $|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|$.

23) Une action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ qui préserve les droites : que peut-on en dire ?

24) Qu'en déduit-on pour $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_3) \curvearrowright \mathbb{P}(\mathbb{F}_3^2)$ ?

25) Si $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un morphisme avec $G$ un groupe fini alors donner la décomposition de Dunford de $\rho(g)$ où $g \in G$.

26) Sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ? de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ ?

*Réponses :*

1) éq des classes + 2)

2) pour implication réciproque : pour $x \in G$, $x = a^k z$, où $\overline{a}$ engendre $G/\mathcal{Z}(G)$ et $z \in \mathcal{Z}(G)$

3) Le groupe $\mathbb{H}_8$ des quaternions

4) il y en a à la pelle

5) projectif[2]

6) $\cong \mathcal{S}_4$

7) $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \curvearrowright \{4$ droites de $\mathbb{F}_3$ $\}$ : donne un morphisme injectif, + cardinal

8) classification...pour en apprendre plus : inviter Bordas à boire un verre, il a l'air d'en connaître un paquet sur la question !

9) Non, pour $n = 8$ : $\mathbb{H}_8$

10) 30=2×3×5. (jusque-là ça va !)
Supposons qu'il en existe un. Alors on regarde ses $p-$Sylow : $n_2 = 3, 5, 15$, $n_3 = 10$ et $n_5 = 6$. On a alors 24 éléments d'ordre 5 (les intersections des 5-Sylow sont restreintes à l'élément neutre) et au moins 20 éléments d'ordre 3...ça fait un peu

2. ou pastrami d'après A... à vérifier !!

trop de monde pour un si petit groupe !

11) à l'heure actuelle, pas grand-chose...

12) ? il y a sûrement la réponse dans le Rotman (et ensuite appeler Nico pour qu'il puisse enfin dormir paisiblement !)

13) Bien sûr, appeler J.Sedro pour une réponse claire et précise.

14) Oui

16) les $\mathcal{S}_n$

17) Non : $\mathrm{V}_4 \lhd \mathcal{A}_4$, où $\mathrm{V}_4$ :={ identité, doubles transpositions } $\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\mathrm{x}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

18) pr $G$ groupe fini, en considérant l'action à gauche de $G$ sur lui-même, on obtient une injection de $G$ dans $\mathcal{S}(G) \cong \mathcal{S}_{|G|}$

22) compter les bases

25) $\rho(g) = \rho(g) + 0$ car tous les éléments $\rho(g)$ annulent $X^{|G|} - 1$

## 1.5 105. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

*Plan :*

I] Introduction aux groupes symétriques

1. Définitions et premières propriétés TAUV
2. Orbites et cycles TAUV
3. Générateurs de $\mathcal{S}_n$ TAUV
4. Automorphismes de $\mathcal{S}_n$ PER

II] Signature et groupes alternés

1. Signature d'une permutation TAUV
2. Les groupes alternés TAUV
3. Isomorphismes particuliers C-G

III] Actions de groupe

1. Algèbre linéaire OBJ + OXEalg1 + GOU
2. Polynômes symétriques SZP + C-G
3. Groupes d'isométries particuliers C-G
4. Représentations linéaires COL + PEY

*Annexe :* table de caractères de $\mathcal{S}_4$

*Dvlpts :*

Table de caractères de $\mathcal{S}_4$ PEY
Décomposition de Bruhat OXEalg1

*Remarques :*

– attention à la définition d'un cycle de longueur donnée,
– question classique : considérer un petit groupe de permutations et trouver ses Sylow (penser au côté géométrique peut aider),
– pour la théorie des groupes : cf Rotman, <u>Introduction to the theory of groups</u>.

*Questions :*

1) Qu'est-ce que $V_4$ ?

2) Quels sont les automorphismes de $V_4$ ?

3) Quels sont les groupes de Sylow de $\mathcal{S}_4$ ? Combien y en a-t-il et quels sont leurs structures de groupe ?

4) Soit $G$ un groupe d'ordre $2^n k$, avec $k$ impair (on suppose $n \geq 1$, $k \neq 1$). On suppose qu'il existe $x \in G$ d'ordre $2^n$. Montrer que $\{y \in G|$ l'ordre de $y$ n'est pas un multiple de $2^n\}$ est l'unique sous-groupe de $G$ d'ordre ? ? et qu'il est distingué.

5) exo classique :
– Montrer que tout groupe d'ordre 60 simple est isomorphe à $\mathcal{A}_5$.
– Et si le groupe n'est pas simple, que peut-on en dire ?

*Réponses :*

1) les doubles transpositions dans $\mathcal{S}_4$

2) *indice :* penser à la structure d'ev de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
*rép :* c'est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \cong \mathcal{S}_3$.

3) *indice :* utiliser les théorèmes de Sylow et montrer le résultat préliminaire : tout 2-Sylow contient exactement deux transpositions.

4) *indice :* commencer par le cas $n = 1$. que dire de la signature de $x$ ? (lorsqu'on plonge $G$ dans $\mathcal{S}_G$) puis récurrence sur $n$ et regarder éléments d'ordre impair.

5) - ?
- c'est un produit semi-direct

## 1.6 106. Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie $E$, sous-groupes de $\mathbf{GL}(E)$. Applications.

*Plan :*
I] Le groupe linéaire PER

1. Définition et premières propriétés + GOU
2. Le groupe spécial linéaire
3. Générateurs, centres, groupes dérivés

II] Sous-groupes de GL($E$)

1. Le groupe orthogonal PER + TAUV + OXEalg3
2. Des sous-groupes finis de GL($E$) OBJ + OXEalg2

III] Aspects topologiques M-T

1. Des résultats et la décomposition polaire
2. Exponentielle de matrices + C-G

IV] Actions de groupe de GL($E$) C-G
avec isomorphismes particuliers
V] Représentations COL + PEY

*Annexe :* si place : table de caractères

*Dvlpts :*
Théorème de Burnside OXEalg2
Homéomorphisme $O(p,q) \overset{\sim}{=} O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ C-G

*Remarques :*
– la continuité de la décomposition polaire est due à la compacité du groupe orthogonal,
– pourquoi pas un paragraphe à propos d'action de GL($E$) (cf C-G),
– en développement : le théorème de Frobenius-Zolotarev est à la limite de la leçon,
– pourquoi pas un développement sur la décomposition polaire en expliquant pourquoi la compacité est importante (algébrique et analytique).

## 1.7 107. Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

*Intro :* cf COL pp1 + 233

*Plan :*
I] Représentations et caractères COL

1. Représentations
2. Caractères
3. Construction de représentations

II] Décomposition de représentations COL

1. Représentations et caractères irréductibles
2. Applications + PEY

III] Cas des groupes abéliens PEY

1. Dual et bidual
2. Transformée de Fourier discrète

*Annexe :* tables de caractères

*Dvlpts :*
Table de caractères de $\mathcal{S}_4$ PEY
Table de caractères de $D_n$ PEY

## 1.8 108. Exemples de parties génératrices de groupes.

*Intro :* l'utilité des parties génératrices dans l'analyse des morphismes de groupes

*Plan :*
intro : rappel des notions liées aux parties génératrices d'un groupe
I] Groupes abéliens COM

1. Groupes monogènes et cycliques
2. Groupes abéliens de type fini

II] Groupes symétriques et diédraux

1. Groupes symétriques TAUV
2. Groupes diédraux TAUV ?

III] Groupes de matrices PER

1. $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{SL}(E)$
2. Groupe orthogonal
3. Sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ MNE

IV] Représentations COL + PEY

*Annexe :* table de caractères de $D_n$

*Dvlpts :*
Sous-algèbres réduites de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ MNE
Table de caractères de $D_n$ PEY

*Questions :*

1) Donner la présentation du groupe des quaternions.

2) Soit $G$ un sous-groupe d'indice 2 de $\mathcal{S}_n$. Qu'en dire ?

3) On considère un groupe avec deux générateurs d'ordre 2. Qu'en dire ?

4) Décrire le groupe diédral avec tous ses éléments, en particulier $\mathcal{D}_6$.

5) Classification des isométries du plan ?

6) Famille minimale de transvections engendrant $\mathrm{SL}(E)$ ?

7) Lien entre le pivot de Gauss et les transvections ?

8) Décomposition d'une matrice en produit d'une matrice inférieure et d'une matrice orthogonale ?

*Réponses :*

2) C'est $\mathcal{A}_n$.

3) C'est un groupe diédral.

## 1.9 109. Représentations de groupes finis de petit cardinal.

*Intro :* cf COL pp1 + 233

*Plan :*

I] Théorie générale COL + PEY

1. Définitions et caractères
2. Décomposition en représentations irréductibles
3. Intérêt et outils pour calculer les tables de caractères

II] Représentations et tables de caractères PEY

1. Groupes symétriques
2. Groupes alternés
3. Groupes cycliques
4. Groupes diédraux

*Annexe :* tables de caractères

*Dvlpts :*

Table de caractères de $\mathcal{S}_4$ PEY
Table de caractères de $D_n$ PEY

*Remarques :*

– cette leçon contient une intersection énorme avec les isométries,
– pour bien travailler cette leçon, il faut minimiser le nombre d'exemples car il faut connaître les moindres détails de chaque exemple (d'où vient-il, qu'est-ce que cela implique, peut-on l'obtenir autrement,...).

*Questions :*

1) Expliquer pourquoi $\mathcal{S}_3 \cong \{\text{isométries d'un triangle équilatéral}\}$.

2) Pourquoi a-t-on $\mathcal{S}_4 \cong \{\text{isométries d'un tétraèdre}\}$ ? (répondre sans décrire tous les éléments des isométries d'un tétraèdre)

3) (cf notations de la rép du 2)) Démontrer que le plan médiateur de $[A_i, A_j]$ contient les deux autres sommets du tétraèdre.

4) A-t-on pour tout $n \in \mathbb{N} : \mathcal{S}_n \cong \{\text{isométries d'un polygone régulier à } n \text{ sommets}\}$ ?

5) Alors à quoi est isomorphe l'ensemble {isométries d'un polygone régulier à $n$ sommets} ?

6) Pourquoi a-t-on, pour $n \neq 3$, $D_n \ncong \mathcal{S}_n$ ?

2 minutes top chrono pour répondre aux questions 7 à 10 (avec 1 minute supplémentaire pour la question 9)) :

7) Pour un polygone régulier à $n$ sommets, considérons la rotation de centre le barycentre des $n$ sommets et d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$. Dans $D_n$, pourquoi n'y a-t-il pas d'autres rotations (à part ses puissances) que celle-ci ?

8) Montrer que $D_n^+$ est cyclique.

9) Montrer le résultat suivant plus général : si $G$ est un sous-groupe fini de $SO_2(\mathbb{R})$ alors $G$ est cyclique.

10) Montrer que card($D_n$)=$2n$.

11) Comment trouver les classes de conjugaison de $D_4$ ?

12) Comment est la table des caractères des groupes cycliques ?

13) Peut-on en déduire la table des caractères des groupes abéliens ?

14) Qu'est-ce que le groupe dérivé ?

15) Pourquoi est-il 'engendré' et pas appelé 'le groupe des commutateurs' ?

16) Donner un exemple pour illustrer 15).

17) Pourquoi ce groupe joue-t-il un rôle important ?

18) Pour $D_n$, quel est son groupe dérivé ?

19) Comment dire si un groupe est simple ou non à partir de sa table de caractères ?

20) Donner la clé de la démonstration du théorème de Maschke.

21) Avant d'établir une table de caractères, peut-on savoir que tout coefficient

sera ou non de module égal à 1 ?

22) Qu'est-ce que représente le nombre $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ?

23) Et pourquoi le retrouve-t-on dans la table de $\mathcal{A}_5$ ?

24) $\mathcal{A}_5$ c'est quoi géométriquement ?

25) Dans le théorème de Burnside, si $p = q$ alors le théorème est-il faux ?

*Réponses :*

1) Considérer un triangle équilatéral et regarder ses isométries (symétries et rotations) et leurs ordres

2) Considérons un tétraèdre de sommets $A_i$ et envoyons la transposition $(i, j)$ sur la symétrie orthogonale de plan le plan médiateur de $[A_i, A_j]$.

3) Car les deux autres sommets sont à égale distance de $A_i$ et $A_j$.

4) Non

5) il est isomorphe à $D_n$ le groupe diédral du polygone régulier à $n$ sommets

6) regarder les cardinaux

7) car une rotation qui laisse fixe le polygone est une rotation qui laisse fixe son barycentre (car c'est une transformation affine)

8) cf 9)

9) Passer en complexe et poser $\varphi \ : \ \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{U}_k \\ g & \longmapsto & \mathrm{e}^{i\theta}(\text{où } g(z) = \mathrm{e}^{i\theta} z) \end{array} \right.$, avec $k$ l'ordre de $G$. S'apercevoir que $\varphi$ est un isomorphisme (vient du fait que $\varphi(g)^k = 1$). Et savoir que $\mathbb{U}_k$ est cyclique !

10) Regarder $\det : D_n \longrightarrow \{\pm 1\}$. On a $D_n^+ = \ker \det$ et $\exists d \in D_n$ tel que $\det(d)$=-1. Conclure avec $|D_n| = |\ker \det||\mathrm{Im}\ \det|$.

11) *indice :* deux éléments conjugués ont même ordre.

12) Considérer une puissance $n$-ème de l'unité pour le groupe cyclique d'ordre $n$.

13) ...

14) c'est le groupe engendré par les commutateurs $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$.

15) parce que le produit de deux commutateurs n'est pas forcément un commutateur

16) ...

17) C'est le plus petit sous-groupe par lequel en quotientant on obtient un groupe abélien.

18) ...

19) à chaque ligne (sauf l'identité) il n'y a pas de coefficient égal au degré pour un groupe simple

20) ...

21) ...

22) C'est le nombre d'or.

23) ...

24) Ce sont les isométries qui laissent stables le dodécaèdre.

25) Dans ce cas on a "$p^\alpha q^\beta = p^{\alpha+\beta}3^0$" et cela marche.

## 1.10 120. Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

*Plan :*

I] Définitions GOU + COM

1. Arithmétique dans $\mathbb{Z}$
2. L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

II] Structure de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

1. Le théorème chinois GOU
2. Automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ PER

III] Arithmétique

1. Nombres premiers GOU
2. Irréductibilité des polynômes PER + GOU
3. Des carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (avec $p$ premier) PER + C-G
4. Équations diophantiennes COM

IV] Cryptographie GOU
Système RSA

*Dvlpts :*

Irréductibilité des polynômes cyclotomiques GOU
Loi de réciprocité quadratique C-G

*Remarques :*

– justifier l'emplacement du théorème de structure des groupes abéliens finis,
– cyclotomie : à la frontière du plan, discutable mais acceptable,
– autres exos possibles : résolution d'équations diophantiennes,
– dvlpt possible : réciprocité quadratique,
– en dvlpt, proposer autre chose que le thm de Dirichlet.

*Questions :*

1) Quelle est la définition de la signature d'un élément de $GL(V)$ ? (où $V$ est un espace vectoriel de dimension finie)

2) À quelle condition sur $P$ a-t-on l'équivalence suivante : $P$ irréductible dans $\mathbb{Q}[X] \Leftrightarrow P$ irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ ?

3) Montrer : $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ cyclique $\Rightarrow n \in \{4, p^\alpha, 2p^\alpha (p \text{ premier impair, } \alpha \geq 0)\}$

4) À quelles conditions $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est-il cyclique ?

5) Résoudre $\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 1 \quad [6] \\ x & = & 9 \quad [20] \\ x & = & 4 \quad [45] \end{array}\right.$

6) Lorsque pgcd$(a,b)$=1, comment trouver $u$ et $v$ tels que $au+bv=1$ ?

7) 31 est-il un carré modulo 91 ?

8) Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, combien y a-t-il de carrés ? (avec $n$ premier)

9) Pour $n$ quelconque (ie non premier), même question. (*Rq :* question difficile pouvant servir de développement)

10) Quels sont les $n$ tels que $2^n-1$ soit un carré ?

11) Quels sont les nilpotents de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ?

12) Démontrer le lemme chinois (qui est une équivalence).

13) Quelle est la méthode générale pour résoudre un système de congruences ? Puis résoudre :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 1 \quad [4] \\ x & = & 2 \quad [3] \\ x & = & 4 \quad [9] \end{array}\right. .$$

14) Montrer que si $p$ est premier, alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est cyclique.

15) Connaissez-vous des groupes non commutatifs ?

16) Sur le développement (Théorème de Sophie Germain), pourquoi on suppose $p$ impair ?

*Réponses :*

1) pour un certain $n \in \mathbb{N}$ : $GL(V) \cong \mathcal{S}_n$ et se reporter à la signature d'un élément de $\mathcal{S}_n$

2) condition nécessaire (et suffisante ?) : le pgcd des coefficients de $P$ est inversible dans $\mathbb{Z}$

3) c'est long ; distinguer plusieurs cas et revoir la démo du dvlpt concerné

4) pgcd$(n, m) = 1$

5) D'après le théorème chinois, le système est équivalent à $\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 1 \quad [4] \\ x & = & -1 \quad [5] \\ x & = & 4 \quad [9] \end{array}\right.$

6) Utiliser l'algorithme d'Euclide.

7) *indice :* par l'absurde + thm chinois + symbole de Legendre

8) $\dfrac{n+1}{2}$ (ne pas oublier 0 ! !)

9) *indice :* Pour $p$ premier, montrer que pour $g$ générateur de $\mathbb{Z}/p^{\alpha-1}(p-1)\mathbb{Z}$, $g$ n'est pas un carré. (regarder son ordre). *bout de réponse :* dans $\mathbb{Z}/p^{\alpha}\mathbb{Z}$, il y a $\dfrac{\varphi(p^{\alpha})}{2} = \dfrac{(p-1)p^{\alpha-1}}{2}$ carrés.

10) *indice :* regarder *mod* 4.
*réponse :* $n \in \{0, 1\}$.

12) cf Gourdon, Algèbre

14) Lagrange est ton ami.

15) Quaternions, groupe symétrique, groupe des matrices

16) l'égalité $x^p + y^p = (x+y)\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} -x^k y^{p+1-k}$ n'est vraie que pour $p$ impair (c'est une raison, il y en a peut-être d'autres). Si $p = 2$, il n'y a pas de solution.

## 1.11 121. Nombres premiers. Applications.

*Intro :* les systèmes bancaires, la cryptographie => intérêt des nombres premiers

*Plan :*
I] Introduction aux nombres premiers GOU

1. Définitions et théorème fondamental de l'arithmétique
2. Propriétés + COM
3. Application : Cryptage RSA

II] Localisation GOU

1. Répartition
2. Nombres remarquables
3. Tests de primalité + HIN

III] Arithmétique

1. Symbole de Legendre C-G
2. Sommes de deux carrés PER

IV] Applications PER

1. Théorie des groupes
2. Corps finis
3. Réductibilité des polynômes

V] Lien avec les idéaux premiers COM

*Dvlpts :*
Théorème des deux carrés PER
Loi de réciprocité quadratique C-G

*Remarques :*
– théorème de Dirichlet faible : la preuve d'Euclide de l'infinité des nombres premiers en est un cas particulier,
– théorème de Dirichlet : dit qu'il y a une infinité de nombres premiers d'une certaine forme, mais en fait on s'en sert surtout pour utiliser le fait qu'il en existe un d'une certaine forme,
– on peut également présenter le critère de Lehmer,
– ne pas oublier de parler des groupes,
– mettre les résultats concernant la répartition des nombres premiers et le théorème de Dirichlet,

- pour les tests de primalité : cf Demazure et Cohen,
- mettre des tests de primalité et surtout en mettre un à caractère général (en plus du crible d'Eratosthène) , ie pouvant s'appliquer à tout nombre pour tester sa primalité,
- s'attendre à des questions en rapport avec les idéaux premiers, maximaux.

*Questions :*

1) Définition d'un anneau factoriel ?

2) Exemple d'un anneau factoriel différent de $\mathbb{Z}$ ?

3) Exemple d'un anneau non factoriel intègre ?

4) idée de la preuve du théorème de Dirichlet de la progression arithmétique pour le cas faible ? et pour le cas général ?

5) Qu'est-ce qu'un nombre de Mersenne ?

6) Qu'ont-ils d'intéressant ?

7) Montrer que ($n$ pas premier) $\Rightarrow$ ($2^n - 1$ pas premier)

8) On considère :

$$\begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_1 &= 0 \\ u_2 &= 2 \\ u_n &= u_{n-2} + u_{n-3} \end{cases}$$

Écrire les premiers termes jusqu'à $u_7$.

9) Pour $p$ premier, que remarque-t-on pour $u_p$ ?

10) Pour $p$ premier, montrer : $u_p \equiv 0(p)$.

11) La réciproque est-elle vraie ? A-t-on : "si $u_n \equiv 0$ ($n$) alors $n$ est premier" ?

12) Si $n \in \mathbb{N}$ est un carré alors $\forall p$ premier, $n$ est un carré modulo $p$. La réciproque est-elle vraie ?

13) Pour $n, a \in \mathbb{N}$ avec $\text{pgcd}(a, n) = 1$. Comment savoir si $a$ est un carré modulo $n$ ?

14) Que peut-on dire d'un $p$-groupe, avec $p$ premier ?

15) Que peut-on dire d'un groupe d'ordre $pq$ (où $p$ et $q$ sont deux nombres premiers distincts) ?

16) Preuve de la classification des formes quadratiques sur $\mathbb{F}_q$ ?

17) Nombre de zéros dans l'écriture de $1000!$ ?

18) Lien entre nombres premiers et idéaux premiers ?

19) Pourquoi les Grecs était-ils tant fascinés par les nombres premiers ?

20) Y a-t-il une infinité de nombres de Fermat premiers ?

*Réponses :*

1) intègre + décomposition en facteurs irréductibles

2) $\mathbb{K}[X]$, avec $\mathbb{K}$ un corps

3) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

4) analyse complexe et...

5) $2^p - 1$, avec $p$ premier

6) ils peuvent donner de très grands nombres premiers

7) $2^{ab} - 1 = (2^b - 1) \sum\limits_{k=0}^{a-1} 2^{bk}$

8) les écrire

9) regarder

10) On a : $U_{n+1} = AU_n$, d'où $U_n = AU_0$, où $U_n := \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ et

$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Notons $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ les racines de $\chi_A$. Montrer par réc : $u_n \equiv \alpha^n + \beta^n + \gamma^n \ (p)$ (avec $p$ premier). Alors $u_p \equiv \alpha^p + \beta^p + \gamma^p \equiv (\alpha+\beta+\gamma)^p \equiv 0 \ (p)$ (calculer $\chi_A$).

11) Non, mais il faut aller assez loin pour trouver un contre-exemple.

12) Oui, procéder par contraposée : symbole de Legendre + thm chinois. c'est compliqué...

13) théorème chinois mais problème si 2 divise $n$.

14) Il est résoluble. Considérer son centre, puis le centre du groupe quotienté par son centre, etc.

15) Il est non simple. Considérer les $p$-Sylow et $q$-Sylow d'un tel groupe.

16) cf C-G pp151-153

17) *indice :* à quoi correspond le nombre de zéros ? au nombre de puissances de 10, qui elles-mêmes correspondent aux puissances de 2 et 5. On regarde la plus petite valuation entre les deux, c'est celle de 5. Si on note $\nu_p(n)$ la valuation d'un nombre premier dans la factorisation d'un nombre $n$, on a alors l'égalité suivante :

$$\nu_5(1000!) = \sum_{k=1}^{1} 000\nu_5(k).$$

La réponse est 249.

19) Pour leur propriété d'irréductibilité par la factorisation de tout entier en produit de nombres premiers.

20) On ne sait pas !

## 1.12 122. Anneaux principaux. Exemples et applications.

*Cadre :* $A$ un anneau commutatif unitaire et intègre

*Plan :* + HAU pour des contre-exemples
I] Introduction aux anneaux principaux COM

1. Idéaux et anneaux principaux
2. Anneaux euclidiens et factoriels

II] Arithmétique

1. Propriétés : pgcd, ppcm, Bézout, Gauss, thm chinois COM
2. $\mathbb{Z}[i]$ et théorème des deux carrés PER
3. Équations diophantiennes COM + DUV

III] D'autres applications des anneaux principaux

1. Résultant SZP
2. Réduction de Frobenius C-G

*Annexe :* implications des différents types d'anneaux :
euclidien => principal => factoriel => intègre

*Dvlpts :*
Équation de Fermat n=3 DUV
Théorème des deux carrés PER

*Remarque :*
– jauge=stathme.

*Questions :*

1) Quels sont les entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ?

2) Appliquer l'algorithme d'Euclide étendu à 13 et 17.

3) Pour $A$ un anneau commutatif unitaire, montrer que :
($A[X]$ est euclidien ) $\Leftrightarrow$ ( $A$ est un corps)
4) Soit $A$ un anneau principal. Quels sont les liens entre les idéaux premiers et les idéaux maximaux de $A$ ?

5) Dans un anneau principal, trouver les idéaux premiers non maximaux.

6) Montrer l'assertion trouvée en 5).

7) Donner un exemple d'anneau intègre non principal tel que tous les idéaux non nuls premiers sont maximaux.

8) À quoi est égale l'intersection de tous les idéaux premiers d'un anneau ?

*Réponses :*

4) maximal $\Rightarrow$ premier

5) Tout idéal non nul premier est maximal

6) cf COM

7) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

8) à l'ensemble des nilpotents de l'anneau

## 1.13 123. Corps finis. Applications.[3]

*Plan :*

I] Structure TAU

1. Existence et unicité
2. Propriétés
3. Sous-corps et clôture algébrique

II] Polynômes irréductibles TAU

1. Définition et caractéristiques
2. Construction des corps finis

III] L'espace vectoriel $\mathbb{F}_q$

1. Dénombrement et isomorphismes C-G
2. Formes quadratiques sur $\mathbb{F}_q$ PAZ

IV] Équations sur $\mathbb{F}_q$ C-G

1. Symbole de Legendre
2. Loi de réciprocité quadratique

*Dvlpts :*

Loi de réciprocité quadratique C-G
Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$ F-G

*Questions :*

1) Utiliser Berlekamp pour factoriser $P := X^4 + 1$ dans $\mathbb{F}_7$.

2) Dans $\mathbb{F}_{49}$, $2 + \sqrt{3}$ est-il un carré ?

3) Trouver un générateur de $\mathbb{F}_8^*$.

4) Quelle est la version générale du théorème de la base normale ?

5) Démontrer le théorème dans le cas des corps finis.

6) Montrer que 5 n'est pas un carré modulo $N$ lorsque $N := 2^{2^n} + 1$ est premier.

3. Celle où Curmi nous a éblouis

7) Que vaut $5^{N-1}$ modulo $N$ lorsque $N := 2^{2^n}+1$ est premier ?

8) Que vaut $5^{(N-1)/2}$ modulo $N$ lorsque $N := 2^{2^n}+1$ est premier ?

9) On arrête de supposer que $N$ est premier. On suppose maintenant que $5^{(N-1)/2}$ est égal à $-1$ modulo $N$. Montrer que $N$ est premier.

10) Pour $\mathbb{F}_{p^2}^* =< \theta >$, quel est l'ordre de $\theta$ dans $\mathbb{F}_{p^2}^*/\mathbb{F}_p^*$ ?

11) Soit $x \in \mathbb{F}_{p^2}$. Que dire de la suite $(x^n - \mathcal{F}(x^n))_n$ (où $\mathcal{F}$ est le morphisme de Frobenius) ?

12) Soient $q = p^n$ et $a$ un générateur de $\mathbb{F}_q^*$. Quel est le degré de $a$ sur $\mathbb{F}_p$ ?

13) Combien y a-t-il de polynômes minimaux possibles pour $a$ ?

14) Quel est le polynôme caractéristique du morphisme de $\mathbb{F}_q$ dans $\mathbb{F}_q$ qui à $x$ associe $x^p$ ?

*Réponses :*

1) $P$ est sans facteurs premiers car $\mathrm{pgcd}(P, P') = 1$. Ensuite :
$$Mat((S_p - I_d) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) $\sqrt{3} \notin \mathbb{F}_7$ car $\left(\frac{3}{7}\right) = -1$. Donc $(\sqrt{3}, 1)$ est une base du $\mathbb{F}_7$-ev $\mathbb{F}_{49}$. Puis $Mat(x \mapsto x(2+\sqrt{3})) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et son déterminant est égal à 1 donc (caractérisation des carrés via la norme) $2+\sqrt{3}$ est un carré de $\mathbb{F}_{49}$.

3) $\mathbb{F}_8 \cong \mathbb{F}_2[X]/(X^3+X+1)$ et $\overline{X}$ convient (et même tout élément différent de 0 et 1).

4) Pour $\mathbb{K}$ un corps un fini et $\mathbb{L}$ une extension telle que $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = n$ et $\exists g$ tel que $Aut_{\mathbb{K}}(\mathbb{L})$, alors : $\exists x \in \mathbb{L}$ tel que $(x, g(x), \ldots, g^{n-1}(x))$ est une base du $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{L}$.

5) Utiliser les invariants de Frobenius et les polynômes caractéristique et minimal.

6) $\left(\frac{5}{N}\right) = \left(\frac{N}{5}\right) = \left(\frac{2}{N}\right) = -1$, car 2 est d'ordre 4 dans $\mathbb{F}_5$. La deuxième égalité n'est valable que pour $n \geq 2$. Pour $n = 1$, $N$ est nul modulo 5.

7) 1, d'après le petit théorème de Fermat.

8) -1, car 5 n'est pas un carré modulo $N$.

9) Soit $p$ un diviseur premier de $N$. L'ordre de 5 divise $N - 1 = 2^{2^n}$. Or $5^{(N-1)/2}$ modulo $N$ vaut $-1$ donc l'ordre de 5 est exactement $N - 1$. Mais on a également : $5^{p-1} \equiv 1$ modulo $p$. Donc $N - 1 | p - 1$ et $N = p$, ce qui prouve que $N$ est premier.

10) On a $\frac{p^2 - 1}{p - 1} = p + 1$ et l'image de $\theta$ engendre le quotient donc l'ordre de $\theta$ est égal à $p + 1$.

11) On a l'équivalence : $(x \in \mathbb{F}_p) \Leftrightarrow$ (la suite est nulle).
On a également l'équivalence suivante :
$\theta^n = \mathcal{F}(\theta^n) \Leftrightarrow \theta^n \in \mathbb{F}_p \Leftrightarrow p + 1 | n$.

## 1.14 124. Anneau des séries formelles. Applications

*Intro :* S-P p110 : Dans plusieurs domaines des mathématiques, comme l'étude des équations différentielles, des problèmes de combinatoire ou encore les probabilités, on voit apparaître des développements en séries ou des séries génératrices qu'on peut ramener à un même objet mathématique : les séries formelles. On ne se préoccupera pas ici de problèmes de convergence mais simplement des manipulations formelles qu'on peut effectuer sur ces objets. Nous commencerons par étudier l'anneau des séries formelles : sa structure et les opérations qu'on peut y effectuer puis nous mettrons en application ces séries en introduisant les séries génératrices et en mettant en avant leurs liens avec les fractions rationnelles. Et enfin nous aborderons une dernière application : leur rôle dans la résolution d'équations différentielles.

*Cadre :* $\mathbb{K}$ corps de caractéristique nulle

*Plan :*
I] Introduction aux séries formelles

1. Structure S-P + AF1
2. Opérations S-P + AF1

II] Séries génératrices et suites récurrentes

1. Séries génératrices S-P + OXEan2 (partition) + OXEalg1 (nbs de Bell) + COT (pr espérance et G-W)
2. Suites récurrentes linéaires S-P + AF1
   ( + Tchebychev + Fibonacci )

III] Équations différentielles dans $\mathbb{K}[[X]]$ S-P

1. Définition
2. Application (nbs de Catalan)

*Dvlpts :*
Partition d'un entier OXEan2
Nombres de Bell (modifié) OXEalg1 + S-P

*Remarques :*
- ne pas insister sur la définition des séries formelles via des suites. C'est juste un artifice formel. L'introduire puis passer à autre chose comme par exemple la topologie,
- dire que $\mathbb{K}[[X]]$ est analogue à $\mathbb{R}$ (voir que $\mathbb{K}[X]$ est analogue à $\mathbb{Z}$),
- point important à aborder : séries génératrices,
- peut-être éviter de parler d'anneau local si on n'est pas au point dessus,

– attention à ne pas basculer sur les séries entières,
– en dvlpt, pourquoi pas proposer les carrés (cf question 4)) ou cubes,...,
– question 2) : à savoir faire rapidement et sans hésitation ! !
– savoir montrer qu'il y a autant de façons d'écrire un entier comme somme d'impairs que comme somme d'entiers (cf Wilf),
– pour cette leçon : cf Generating functionology, Wilf (plein d'exos).

*Questions :*

1) $\mathbb{K}[[X]]$ est-il noethérien ?

2) Combien y a-t-il de façons d'écrire 5 en somme d'entiers ?

3) formule générale pour $\mathcal{P} = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n X^n$ ?

4) Quelles sont les séries formelles $F = \sum f_i X^i$ qui sont des carrés ?

*Réponses :*

1) Oui car principal

2) On regarde le coeff de $X^5$ dans

$$\left(\sum_{x\in\mathbb{N}} X^{5x}\right)\left(\sum_{x\in\mathbb{N}} X^{4x}\right)\left(\sum_{x\in\mathbb{N}} X^{3x}\right)\left(\sum_{x\in\mathbb{N}} X^{2x}\right)\left(\sum_{x\in\mathbb{N}} X^{x}\right).$$

On peut regarder modulo $X^6$ puis (calculer) et la réponse est 7.

3) un produit infini ?

4) condition nécessaire : la valuation de $F$ est paire et $f_{\nu(F)}$ est un carré dans $\mathbb{K}$. En fait c'est suffisant :
si $S = a^2X^{2n_0} + X^{2n_0+1}B$ ($B \in \mathbb{K}[[X]]$) alors $S = a^2X^{2n_0}(1 + XB)$ et il reste juste à montrer que les séries formelles commençant par 1 sont des carrés.
Commencer par montrer le lemme de Hensel :
Soit $P \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ tq $\exists a \in \mathbb{K}\ :\ P(a) \equiv 0[X]$ et $P'(a) \not\equiv 0[X]$. Alors $\exists F \in \mathbb{K}[[X]]$ tq $P(F) = 0$. démo : méthode de Newton sur séries formelles.
Enfin on applique le lemme avec $P = Y^2 - S$, où $S \in \mathbb{K}[[X]]$ tq $\nu(B) = 0$ et $B_0 = 1$.

## 1.15 125. Extensions de corps. Exemples et applications.

*Plan :* Tout ds le TAU (+un peu GOZ pour qlqs exemples)

I] Corps et extensions de corps

1. Définitions et premières propriétés
2. Corps finis
3. Extensions algébriques

II] Adjonction de racines

1. Corps de rupture
2. Corps de décomposition
3. Clôture algébrique
4. Irréductibilité de polyômes

III] Construction à la règle et au compas

*Dvlpts :*

Automorphismes de $\mathbb{K}[X]$ SZP

Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$ F-G

*Remarques :*

– pourquoi pas parler de norme et de trace,
– pour élever le niveau : groupe de Galois, élément primitif, extension cyclique, extension de corps fini (et tests de primalité), extensions cyclotomiques, extension d'Artin-Schreider,
– cf Lang.

*Questions :*

1) ( $\mathbb{K}$ corps infini ) $\Rightarrow$ (car($\mathbb{K}$)=0) : vrai ou faux ?

2) (car($\mathbb{K}$)=0) $\Rightarrow$ ( $\mathbb{K}$ corps infini ) : vrai ou faux ?

3) Donner les sous-corps de $\mathbb{F}_{64}$.

4) Connaît-on les extensions finies d'un corps donné ?

5) Comment construire $\mathbb{F}_{p^n}$ ?

6) Le théorème de Gauss-Wantzel donne-t-il une méthode de construction ?

7) Donner un exemple concret de corps de rupture.

8) Pour un corps infini quelconque et $d \in \mathbb{N}^*$, peut-on trouver une extension de degré $d$ ?

9) idée de la preuve pour montrer que $\{x \in L \mid x \text{ est algébrique sur } \mathbb{K}\}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ ? (où $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ sont des corps)

10) Si $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{M}$ (où les deux inclusions sont des extensions algébriques) alors $\mathbb{M}$ est-il une extension algébrique de $\mathbb{L}$ ?

11) Exemple d'une extension de degré infini ?

12) Comment construire le polygone si $\cos(\frac{2\pi}{n})$ ?

13) Trouver un $\mathbb{R}$-automorphisme de $\mathbb{C}$.

14) Combien y a-t-il d'éléments d'ordre 2 sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ ?

15) Soient $\mathbb{K}$ un corps tel que $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$ et $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$ de degré fini. Décrire les morphismes de corps $\mathbb{L} \longrightarrow \overline{\mathbb{K}}$ $\mathbb{K}$-linéaires.

16) Appelons ces morphismes $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (ce sont les *prolongements*).
Soit $x \in \mathbb{L}$. Montrer que $S_x := \sum_{k=1}^{n} \varphi_i(x) \in \mathbb{K}$.

17) Relier $\det(\psi_x)$ aux $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

18) Montrer que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{K}}$.

19) Soient $x, y \in \mathbb{L}$. On note $\mathrm{tr}(x) := \mathrm{tr}(\psi_x)$. Que pensez-vous de $(x, y) \longmapsto \mathrm{tr}(xy)$ ?

20) Montrer que c'est une forme non dégénérée sur $\mathbb{L}$.

*Réponses :*

1) faux : $\mathbb{F}_p[X]$

2) vrai : car $\mathbb{Q}$ s'injecte dans un tel corps

3) regarder avec les degrés : on a $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_4$ et $\mathbb{F}_8$.

5) corps de décomposition de $X^{p^n} - X$, ou encore : quotienter $\mathbb{F}_p$ par un polynôme irréductible de degré $n$

6) Non mais le lemme suivant oui : pour $m, n \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux alors on a : ($\mathcal{P}(mn)$ constructible) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{P}(m)$ et $\mathcal{P}(n)$ constructibles). exemple : d'après Bézout : $\exists u, v$ tels que $um + vn = 1$ et alors $\dfrac{2\pi}{mn} = \dfrac{2\pi}{n}u + \dfrac{2\pi}{m}v$

7) $\mathbb{C}$ pour $X^2 + 1$

8) Sur $\mathbb{Q}$ : $\mathbb{Q}[X]/(X^d - 2)$.
Sur $\mathbb{C}$ : non car il est algébriquement clos
Sur $\mathbb{R}$ : ?
Cas général : ?

11) $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$-ev

13) $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array} \right.$.

14) Un seul.

15) Soit $\varphi$ un tel morphisme. D'après le théorème de l'élément primitif, il existe $\alpha \in \mathbb{L}$ tel que $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\alpha]$. $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$ avec $P$ irréductible et $\deg(P) = [\mathbb{L} : \mathbb{K}]$. Alors : $P(\varphi(\alpha)) = \varphi(P(\alpha)) = 0$. Or, comme $P$ est irréductible, il admet $n$ racines.

16) Pour $x \in \mathbb{L}$, posons $\psi_x : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{L} & \longrightarrow & \mathbb{L} \\ y & \longmapsto & xy \end{array} \right.$. $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $x = Q(\alpha)$. Alors : $\psi_x(y) = xy = Q(\alpha)y = Q(\psi_\alpha)(y)$ et ainsi $\mathrm{sp}(\psi_x) = Q(\mathrm{sp}(\psi_\alpha)) = Q(\{\varphi_1(\alpha), \ldots, \varphi_n(\alpha)\})$. D'où : $\mathrm{tr}(\psi_x) = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{sp}(\psi_\alpha)} Q(\lambda) = \sum Q(\varphi_i(\alpha)) = \sum \varphi_i(Q(\alpha)) = S_x$.

17) *indice :* Vandermonde est ton ami.

18) $\mathbb{K}$-bilinéaire

19) $\mathrm{tr}(xy) = \sum \varphi_i(xy) = \sum \varphi_i(x)\varphi_i(y)$, or $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est libre.

## 1.16 126. Exemples d'équations diophantiennes.

*Intro :* laïus sur Diophante d'Alexandrie

*Plan :*

I] Introduction aux équations diophantiennes

1. Définition et théorème fondamental HIN
2. L'équation $ax + by = c$ HUN
3. Équations du premier degré à $n$ variables HUN + COH

II] Équations diophantiennes polynomiales de degré supérieur

1. Méthode de la descente infinie HEL
2. Réduction modulo $n$ HEL
3. Paramétrisation rationnelle COM
4. Utilisation des corps quadratiques DUV
5. Utilisation des réseaux STE

III] Autres types d'équations diophantiennes

1. Équations modulaires ? ? ?
2. Équations polynomiales SIE

*Dvlpts :*

Équation de Fermat n=3 DUV

Théorème des deux carrés PER

*Remarque :*

– faire des dessins pour les matrices.

*Questions :*

1) Lors de la résolution d'une équation dans un anneau euclidien, est-ce le critère euclidien qui sert ?

2) Idée de la démonstration du grand théorème de Fermat ?

3) $-1$ est-il un carré modulo 5 ?

4) Calculer $\left(\frac{-1}{5}\right)$.

5) À $c \in \mathbb{Z}$ fixé, l'équation $7x + 11y = c$ admet-elle des solutions dans $\mathbb{Z}$ ?

6) Quel est le plus grand $c \in \mathbb{Z}$ tel que $7x + 11y = c$ n'admette pas de solution dans $\mathbb{N}$ ?

7) Quand $2^n - 1$ est-il un carré ?

8) Même question pour $2^n + 1$.

9) Décrire les solutions de $x^2 + 2y^2 = 3z^2$.

10) Quand est-ce qu'une puissance de 2 et une puissance de 3 forment deux nombres consécutifs ?

*Réponses :*

1) Non, c'est la factorialité qui est utile.

2) Courbes elliptiques

3) Oui

4) $\left(\dfrac{-1}{5}\right) = (-1)^{(5-1)/2} = 1$

5) Oui car $\operatorname{pgcd}(7, 11) = 1$ divise $c$.

6) À $c$ fixé, trouver les solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, puis dans $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, et enfin dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Regarder alors le signe de $x + y$ et de $xy$.

7) $n = 0$ ou $1$ : ok. Pour $n \geq 2$, réduire modulo 4.

8) Réduire modulo 3 pour $n$ pair. Réduire modulo 5 pour $n$ impair ?
Autre méthode : se placer dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$,
$2^{2p+1} + 1 = N(1 + i2^p\sqrt{2}) = (1 + i2^p\sqrt{2})(1 - i2^p\sqrt{2})$

## 1.17 140. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

*Cadre :* $\mathbb{K}$ un corps commutatif

*Plan :* + un peu SZP pour des applications et méthodes de décomposition
I] Introduction aux fractions rationnelles

1. Construction du corps $\mathbb{K}(X)$ AF1 + TAUV (+SZP pr dvlpt)
2. Racines et pôles TAUV

II] Décomposition

1. Théorèmes de décomposition AF1 + TAUV
2. Résidus TAUV

III] Calcul différentiel

1. Dérivation TAUV + AF1
2. Intégration : un exemple TAUV

IV] Applications

1. Lien avec les séries formelles AF1 + SZP (+ OXEan2 pr dvlpt)
2. Géométrie : paramétrisation rationnelle COM

*Dvlpts :*
Automorphismes de $\mathbb{K}(X)$ SZP
Partitions d'un entier en parts fixées OXEan2

*Remarques :*
- on peut parler des paramétrisations rationnelles de courbes,
- pour élever le niveau : cf *Lang* avec extensions transcendantes (mais c'est du costaud !).

*Questions :*

1) Décomposer en éléments simples :

$$\frac{X^2}{X^4 - X^3 - X + 1}.$$

2) Existe-t-il $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\dfrac{1}{X} = \left(\dfrac{P}{Q}\right)'$ ?

3) Trouver les $x, y \in \mathbb{Q}$ tels que $x^2 + 2y^2 = 6$.

4) Pourquoi $\mathbb{K}(X)$ n'est jamais algébriquement clos ?

5) Soient $k$ un corps et $\mathbb{K}$ une extension de $k$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et supposons que $k[\alpha]$ n'est pas un corps. Montrer que le plus petit sous-corps de $\mathbb{K}$ qui contient $k$ et $\alpha$ (qu'on note $k(\alpha)$) est isomorphe à $k(X)$.

6) (Question figurant dans le rapport du jury 2013) À quelle condition une série formelle est-elle le développement d'une fraction rationnelle ?

*Réponses :*

1) $X^4 - X^3 - X + 1 = (X-1)^2(X-j)(X-\overline{j})$ + méthode de multiplication-remplacement. ou une méthode avec des séries formelles qui serait paraît-il plus efficace...(à trouver !)

2) Non sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (question de résidus)
Non sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ : avec une série formelle :

$$\frac{1}{X} = \left(\frac{P}{Q}\right)' = \sum_{n \geq -k}^{+\infty} n a_n X^{n-1} \text{ et alors } 0a_0 = 1$$

3) penser : droites à pente rationnelle. s'apercevoir que $(2,1)$ est sur l'ellipse considérée, puis noter qu'à tout couple rationnel $(x,y)$ on peut associer une droite de pente rationnelle passant par $(2,1)$ et $(x,y)$. calculer, exhiber les valeurs de $x$ et $y$ et ne pas oublier $(2,-1)$ (avec la droite de pente infinie)

4) S'il l'était alors il existerait $F \in \mathbb{K}(X)$ tel que $F^2 = X$, ce qui est absurde en considérant le degré.

5) *indice :* montrer déjà que $\alpha$ est transcendant sur $k$.
Puis montrer que l'image de $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} k(X) & \longrightarrow & k(\alpha) \\ F & \longmapsto & F(\alpha) \end{array} \right.$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$ qui contient $k$ et $\alpha$. Et enfin montrer que $\varphi$ est injective.

## 1.18 141. Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

*Plan :* $A$ un anneau factoriel unitaire, $\mathbb{K}$ un corps commutatif

I] Polynômes irréductibles

1. Définition et premiers exemples PER + GOU
2. Critères d'irréductibilité GOZ
3. Exemple : polynômes cyclotomiques GOU
4. Application : éléments algébriques GOZ

II] Adjonction de racines GOZ

1. Corps de rupture d'un polynôme
2. Corps de décomposition
3. Clôture algébrique

III] Cas des corps finis

1. Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$ GOZ (+F-G pr dvlpt)
2. Algorithme de factorisation Berlekamp OBJ

*Dvlpts :*
Irréductibilité des polynômes cyclotomiques GOU
polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$ F-G

*Remarques :*

- insister sur la différence fondamentale entre corps de rupture et corps de décomposition : si $L$ et $L'$ sont deux corps de rupture alors il existe un isomorphisme canonique entre ces deux corps. Alors que deux corps de décomposition ne sont pas isomorphes canoniquement (ce qui entraîne la théorie de Galois, sinon elle n'existerait pas !),
- critère d'irréductibilité efficace :
  $P \in \mathbb{F}_q[X],\ d := \deg(P)$,
  $P$ irréductible $\Leftrightarrow P \mid X^{q^d} - X$ et $\mathrm{pgcd}(P, X^{q^{\frac{d}{r}}} - X) = 1$, $\forall r$ premier tel que $r | d$,
- parler des polynômes cyclotomiques,
- maîtriser les algorithmes présentés et savoir les mettre en pratique rapidement.

*Questions :*

1) Y a-t-il des extensions dans lesquelles le théorème de l'élément primitif n'est pas vrai ?

2) Factoriser $X^4+1$ dans $\mathbb{F}_7[X]$ grâce à l'algorithme de Berlekamp.

3) Si $\mathbb{L}$ est un corps de rupture de $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible alors $\mathbb{L}$ contient $\alpha$ une racine de $P$. Question : $\alpha$ est-elle racine simple ?

4) Soient un corps $\mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible et de degré $l$ et $\mathbb{L}$ une extension finie de $\mathbb{K}$ de degré $d$. Montrer que si $\text{pgcd}(l,d) = 1$ alors $P$ est irréductible dans $\mathbb{L}[X]$.

*Réponses :*

1) $\mathbb{F}_p(T^{\frac{1}{p}}, U^{\frac{1}{p}})$ extension de $\mathbb{F}_p(T,U)$ de degré $p^2$, et le théorème serait faux si on avait une extension de degré $p$.

2) $X^4+1 = (X^2+3X+1)(X^2-3X+1)$

3) Oui en caractéristique nulle (regarder le pgcd de $P$ et $P'$)
Non sinon, contre-exemple : dans $\mathbb{F}_p(T)[X]$, $X^p + T = (X + T^{\frac{1}{p}})^p$

## 1.19 142. Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications

*Cadre :* $A$ anneau commutatif non nul, $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$

*Plan :* SZP

I] L'algèbre $A[X_1, \ldots, X_n]$

1. Construction
2. Degré
3. Substitutions
4. Propriétés
5. Polynômes homogènes

II] Polynômes symétriques

1. Définition
2. Propriétés
3. Application : relations coefficients-racines + C-G

III] Résultant et applications

1. Résultant
2. Discriminant
3. Théorème de Bézout

IV] Mise en situation : formes quadratiques

1. Définition et classification PAZ
2. Application : comptage de racines C-G

*Dvlpts :*

Théorème de kronecker SZP
Formes de Hankel C-G

*Remarques :*

– éviter de mettre $n \geq 2$ au début du plan, car beaucoup de démonstrations se font par récurrence sur $n$ en commençant par $n = 1$,
– c'est une leçon 'classique', donc pour se démarquer il faut élever le niveau et utiliser des notions décrites ci-après,
– on peut rajouter : application de la factorialité, calcul de Vandermonde et déterminant de Cauchy ; polynômes invariants sous $\mathcal{A}_n$ : $\mathbb{K}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n, V_n]$ (cf Szpirglas ou Goblot) ; fonction polynôme associée sur un corps fini (Francinou-Gianella) ; $\mathbb{C}$ algébriquement clos par Lagrange (Samuel, TAN, p53) ; sommes de Newton $\sum X_i^k$,

- attention à la définition d'un polynôme homogène : on peut dire $P$ est homogène de deg $l$ lorsque $P(TX_1, \dots, TX_n) = T^l P(X_1, \dots, X_n)$,
- penser à l'identité d'Euler pour un polynôme homogène,
- application type de Chevalley-Warning : une quadrique projective sur un corps fini est non vide, ou encore : tout polynôme de degré supérieur à 3 à coefficient dans $\mathbb{F}_q$ possède un zéro,
- savoir décomposer en polynômes symétriques élémentaires (et savoir reconnaître un polynôme symétrique élémentaire quand on en croise un).

*Questions :*

1) Que représente le poids d'un polynôme ? Et pourquoi ne pas le définir autrement ?

2) À quoi sert le théorème de structure ?

3) Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, montrer que : $(X - \alpha | P) \Leftrightarrow P(\alpha) = 0$.

4) Que dire de $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que pour $\alpha \in \mathbb{C}$ : $P(\alpha) = 0 \Rightarrow |\alpha| < 1$ ?

5) Illustrer l'algorithme du théorème de structure sur $X^3Y \in \mathbb{Z}[X]$.

7) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \ : \ A = PBP^{-1}$. On écrit $P = U + iV$, avec $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :
- $\forall t \in \mathbb{R} \ : \ A(U + tV) = (U + tV)B$,
- $\exists t \in \mathbb{R}$ tel que $U + tV \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$,
- $A$ et $B$ sont semblables dans $\mathbb{R}$.

*Réponses :*

1) en fait pas à grand chose

3) division euclidienne

4) théorème de Kronecker : $P = X^k$, pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

5) on a le symétrise $P = X^3Y + X^3Z + XY^3 + XZ^3 + Y^3Z + YZ^3$, d'où $k = (3, 1, 0)$ et $P_1 = P - \sigma_1^{3-1}\sigma_2^{1-0} = P - (X + Y + Z)^2(XY + XZ + YZ) = \dots$.

Ce n'est pas optimal, par exemple ici on a plus rapide en factorisant puis division euclidienne par $X^2 + Y^2 + Z^2$.

7) la réponse à la question 7) est la réponse à la question 7)

## 1.20 143. Résultant. Applications.

*Intro :* motivation cf SZP p563

*Cadre :* Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

*Plan :*

I] Introduction du résultant

1. Définition et intérêt SZP
2. Premières propriétés GOZ

II] Méthodes de calcul

1. Expression en fonction des racines SZP
2. Abaissement du degré S-P

III] Applications en algèbre SZP

1. Discriminant (+ PAZ pr intérêt)
2. Nombres algébriques
3. Transformation d'équations algébriques
4. Courbes algébriques

*Dvlpts :*

Résultant et application GOU
Théorème de Kronecker SZP

*Remarques :*

– le théorème de Kronecker est à la limite de la leçon,
– une clôture algébrique est toujours infinie,
– pour calculer un polynôme annulateur d'un élément, le résultant ça marche tout le temps mais ça peut être long à calculer.

*Questions :*

1) Qu'est-ce que la pseudo-division ?

2) En pratique ajuste-t-on $\alpha$ à chaque tour ?

3) Dans le théorème de la borne de Bézout, peut-on faire mieux que la majoration proposée ?

4) Dans le théorème de la borne de Bézout, la restriction à un corps $\mathbb{K}$ infini est-elle importante ?

5) Si $\alpha$ et $\beta$ annulent respectivement $P$ et $Q$ alors montrer que $R(X) := Res_Y(P(Y), Q(X-Y))$ est annulé par $\alpha+\beta$.

6) Montrer que $R(X) := Res_Y(P(Y), Q\left(\frac{X}{Y}\right)Y^{deg(Q)})$ est annulé par $\alpha\beta$.

7) Illustrer les deux questions précédentes avec $\alpha := \sqrt{5}$ et $\beta := \sqrt{7}$.

8) Donner une autre méthode pour trouver un polynôme annulateur de $\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

9) Existe-t-il des recettes magiques pour calculer le résultant plus efficacement qu'avec le déterminant ?

10) Savez-vous comment fait un ordi pour calculer un résultant ?

11) Trouver un polynôme minimal de $\sqrt{5}\sqrt{7}$ en bidouillant (ie : sans passer par le résultant)

12) Avec le résultant, de quel degré serait le polynôme annulateur obtenu ?

13) Soient $F, G \in \mathbb{K}(T)$. On considère la courbe paramétrée : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & F(t) \\ y & = & G(t) \end{array}\right.$. Montrer que cette courbe admet une équation cartésienne.

14) Illustrer avec $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t^2+t+1 \\ y & = & \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \end{array}\right.$.

15) Illustrer avec $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t^2 \\ y & = & t^3 \end{array}\right.$.

16) Dessiner la courbe d'équation $y^2 - x^3 = 0$.

17) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n$. Montrer :
$(\text{disc}(P) > 0) \Rightarrow (\text{nb de racines réelles de P} \equiv n\ [4])$.

18) Application du résultant en calcul différentiel ?

*Réponses :*

1) Par exemple dans $\mathbb{Z}[X]$ : pour diviser $P$ par $Q$ (polynômes de $\mathbb{Q}[X]$) on multiplie $P$ par $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que le coefficient dominant de $Q$ divise $\alpha$ multiplié par le coeff dominant de $P$. On peut prendre $\alpha :=$ (coeff dominant de $Q)^{deg(P)-deg(Q)+1}$. Cela permet d'éviter des calculs éventuellement plus coûteux dans $\mathbb{Q}$. $\alpha$ n'est pas forcément optimal.

2) difficile à dire

3) C'est une majoration a priori grossière mais en général la borne est atteinte.

4) a priori non car on peut raisonner dans la clôture algébrique de $\mathbb{K}$.

5) $\alpha$ est une racine commune de $P(Y)$ et de $Q(\alpha + \beta - Y)$ + propriété des résultants = résultat voulu
Et si $R = 0$ alors ... ?

6) idem

7) On a $P = X^2 - 5$ et $Q = X^2 - 7$ puis calculer le résultant..

8) partir de $X = \sqrt{5} + \sqrt{7}$, puis $(X - \sqrt{5})^2 = 7$, ensuite on développe le carré et regroupe les termes pour obtenir $-2\sqrt{5}X = 2 - X^2$ et $20X^2 = 4 + X^4 - 4X^2$.

9) l'algorithme d'Euclide

10) dérivé de l'algorithme d'Euclide ?

11) $X^2 - 35$ convient

12) probablement de degré 4

13) Si $F, G \in \mathbb{K}[T]$ alors $Res_T(X - F(T), Y - G(T)) = 0$ convient. (mais attention : on risque d'obtenir plus de points que voulu !!!) Si $F, G \notin \mathbb{K}[T]$ alors faire la même chose que précédemment en multipliant $F$ et $G$ par des polynômes bien choisis.

14) Poser $P(X, Y) := Res_T(T^2 + T + 1 - X, (1 - Y)T^2 - 1 - Y)$ puis calculer

et pleurer

15) équation cartésienne : $y^2 - x^3 = 0$.

16) on obtient une sorte de parabole tordue $y = \pm x\sqrt{x}$.

17) considérer $\beta_i$ et $\beta_j$ deux racines de $P$. On apparie, pour $i \neq j$, les $\beta_i - \beta_j$ avec les $\overline{\beta_i} - \overline{\beta_j}$ et les $\beta_i - \overline{\beta_j}$ avec les $\beta_j - \overline{\beta_j}$. Il reste les $\beta_i - \overline{\beta_i}$ et alors signe(disc($P$))=$(-1)^d$, où $2d$ :=nb de racines complexes de $P$.

## 1.21 144. Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

*Plan :*

I] Introduction aux racines de polynômes

1. Définition et premières propriétés GOU
2. Existence de racines et réductibilité PER

II] Calcul de racines

1. Intérêt : lien avec la réduction GOU
2. Des outils de calcul : résultant et discriminant SZP
3. Relations coefficients-racines SZP + C-G

III] Comptage de racines

1. Par l'algèbre (formes de Hankel) C-G
2. Par l'analyse réelle (suites de Sturm) OXEalg1 (+ TES)
3. Par l'analyse complexe (résidus + Rouché) OBJ + TES

*Dvlpts :*

Théorème de Kronecker SZP
Formes de Hankel C-G

*Remarque :*

– dire que l'isomorphisme entre les corps de rupture est canonique mais pas pour les corps de décomposition.

*Questions :*

1) Dans quels anneaux a-t-on nb racines $\leq$ degré polynôme ?

2) Y a-t-il des irréductibles dans $\mathbb{F}_q[X]$ ? ($q = p^n$, $p$ premier)

3) À quoi sert le théorème de Kronecker ?

4) Que connaissez-vous comme polynôme symétrique en les racines d'un polynôme $P$ donné ?

5) Montrer que $Q := \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)^2 \in \mathbb{K}$, où $P \in \mathbb{K}[X]$.
6) A-t-il quelque chose d'intéressant ce polynôme ?

7) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ irréductible et unitaire. Montrer qu'il existe un nombre fini de nombres premiers $q$ tels que ($P$ mod $q$) admet des racines multiples.

8) Que savez-vous sur la localisation de valeurs propres d'une matrice complexe ?

9) Trouver le nombre de racines réelles de $X^3 - X + 1$ en utilisant les suites de Sturm.

10) Démontrer : $(\forall k \geq 1,\ \mathrm{tr}(A^k) = 0) \Rightarrow (A$ nilpotente) en utilisant les sommes de Newton.

11) Pour $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, $p$ premier, $a \in \mathbb{K}$, $X^p - 1$ scindé sur $\mathbb{K}$, montrer que ($X^p - a$ réductible sur $\mathbb{K}$) $\Leftrightarrow$ ($X^p - a$ scindé sur $\mathbb{K}$).

*Réponses :*

1) anneaux intègres

2) Oui

3) il sert pour une des premières étapes du théorème des unités de Dirichlet (théorème qui décrit les inversibles dans un anneau d'entiers)

4) les sommes de Newton $S_k := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k$, où $\alpha_i$ racines de $P$. et il y en a d'autres

5) théorème de structure des polynômes symétriques

6) c'est le discriminant

7) $\mathrm{Res}(P, P') \in \mathbb{Z}$. ($P$ mod $q$) admet une racine multiple $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Res}(P, P') = 0$ mod $q \Leftrightarrow q \mid \mathrm{Res}(P, P')$.

8) Gersch-Görin : Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Alors :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \in \bigcup_j D_j,\ \text{où } D_j := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right\}$$

9) Il y en a une. Question supplémentaire : quel est le signe de la racine ?

10) cf Oraux X-ENs alg 1 ?

11) Si $P$ irréductible et divise $X^p - a$ alors considérer $L$ corps de rupture de $P$ puis magouiller avec les hypothèses et les degrés (cf cahier orange)

## 1.22 150. Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

*Intro :*reprendre 101 et modifier

*Plan :*

I] Multiplication à gauche C-G

1. Opérations élémentaires
2. Matrices échelonnées
3. Application : rang et systèmes linéaires

II] Équivalence C-G

1. Définition et invariant
2. Classes d'équivalence

III] Similitude C-G

1. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ par conjugaison
2. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ par conjugaison
3. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par conjugaison

IV] Congruence C-G

1. Définition
2. Invariants + PAZ (lien avec fq)
3. Orbites et stabilisateurs
4. Lien avec la réduction

V] $\mathcal{S}_n \curvearrowright \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ OBJ + OXEalg1

*Dvlpts :*

Diagrammes de Young C-G
Homéomorphisme $O(p,q) \overset{\sim}{=} O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ C-G

*Questions :*

1) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente, quand a-t-on :
$\dim(\ker(A^{i+1})) - \dim(\ker(A^i)) = \dim(\ker(A^i)) - \dim(\ker(A^{i-1}))$ ?

2) Montrer : ($GL_n(\mathbb{C})$-semblables ) $\Leftrightarrow$ ($GL_n(\mathbb{R})$-semblables )

3) Même question en remplaçant $\mathbb{R}$ par un corps $\mathbb{K}$ infini et $\mathbb{C}$ par une extension de corps de $\mathbb{K}$. *rép :*

4) Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer que son orbite pour l'action de conjugaison est fermée dans $GL_n(\mathbb{C})$.

*Réponses :*

3) voir la conjugaison comme la résolution d'un système linéaire ; dire qu'on caractérise les solutions d'un système linéaire avec le rang et conclure en utilisant le fait que le rang est invariant par extension de corps ; pourquoi ? c'est fait dans *ObjectifAgrégation* : c'est dû aux mineurs

4) c'est fait dans le Caldero-Germoni.

## 1.23 151. Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

*Intro :* Plusieurs structures mathématiques vérifient les mêmes propriétés (comme l'ensemble des matrices d'une taille donnée ou les solutions d'une équation différentielle linéaire) ; structure qu'on nommera espace vectoriel. On étudie alors la structure en elle-même et les résultats concrets qu'on peut en déduire en utilisant les notions de dimension et de rang qui sont des outils fondamentaux pour l'étude des espaces vectoriels et trouvent des applications notamment en théorie des corps et en réduction (avec des démontrations par récurrence sur la dimension). On commencera par s'intéresser à la dimension et certaines de ses applications, avant d'étudier le rang et les différents résultats qu'il permet de mettre en exergue, et enfin nous nous pencherons vers une mise en situation de la notion de dimension : les extensions de corps.

*Cadre :* $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (qu'on notera ev)

*Plan :*
I] Théorie de la dimension OBJ + GOU

1. Définition
2. Théorèmes fondamentaux
3. Utilisation en réduction (raisonnement par réc) GOU (+C-G pr dvlpt)

II] Rang et théorème du rang

1. Définition et théorème du rang GOU+ OBJ + C-G
2. Caractéristiques et calcul du rang GOU
3. Formes linéaires GOU ( + C-G)

III] Applications

1. Extensions de corps et dimension GOZ (+SZP pr dvlpt)
2. Classification des formes quadratiques PAZ

pour toute la leçon : + des bouts ds OBJ et GOU ; + GRI ? + HAU pr contrex

*Dvlpts :*
Automorphismes de $\mathbb{K}[X]$ SZP
Diagrammes de Young C-G

*Remarques :*

– en développement : pourquoi pas parler de réduction ou du déterminant,
– dire que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\dim E = \dim F$ alors pour montrer que $f$ est un isomorphisme il n'y a qu'une chose à faire (surjection ou injection). Le dire et l'illustrer car c'est un outil fréquemment utilisé,
– en développement : automorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui stabilisent $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (cf OXEalg1).

### 1.24 152. Déterminant. Exemples et applications.

*Plan :*

I] Le déterminant GOU (+OBJ)

1. Définition et premières propriétés
2. Méthodes de calcul

II] Le déterminant en algèbre et géométrie

1. Inversion de matrices et groupe linéaire GOU
2. Résolution de systèmes de Cramer GOU
3. Polynômes et résultant GOU
4. Volume OBJ
5. (si place : distance et/ou orientation) GRI

III] Applications en analyse

1. Wronskien GOU anal
2. Changements de variables OBJ
3. Des résultats de densité GOU anal

*Dvlpts :*

Théorème de Kronecker SZP
Résultant et application GOU

*Remarques :*

– attention à ne pas être trop énumératif,
– placer la première question en remarque dans le plan.

*Questions :*

1) Une forme $n$-linéaire antisymétrique est-elle alternée ?

2) À quoi sert l'inégalité de Hadamard (à part majorer le déterminant) ? (penser à l'algorithmique)

3) Quelle est l'interprétation géométrique du déterminant de Gram ?

4) Quelle est l'interprétation géométrique du déterminant ?

5) Si on applique le théorème de Cayley-Menger à trois points alors qu'obtient-on ?

6) Est-on obligé de passer par une base de $E$ pour définir le déterminant de $u \in \mathcal{L}(E)$ ?

7) Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}({}^tM)$.

8) Soit $\theta$ un nombre algébrique. On dit que $\theta$ est un entier algébrique lorsqu'il existe un polynôme annulateur à coefficients entiers unitaires. Montrer :
$\theta$ est un entier algébrique $\Leftrightarrow \mathbb{Z}[\theta]$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini.

9) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Posons $M_0 := M$, $c_0 := 1$ et notons $M_0 = (a^0_{i,j})_{i,j}$. Posons ensuite $a^k_{i,j} := \dfrac{1}{c_{k-1}} \begin{vmatrix} a^{k-1}_{k,k} & a^{k-1}_{k,j} \\ a^{k-1}_{i,k} & a^{k-1}_{i,j} \end{vmatrix}$, $M_k := (a^k_{i,j})_{k+1 \leq i,j \leq n}$ et $c_k := a^{k-1}_{k,k}$. Montrer que $\det(M_k) = c_k^{n-k-1} \det(M_0)$.

*Réponses :*

1) Oui si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$. Si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 2$ alors non car dans ce cas toutes les formes sont antisymétriques.

2) Une application permet d'éviter le pivot de Gauss (calculs lourds) pour les calculs de déterminants de matrices d'entiers et permet de se placer sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p$ premier suffisamment grand choisi en fonction de la borne de Hadamard.

3) $G(\dots) = (\text{volume} \dots)^2$

4) $|\det(u,v)|$ =volume du parallélogramme engendré par $u$ et $v$.

5) Un triangle et la formule de Héron

6) L'ensemble des formes $n$-linéaires alternées est un espace vectoriel de dimension 1, notons $d$ un générateur de cet ensemble. Posons $\varphi \ : \left\{ \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & E^n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (u(x_1), \dots, u(x_n)) \end{array} \right.$.
Alors $d \circ \varphi$ est une forme $n$-linéaire alternée et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $d \circ \varphi = \lambda d$.
Enfin : $\det(u) = \lambda$.

7) Avec les mineurs ?

8) ($\Rightarrow$) ok avec une récurrence
($\Leftarrow$) Si $(e_1, \ldots, e_n)$ engendre $\mathbb{Z}[\theta]$ alors $\forall j \ : \ \theta e_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{j,i} e_i$. Posons $A := \left(a_{j,i}\right)_{i,j}$. Alors $\theta$ est valeur propre de $A$ donc $\chi_A(\theta) = 0$.

9) faire l'analogie avec le pivot de Gauss. (Cet algorithme s'appelle l'*algorithme de Gauss-Bareiss* et permet d'éviter l'explosion des coefficients entiers lors des calculs)

## 1.25 153. Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

*Intro :* GRI+OBJ : En physique et en mécanique, on cherche à déterminer le repère dans lequel le problème a la forme la plus simple possible. Avec les matrices, on cherche à faire la même chose : on cherche une base de l'espace dans laquelle la forme de la matrice est la plus simple possible, autrement dit là où la matrice a le plus de zéros possibles. D'où l'intérêt de la réduction qui consiste à chercher une décomposition de l'espace de base en somme de sous-espaces sur lesquels l'endomorphisme considéré est plus simple à étudier. Pour ce faire, nous utiliserons la notion de polynômes d'endomorphisme qui amène à des conditions satisfaisantes de réduction.

*Cadre :* $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $E$ un $\mathbb{K}$-ev

*Plan :*

I] Polynômes d'endomorphisme OBJ

1. Définition et structure de $\mathbb{K}[u]$
2. Polynôme caractéristique

II] Réduction GOU+GRI

1. Diagonalisation et trigonalisation
2. Décomposition de Dunford
3. Décomposition de Jordan C-G
4. Décomposition de Frobenius C-G

III] Applications

1. Exponentielle de matrice M-T (+C-G)
2. Projection sur les sous-espaces caractéristiques OBJ + GOU anal

*Dvlpts :*

Diagrammes de Young C-G
Sous-algèbres réduites MNE

*Questions :*

1) Donner un exemple de groupe infini et d'exposant fini.

2) En dimension infinie, donner un exemple d'un endomorphisme qui n'admet pas de polynôme minimal.

3) En dimension infinie, peut-on avoir un idéal annulateur nul ?

4) Pour $M \in \mathbb{M}_n(G)$ tel que $M^2 = -I_n$, calculer $\exp(M)$.

5) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} = A + B$. On cherche $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tels que $\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B \neq \mathrm{e}^{A+B}$ et $AB \neq BA$.

6) Montrer que $R_t := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ est semblable à $R_{-t}$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

*Réponses :*

1) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$

2) la dérivation dans $\mathbb{R}[X]$

3) Non, penser à $(I_d, u, \ldots, u^{n^2})$.

4) Indice : partir d'un polynôme annulateur.

## 1.26 154. Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

*Intro :* on aime bien les sous-espaces stables pour la réduction

*Plan :*

I] Définitions et propriétés

1. Définition et endomorphisme induit OBJ
2. Des exemples de sous-espaces stables OBJ
3. Dualité et adjoint GOU + OBJ

II] Recherche de sous-espaces stables

1. Droites stables [have you seen my reference ?]
2. Recherche par l'exemple : OBJ p196 exo
3. Endomorphismes normaux GOU

III] Réduction d'endomorphismes

1. Lemme des noyaux et Cayley-Hamilton OBJ
2. Diagonalisation GOU + OBJ (+ MNE pr ss-alg réduites)
3. Trigonalisation GOU + OBJ
4. Réduction de Dunford GOU
5. Réduction de Jordan C-G
6. Réduction de Frobenius GOU

IV] Représentations COL + PEY

*Dvlpts :*

Sous-algèbres réduites MNE
Diagrammes de Young C-G

## 1.27 155. Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

*Intro :*cf Hiriart-Urruty

*Plan :*
I] Éléments propres et polynômes d'endomorphismes

1. Vecteurs et valeurs propres GOU
2. Polynômes d'endomorphismes et idéal annulateur AF1 + GOU + OBJ
3. Polynôme caractéristique GOU

II] Diagonalisabilité

1. Définition et caractérisation GOU (+OXEalg2 pr dvlpt)
2. Aspects topologiques OBJ
3. Diagonalisation simultanée GOU (+MNE pr dvlpt)

III] Applications GOU

1. Décomposition de Dunford
2. Théorèmes spectraux
3. Réduction des endomorphismes normaux

*Dvlpts :*
Théorème de Burnside OXEalg2
Sous-algèbres réduites MNE

*Remarque :* les endomorphismes $D$ tels que $\overline{D}$ est diagonalisable sont les endomorphismes *semi-simples*.

*Questions :*

1) Pour la co-trigonalisabilité, pourquoi a-t-on besoin de la commutativité ?

2) Soient $A, B \in \mathcal{A}$ (sous-algèbre de $M_n(\mathbb{K})$) tels que $B$ est un projecteur et $A$ et $B$ non co-diagonalisables. Fabriquer $N \in Vect(A, B)$ ($N \neq 0$) tel que $N$ est nilpotent.

3) Dans une algèbre quelconque, est-ce que tout élément a un polynôme minimal de degré au plus $\sqrt{\dim(\text{alg})}$ ?

4) Citer des résultats qui valent pour toutes les matrices et qui pour être démontrés font appel à des matrices diagonales.

5) S'il existe $k$ tel que $A^k$ est diagonalisable alors est-ce que $A$ est diagonalisable ?

6) Trouver $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A$ n'est pas diagonalisable et $P(A)$ est diagonalisable.

7) Caractériser tous les $P \in \mathbb{K}[X]$ de la question 6).

*Réponses :*

2) $BAB - BA$ ou $BAB - AB$.

3) Non : penser à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $i$.

5) Non pas forcément : matrices nilpotentes.

6) $A = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

7) $P$ tels que $P'(\lambda) = 0$.

## 1.28 156. Exponentielle de matrices. Applications.

*Cadre :* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

*Plan :*

I] Définition et calcul

1. Définition et premières propriétés GOU + M-T
2. Calcul et réduction GOU + OBJ +

II] Propriétés de la fonction exponentielle

1. Injectivité et surjectivité OBJ + OXEalg2
2. Différentiabilité et inversion locale M-T + ROU
3. Homéomorphismes C-G + OBJ

III] Équations différentielles linéaires à coefficients constants DEM

*Dvlpts :*

Homéomorphisme exp : $\mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}$ C-G
Homéomorphisme $O(p,q) \overset{\sim}{=} O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ C-G

*Questions :*

1) Pourquoi peut-on bien définir l'exponentielle avec une série ?

2) Pourquoi n'a-t-on pas toujours $(\mathrm{e}^{X(t)})' = X'(t)\mathrm{e}^{X(t)}$ ?

3) $A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(\exp)$ ? (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

4) $A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(\exp)$ ? (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

5) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(\exp)$ ? (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

6) Démontrer que l'exponentielle réalise un homéomorphisme entre les matrices nilpotentes et les matrices unipotentes.

7) $\exp(M)$ est un polynôme en $M$, pourquoi ?

8) Qu'est-ce qu'un sous-groupe arbitrairement petit ?

9) Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{tM} \end{array} \right.$. Quand est-ce que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est fermé ?

*Réponses :*

1) Pour $||.||$ une norme d'algèbre, on a : $\left|\left|\dfrac{A^k}{k!}\right|\right| \leq \dfrac{||A||^k}{k!}$ : terme général d'une série convergente.

2) Parce qu'ils faut que $X(t)$ et $X'(t)$ commutent.

3) Non car $\det(A) < 0$.

4) Si $A = B^2$ (avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) alors $\mathrm{sp}(B)=\{i,-i\}$ (par conjugaison des valeurs propres d'une matrice réelle). Alors $B$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ puis $B^2$ est équivalente à $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ : absurde !

5) (soit dit en passant : la matrice considérée est une matrice classique de la leçon exponentielle) Oui d'après une condition portant sur les tableaux de Young qui se trouve dans MNE. Mais il est possible de faire autrement : considérons $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ z = a + ib & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{array} \right.$ : c'est le morphisme d'algèbre de Banach, morphisme utile pour diagonaliser et s'étend à $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Puis : $\exists B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, d'où :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \varphi(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}) = \varphi(B^2) = \varphi(B)^2.$$

6) Considérer $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ N & \longmapsto & \mathrm{e}^N - I_n \end{array} \right.$ et $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ N & \longmapsto & \log(N + I_n) \end{array} \right.$.

7) $\mathbb{C}[M]$ est un espace vectoriel de dimension finie donc il est fermé.

8) C'est une histoire de voisinages.

9) Pour $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, c'est fermé. Mais on peut également trouver des cas

pour lesquels ça ne marche pas.

## 1.29 157. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

*Intro :* En physique et en mécanique, on cherche à déterminer le repère dans lequel le problème a la forme la plus simple possible. Avec les matrices, on cherche à faire la même chose : on cherche une base de l'espace dans laquelle la forme de la matrice est la plus simple possible, autrement dit là où la matrice a le plus de zéros possibles. GRI, puis expliciter le lien entre trigonalisable et nilpotent

*Plan :*
I] Endomorphismes trigonalisables GOU + GRI + OBJ

1. Polynômes d'endomorphismes
2. Sous-espaces stables et trigonalisation simultanée
3. Sous-espaces caractéristiques

II] Endomorphismes nilpotents OBJ

1. Définition + GOU
2. Caractérisation de la nilpotence
3. Unipotents

III] Réduction

1. Décomposition de Dunford GOU
2. Réduction de Jordan C-G

*Dvlpts :*
Théorème de Burnside OXEalg2
Diagrammes de Young C-G

*Remarques :*
– il faut parler de réduction de Jordan et des noyaux itérés,
– attention aux applications de Dunford (car souvent la décomp de Dunford d'une matrice est elle-même),
– avoir un résultat de classification sur les endomorphismes nilpotentes avec Jordan en explicitant les blocs (cf GRI) (ne pas se contenter de dire qu'il y a des zéros et des uns au-dessus de la diagonale),
– pourquoi pas parler des diagrammes de Young : cf C-G ou MNE,
– ne pas négliger la partie nilpotence par rapport à la partie trigonalisable,
– pour des caractéristiques de la nilpotence : cf MNE.

*Questions :*

1) Pourquoi relier les notions de trigonalisabilité et de nilpotence dans une même leçon ?

*Réponses :*

1) Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, toute matrice est semblable à une réduite de Jordan et cette dernière est une matrice triangulaire qui s'obtient à partir des matrices nilpotentes.

## 1.30 158. Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

*Plan :*

I] Définitions GOU

1. Matrices symétriques
2. Matrices hermitiennes

II] Réduction GOU

1. Lien avec les applications linéaires
2. Théorème spectral

III] Lien avec les formes quadratiques PAZ

1. Préambule
2. Formes quadratiques symétriques
3. Formes quadratiques hermitiennes
4. Application aux coniques AUD

IV] Étude topologique C-G (+M-T)

1. Propriétés
2. Décomposition
3. Exponentielle

V] Applications en analyse GOUanal

1. Hessienne
2. Lemme de Morse

*Dvlpts :*

Homéomorphisme exp : $\mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}$ C-G
Homéomorphisme $O(p,q) \cong O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ C-G

## 1.31 159. Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

*Plan :*

I] Formes linéaires et hyperplans GOU

1. Formes linéaires
2. Lien avec les formes quadratiques C-G (exo p187 + formes de Hankel)
3. Hyperplans

II] Dualité GOU

1. Bases duales et antéduales
2. Bidual

III] Orthogonalité et application transposée GOU

1. Orthogonalité
2. Application transposée

IV] Générateurs de matrices PER

1. Définitions
2. Théorèmes

*Dvlpts :*

Formes de Hankel C-G
Théorème des extrema liés GOUanal

*Remarques :*

– savoir relier figures géométriques, formes linéaires et produit scalaire (exemple : plan $2x + y + 3z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$),
– insister sur les liens entre la leçon et les développements choisis,
– connaître la démonstration du théorème de Hahn-Banach.

*Questions :*

1) Démontrer qu'une forme linéaire est soit nulle soit surjective.

2) On a $F$ sev de $E$ tel que $\forall \varphi \in E^* : \varphi \neq 0$ ou $\varphi_{|F}$ surjective. Déterminer $F$.

3) Pourquoi $E$ et $E^*$ ne sont pas canoniquement isomorphes ?

4) Pour $P = \sum a_k X^k$, $a_k = ?$

5) Pour $(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, on pose $\varphi_{x_i}:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ P & \longmapsto & P(x_i)\end{array}$. Donner la base antéduale de $(\varphi_{x_0},\dots,\varphi_{x_n})$.

6) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\ker(M\mapsto \mathrm{tr}(AM))$.

7) Pourquoi $\mathrm{sp}(A)$=$\mathrm{sp}({}^TA)$ ? Donner deux preuves différentes.

8) Donner une application pour montrer que $E$ et $E^{**}$ sont canoniquement isomorphes. Que dire de cette application ? (ie : linéaire ? surjective ? injective ?) (discuter en fonction de la dimension)

9) Donner le plan de la démonstration du théorème de Hahn-Banach géométrique.

10) Donner l'énoncé d'un théorème portant sur $E^*$ qui caractérise le fait que $E$ est de dimension finie.

11) Pour $f\in E^*$, déterminer $(\ker f)^{\perp}$.

12) Montrer : $(\bigcap_{i=1}^k \ker g_i\subset\ker f)\Rightarrow(f=\sum\limits_{i=1}^k\lambda_i g_i,\ \lambda_i\in\mathbb{K})$.

*Réponses :*

1) Regarder la dimension de $\mathrm{Im} f$.

2) indice : utiliser les 'équations d'un sev de dimension finie'. rép : $F=E$.

3) indice : considérer $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $E$ et supposer qu'il existe un tel isomorphisme $\varphi$. En déduire une condition portant sur $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$. Utiliser l'égalité $P_{\mathcal{B}^*\to\mathcal{B}'^*}={}^TP^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

4) $a_k=\dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

5) indice : penser à l'interpolation de Lagrange.

6) cas $A=I_n$ : $\{PQ-QP|P,Q\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\}$.

7) 1ère rép : $\chi_A=\chi_{{}^TA}$. 2e rép : utiliser le produit scalaire.

8) $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^{**} \\ x & \longmapsto & (\varphi \mapsto \varphi(x)) \end{array}$, linéaire, injective quelque soit la dimension

9) C'est fait dans plusieurs bouquins, dont un des Tauvel par exemple.

10) un truc avec $E^*$ dénombrable...à creuser

11) $(\ker f)^\perp = \mathbb{K}f$.

12) Considérer les orthogonaux et utiliser le résultat de 11.

## 1.32 160. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

*Plan :*

I] Endomorphismes adjoints et normaux GOU

1. Endomorphismes adjoints
2. Endomorphismes normaux

II] Endomorphismes symétriques

1. Définitions et propriétés GOU + C-G
2. Réduction GOU
3. Décompositions M-T + CIA
4. Lien avec les formes quadratiques réelles PAZ

III] Endomorphismes orthogonaux

1. Définitions et propriétés GOU
2. Réduction GOU
3. Étude algébrique de $O(n)$ PER + OXEalg3
4. Étude topologique de $O(n)$ M-T

*Dvlpts :*

Homéomorphisme $O(p,q) \stackrel{\sim}{=} O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ C-G
Simplicité de SO(3) OXEalg3

*Remarques :*

– il faut savoir caractériser correctement les symétries orthogonales et les projections orthogonales en utilisant l'adjoint,
– si on présente en développement la réduction des endomorphismes normaux, il convient d'avoir réfléchi à l'unicité de la forme réduite proposée et d'en déduire la réduction des endomorphismes autoadjoints et orthogonaux.

## 1.33 161. Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.

*Plan :*

I] Introduction aux isométries affines MER

1. Définitions + AUD
2. Propriétés

II] Étude de $O(n)$ AUD

1. Réduction et générateurs + PER
2. Lien avec les isométries affines

III] Classification des isométries du plan et de l'espace

1. Dans le plan MER + COM
2. Dans l'espace MER + COM + OXEalg3 (pr SO(3))

IV] Isométries conservant une partie MER

1. Le groupe diédral
2. Isométries préservant des polyèdres réguliers + C-G

*Annexe :* les dessins du COM

*Dvlpts :*

Simplicité de SO(3) OXEalg3
Homéomorphisme $O(p,q) \overset{\sim}{=} O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ C-G

*Remarques :*

– connaître le développement isométries du cube car c'est un classique (et même connaître isométries du tétraèdre, octaèdre) (dodécaèdre c'est plus dur),
– être rigoureux concernant la distinction *affine* et *vectoriel, euclidien*,
– avoir des applications géométriques (même simples) notamment avec le triangle,
– ne pas faire un plan trop fourni,
– être calé sur les polygones et polyèdres réguliers, notamment : attention à la définition !
– on peut également parler de structure de produit semi-direct qui apparaît naturellement,
– pour les premières questions : y avoir réfléchi avant et savoir faire tout seul !

*Questions :*

1) Qu'est-ce qui caractérise un déplacement ?

2) Quelle peut être la valeur du déterminant de la partie linéaire ?

3) Qu'est-ce qu'un hyperplan médiateur ?

4) Pourquoi est-ce un hyperplan ?

5) Pourquoi $< x_0 >^\perp$ est-il stable par $f$ ? (avec $f \in \mathrm{Is}(\mathcal{E})$ et $x_0 \in \mathcal{E}$ tels que $f(x_0) = x_0$)

6) Montrer que {isométries affines}={applications conservant la distance}. (ie : il n'y a pas besoin de supposer qu'elles sont affines) (avec $\mathcal{E}$ euclidien et distance euclidienne) (cf Berger)

7) Pour définir une isométrie vectorielle, peut-on se passer de 'linéaire' dans la définition ?

8) Considérer un triangle $ABC$ d'angles aigus. Fixer un point sur chacun des côtés et nommons ce nouveau triangle $IJK$. Comment placer $I, J$ et $K$ de manière à ce que le périmètre de $IJK$ soit minimal ?

9) Connaissant les médiatrices d'un triangle, peut-on reconstruire le triangle ?

*Réponses :*

1) det(partie linéaire) = 1

2) $\pm 1$

3) entre $A$ et $B$ : $\{M \in \mathcal{E} \mid MA = MB\}$

4) $0 = MA^2 - MB^2 = \cdots = 2 < \overrightarrow{MI} | \overrightarrow{BA} >$ et puis on doit pouvoir trouver le noyau d'une forme linéaire

5) montrer de manière générale : ($F$ stable par $f$) $\Rightarrow$ ($F^\perp$ stable par $f$)

6) cf Berger

7) construire en dimension 2 un contre-exemple : considérer une rotation d'angle variant avec le rayon (considérer les cercles). en fait même en dimension 1 : la valeur absolue

8) construire des isométries bien choisies

9) non mais on peut obtenir une famille de triangles , cf Sortais, La géométrie du triangle.

## 1.34 162. Systèmes d'équations linéaires ; opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

*intro :* cf GRI : L'étude de l'indépendance ou de la dépendance linéaire d'un système de vecteurs intervient d'une manière ou d'une autre dans tous les problèmes qui se posent en algèbre linéaire : détermination de bases, calcul de la dimension, mise en évidence de sommes directes, etc. En fait le problème se ramène souvent à l'étude d'un système d'équations linéaires : savoir s'il admet des solutions, s'il y a une solution unique, voire déterminer les solutions. Aussi l'étude des systèmes linéaires est-elle sous-jacente à tous les aspects de la théorie.

*Cadre :* Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

*Plan :*
I] Systèmes linéaires GRI + CIA

1. Définitions
2. Systèmes de Cramer
3. Cas général GRI

II] Systèmes échelonnés et résolutions directes

1. Opérations élémentaires GRI + C-G
2. Systèmes échelonnés C-G
3. Pivot de Gauss GRI + C-G + CIA
4. Factorisation LU CIA

III] Méthodes itératives de résolution CIA

1. Principe des méthodes itératives
2. Méthode de relaxation
3. Méthode du gradient à pas optimal

*Dvlpts :*
Décomposition de Bruhat OXEalg1
Calcul itératif de l'inverse d'une matrice OXEalg3

## 1.35 170. Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

*Intro :* relativité restreinte dans $\mathbb{R}^4$ avec Lorentz ?

*Cadre :* Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et $E, F$ deux $\mathbb{K}$-ev.

*Plan :* + HAU pour contre-exemples
I] Théorie générale

1. Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques [GOU]
2. Expressions matricielles [GOU]
3. Rang et noyau d'une forme quadratique [GRI]

II] Orthogonalité et isotropie [GOU] + [GRI]

1. Orthogonalité
2. Isotropie
3. Réduction des formes quadratiques

III] Classification des formes quadratiques +GOU

1. Introduction [PER]
2. Sur $\mathbb{R}$ [GRI]
3. Sur $\mathbb{C}$ [GRI]
4. (Sur $\mathbb{F}_p$ [PER])

IV] Applications à l'analyse et la topologie [GOU anal]
Matrice hessienne
ellipsoïde de John-Loewner

*Dvlpts :*
Formes de Hankel C-G
Loi de réciprocité quadratique C-G

*Remarques :*
- savoir faire la réduction de Gauss (noter au passage que la réduction de Gauss permet de diagonaliser !),
- en application : parler de la hessienne,
- pas besoin de parler de formes sesquilinéaires.

*Questions :*

1) Quelles sont les propriétés de $A, B \longmapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ ?

2) Dessiner dans $\mathbb{R}^3$ la surface d'équation $z = xy$.

3) Qu'est-ce qu'une hyperbole ?

4) Citer une application concrète du lemme de Morse.

5) Pour car($\mathbb{K}$)=2, trouver deux formes bilinéaires symétriques non équivalentes et qui ont même forme quadratique.

*Réponses :*

1) L'application est non-dégénérée et c'est un produit scalaire.

## 1.36 171. Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

*Intro :*cf PAZ

*Plan :* une référence : le PAZZIS ... what else ?!

I] Introduction aux formes quadratiques réelles

1. Formes bilinéaires symétriques
2. Formes quadratiques réelles
3. Formes quadratiques positives

II] Orthogonalité et isotropie

1. Orthogonalité + OXEalg3 (inégalité d'Hadamard)
2. Isotropie
3. Groupe orthogonal + C-G (pr dvlpt)

III] Réduction des formes quadratiques

1. Classification
2. Réduction simultanée + OXEalg3 (J-L + det)

IV] Applications

1. Comptage de racines C-G
2. Réduction, version différentiable ROU
3. Recherche d'extremums GOUanal

*Dvlpts :*

Formes de Hankel C-G

Homéomorphisme $O(p,q) \cong O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ C-G

*Remarque :*

– relier classification des formes quadratiques et classification des coniques.

*Questions :*

1) Expliquer le fait d'être (non-)dégénérée sans passer par une base.

2) Réduire les formes quadratiques suivantes et donner leurs signatures :

$$\begin{aligned} x^2 - 3xy + 2yz \\ xy + yz + xz \\ 2xy + 3yz - zx \end{aligned}$$

3) Soient $\lambda, \mu \in E^*$, $q(x) := \lambda(x)\mu(x)$ avec $\dim E \geq 3$. Montrer que $q$ est dégénérée.

4) Soit $q$ une forme quadratique ($b$ la forme bilinéaire associée). On pose $f(x_1, \ldots, x_k) := \det\left((b(x_i, x_j))_{1 \leq i,j \leq k}\right)$. Montrer : $(b \geq 0) \Rightarrow (f \geq 0)$.

5) Pour $q$ définie-positive, quand est-ce que $f$ s'annule ?

6) À quoi cela correspond-il dans le cas $k = 2$ ?

7) Définition de $O(n)$ ?

8) $O(q)$ est-il compact ?

9) Un contre-exemple ?

10) Montrer que $O(p, q)$ a au moins 4 composantes connexes sans utiliser le résultat d'homéomorphisme entre $O(p, q)$ et $O(p)$ et $O(q)$.

11) Les éléments de $O(n)$ sont diagonalisables dans $\mathbb{C}$, peut-on généraliser à $O(p, q)$ ? (question de très haut vol !)

*Réponses :*

1) $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ x & \longmapsto & b(x, .) \end{array}$ est un isomorphisme ssi $q$ est non-dégénérée

2) cf GRI pour la méthode générale de récution

3) on écrit $q = \frac{1}{4}(\lambda+\mu)^2 - \frac{1}{4}(\lambda-\mu)^2$. Si $(\lambda+\mu, \lambda-\mu)$ est libre alors sign($q$)=(1,1). Sinon : alors regarder la forme bilinéaire et dimension.(ie et trouver un élément qui annule $q$ ou/et ? ! ? $x \mapsto b(x, .)$)

4) Si les $x_i$ forment une famille libre : si $k = n$ pr $(u_i)$ une base, on a : $(x_i) = A(u_i)$ et $(b(x_i, x_j))_{i,j} = A^T Q A$. Si $k \leq n$ alors une sous-famille extraite doit faire l'affaire ?. Si les $(x_i)$ sont liés alors (calcul) les vecteurs de $(b(x_i, x_k))_i$ aussi et $f = 0$.

5) $f = 0$ ssi les $x_i$ forment une famille liée

6) on retrouve Cauchy-Schwarz (calcul)

7) $O(n) = O(I_n) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = I_n\}$

8) compact ssi $q$ est déf-positive

9) $O(p,q)$ est homéomorphe à $O(p)xO(q)x\mathbb{R}^{pq}$

10) en gros décomposer $P \in O(p,q)$ en quatre blocs puis $P \longmapsto (\det(P), \det(A))$

11) Non, considérer $q(x,y,z) := 2xy + z^2 = \frac{1}{2}(x+y)^2 - \frac{1}{2}(x-y)^2 + z^2$ et prier.

## 1.37 180. Coniques. Applications.

*Cadre :* $\mathcal{P}$ plan affine euclidien

*Plan :* le MER est dans la place

I] Coniques affines

1. Définitions
2. Classification
3. Caractéristiques

II] Étude métrique des coniques

1. Ellipses
2. Hyperboles
3. Paraboles
4. Coordonnées polaires

III] Applications

1. Théorèmes de Poncelet
2. Lien avec l'algèbre linéaire GOU
3. Une application concrète AUD +

*Dvlpts :*

position du photographe AUD + ?
Hausdorffien GOU

*Remarques :*

- parler de foyers, directrices,... et bien dire/expliquer à quoi ils servent et quel est le lien entre ces différents objets,
- pour les propriétés concernant les tangentes : en donner des géométriques,
- question 4 : il est dit explicitement dans les rapports de jury qu'il faut savoir le faire,
- on peut parler de formes quadratiques mais seulement si c'est directement lié aux coniques (pas de théorème général 'pur' portant sur les formes quadratiques),
- le "applications" a autant de place que "coniques" !
- on peut parler de :
  - construction de conique à partir de cinq points (cf COXETER), d'où : à quelle condition 6 points sont sur une même conique ? (théorème de Pascal + réciproque),
  - peinture : dessiner un cercle en perspective (cf AUD et LAVILLE),
  - retrouver la position d'un photographe (cf AUD),

– résolution d'équation de degré 4 par radicaux (cf AUD),
– ellipsoïde de John Loewner (mais pas en dvlpt !),
– système hamiltonien et portrait de phase,
– dans un doc de M.Coste : comment retrouver les foyers d'une ellipse à la règle et au compas.

*Questions :*

1) relation entre forme polaire et forme quadratique ?

2) Pourquoi le centre tel qu'il est défini est "au milieu" de la conique ? ie : montrer qu'une conique à centre est symétrique par rapport à son centre.

3) Comment à partir des foyers et des directrices peut-on retrouver une ellipse ?

4) Démontrer la première loi de Kepler (on admettra $\sum \overrightarrow{f} = m\overrightarrow{a}$)

5) Classification des coniques sur $\mathbb{C}^2$ ?

6) Que deviennent les directrices pour un cercle ?

*Réponses :*

1) $\phi(x, y) = \dfrac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y))$

2) pour $O$ le centre : $f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + c_0 = q(-\overrightarrow{OM}) + c_0 = f(M')$, avec $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$. Et on peut procéder dans l'autre sens (réciproque) pour prouver qu'une conique admet un centre

5) *indice :* partir de $\mathbb{R}^2$

## 1.38 181. Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

*Plan :*

I] Barycentre dans un espace affine réel de dimension finie MER

1. Définition + TRU
2. Sous-espaces affines et barycentres

II] Repères et aires

1. Systèmes affinement libres MER
2. Repères MER
3. Interprétation en termes d'aires TRU

III] Convexité TAUVEL

1. Définition MER + TAUV
2. Enveloppe convexe + MER
3. Points extrémaux
4. Des résultats de séparation
5. Théorème de Helly

*Annexe :* des dessins !!!

*Dvlpts :*

Théorème de Carathéodory TAUVEL

*Remarques :*

– ne pas oublier de parler des choses basiques, élémentaires (notamment les coordonnées barycentriques) et donner des exemples simples type lycée,
– parler de Carathéodory et des points extrémaux de la boule unité,
– pourquoi pas parler de la géométrie du triangle (mais peut-être un peu ancien),
– ne pas s'éterniser sur la géométrie affine (le titre c'est barycentre),
– pourquoi pas citer les théorèmes de Ceva et de Ménélaüs,
– proposer un développement de barycentre et un autre de convexité.

## 1.39 182. Applications des nombres complexes à la géométrie

*Questions :*

1) Dans la démonstration des droites projectives, pourquoi ($f$ croissante) $\Rightarrow$ ($f_{|\mathbb{R}} = \mathrm{id}$) ?

2) Que signifie $a, b, c \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ alignés ?

3) Montrer que tous les cercles de la sphère $\mathbb{S}^2(\mathbb{R})$ sont envoyés sur les droites et les cercles de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

4) Montrer que $\exists P \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ tel que (ABC équilatéral) $\Rightarrow$ (P(a,b,c)=0) (où a affixe de A,...).

5) Pourquoi ont été inventés les nombres complexes ?

6) Quelle est la différence fondamentale entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ?

7) Donc en quoi peuvent être utiles les nombres complexes en géométrie ?

8) Qu'est-ce qu'un axe radical ?

9) Question HP : Énoncer le théorème de Bézout.

10) Si deux cercles sont donnés par des équations alors comment trouver l'axe radical ?

11) Quel est le lien entre $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{C}$ ? ie : comment définir $\mathbb{C}$ à partir des matrices ?

12) Donner des exemples d'isométries classiques sous forme de similitudes.

13) Et des similitudes non directes ?

14) À quoi ressemble la similitude d'une réflexion orthogonale ?

15) Condition sur $f : z \mapsto a\overline{z} + b$ pour que $f$ soit une similitude ?

16) Qu'est-ce qu'une application conforme ? Et que peut-on dire des fonctions holomorphes en géométrie ?

*Réponses :*

3) indice : utiliser les symétries et les rotations

5) résolution d'équations, cf Cardan-Tartaglia

6) $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, pas $\mathbb{R}$

7) trouver des intersections d'ensembles donnés par des équations cartésiennes

8) droite qui relie deux points d'intersection de deux cercles. (et si les cercles ne se coupent pas ? il y a une histoire de puissance. oui c'est ça cf Audin, puissance de M : $OM^2 - R^2$, axe radical : points du plan qui ont même puissance par rapport aux deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$)

9) Cf Szpirglas : un résultat permettant de majorer le nombre de points d'intersections de deux courbes algébriques

10) chercher les points d'intersection des deux cercles

11) Notons $\mathcal{M} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, alors on a un isomorphisme d'anneaux entre $\mathcal{M}$ et $\mathbb{C}$ via

$$\Phi : \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M} \longmapsto a + ib \in \mathbb{C}.$$

12) $z \mapsto a + \mathrm{e}^{i\theta}(z - a)$ : rotation de centre $a$ et d'angle $\theta$

14) pour $h$ la symétrie orthogonale par rapport à une droite $D$ passant par l'origine et d'angle $\theta$ par rapport à l'axe des abscisses : $h = r_\theta \circ c \circ r_{-\theta}$, où $r_\theta$ est la rotation d'angle $\theta$ de centre l'origine et $c(z) = \overline{z}$. Puis rajouter une translation en plus afin d'obtenir toutes les symétries orthogonales.

15) Déjà : $|a| = 1$ sinon on n'a pas une isométrie.
*indice :* supposer que c'est une symétrie par rapport à une droite, dans ce cas quelle va être la droite ? dans une symétrie, qu'est-ce qui caractérise les points de la droite ?
poser $z = a\overline{z} + b$ et résoudre.

16) Une application est conforme en $z_0 \in \mathbb{C}$ si elle "conserve les angles orientés", les applications conformes en $z_0$ sont exactement les fonctions $f$ holomorphes en $z_0$ telles que $f'(z_0) \neq 0$. (c.f. Objectif Agreg p.61)

## 1.40 183. Utilisation des groupes en géométrie.

*Remarques :*

– thème important dont il faut parler : les invariants, notamment le birapport en projectif,
– ne pas oublier de bien parler du thème action de groupes et du vocabulaire qui va avec ; quitte à insister bien dire quel est l'ensemble considéré et le groupe qui agit dessus, les stabilisateurs et les orbites,
– pour un développement, cf $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ et domaine fondamental,
– ne pas parler du projectif ? c'est peut-être dur à faire mais on peut se limiter au minimum avec une petite partie,
– pourquoi pas parler des quaternions.

## 1.41 190. Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

*Plan :*

I] Introduction au dénombrement BIA

1. Définitions et fonctions
2. Quelques outils

II] Théorie des groupes et corps finis

1. Quelques principes COM
2. Quelques cardinaux et conséquences PER
3. Réciprocité quadratique C-G
4. Indicatrice d'Euler GOZ
5. Fonction de Möbius GOZ + F-G

III] Utilisation des séries entières et séries génératrices

1. S-P (déf) + BIA (ex) + OXEalg1 (Bell) + OXEan2 (partition d'un nb entier en parts fixées)

*Dvlpts :*

Loi de réciprocité quadratique C-G
Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$ F-G

*Remarques :*

- bien dire à quels problèmes correspond chaque méthode,
- pourquoi pas avoir peu d'exemples et les illustrer à la lumière de différentes méthodes,
- on peut parler des relations entre nombre d'arêtes, sommets et faces de polyèdres.

*Questions :*

1) Dans le plan, qu'est-ce qui est un problème de dénombrement et qu'est-ce qui est en rapport avec une méthode combinatoire ?

2) Démonstration de $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ ?

3) Autre démonstration avec une action de groupe ?

4) Équivalent de $B_k$ en fonction de $k$ ? (où $B_k$ est le $k^e$ nombre de Bell)

5) Compter les sous-espaces de dimension $d$ d'un espace vectoriel de dimension $n$ sur $\mathbb{F}_q$.

6) Dénombrement utile pour construire des représentations linéaires sur un $\mathbb{C}$-ev ?

7) Le faire avec un groupe de petit cardinal.

8) Même question avec $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$.

9) On considère six points équirépartis sur un cercle et on les relie tous les points entre eux avec des segments. On colorie tous les segments obtenus avec deux couleurs. Montrer que dans tous les cas on voit apparaître un triangle d'une même couleur.

10) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

11) On considère un octogone et on colorie 4 côtés en blanc et les 4 autres en noir. Combien y a-t-il de coloriages différents ?

12) J'ai une balance et $n$ poids de masse $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$. Je pose les poids successivement sur la balance dans l'ordre que je veux et tels qu'ils soient tous posés à la fin et que le plateau de gauche soit toujours plus lourd. Combien y a-t-il de manière de procéder ?

13) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n-k}{k}$.

14) Montrer que $|P_n| = |Q_n|$ où
$P_n := \{(k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N} | d \in \mathbb{N}, \sum k_i = n, k_i \neq k_j \text{ pour } i \neq j\}$ et
$Q_n := \{(k_1, \dots, k_d) \in 2\mathbb{N}+1 | d \in \mathbb{N}, \sum k_i = n, k_i \neq k_j \text{ pour } i \neq j\}$.

15) Donner une bijection entre $P_n$ et $Q_n$.

*Réponses :*

1) combinatoire : ce qui a rapport avec les permutations et les arrangements

2) récurrence en utilisant le triangle de Pascal

3) faire agir $\mathcal{S}_n$ sur l'ensemble $X := \{(x_1, \ldots, x_p, y_{p+1}, \ldots y_n\}$, où $(x_1, \ldots, x_p)$ correspond à un choix de $p$ éléments de $[\![1, n]\!]$.

6) Taille des classes de conjugaison.

7) ...

8) commencer par regarder les matrices diagonalisables

9) Considérer un des six points. Il a cinq segments qui partent de lui. Donc au moins trois sont de la même couleur (disons vert). Considérer les trois points auxquels arrivent ces segments. Regarder les trois autres segments reliant ces trois points entre eux : soit il y en a un qui est vert et il y a alors un triangle vert, soit aucun des trois n'est vert et dans ce cas ces trois segments forment un triangle de l'autre couleur.

10)

$$\begin{aligned}(x+1)^{2n} &= (x+1)^n(x+1)^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} & = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{k} x^{n+i-k}\end{aligned}$$

puis identifier les coefficients de $x^n$ des deux côtés.

11) $\binom{8}{4}$ coloriages possibles mais il y a des doublons (deux manières de colorier qui donnent un même coloriage).
On fait agir $D_8$ sur l'ensemble des octogones coloriés possible. Calculer le nombre d'octogones coloriés fixés par chaque élément de $D_8$ puis utiliser la formule de Burnside. Résultat : 8.

12)
- Commencer par remarquer que la différence de poids entre deux masses est au moins 1,
- on note $F(n)$ la réponse ; combien y a-t-il de manières de faire si on enlève le poids $2^0$ ? réponse : $F(n-1)$,
- sachant que $2^0$ n'altère pas l'équilibre de la balance, trouver une relation de récurrence. (regarder quand est placé le poids $2^0$)

réponse : $F(n) = (2n-1)F(n-1)$, $F(1) = 1$.

13) Considérer $S_{n+2} := \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+2-k}{k}$.
Compter le nombre de façons ordonnées de sommer 2 et 1 pour obtenir $n$ (à $n \in \mathbb{N}$ fixé) : ça donne Fibonacci.
Ou : on choisit les $k$ positions des 2 parmi les $n - k$.

14) Utiliser les séries génératrices $\sum |Q_n| X^n$ et $\sum |P_n| X^n$.

# 2 Analyse et Probabilités

## 2.1 201. Espaces de fonctions : exemples et applications.

*Cadre :* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(X, d)$ un espace métrique.

*Plan :*

I] $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ H-L

1. Définition, structure
2. Parties denses (+ Z-Q pour Weierstrass)
3. Parties compactes

II] Espace de fonctions intégrables BRE

1. Structure et premiers résultats
2. Sous-ensembles compacts
3. Convolution et régularisation

III] Espace de Hilbert OBJ

1. $\mathrm{L}^2$
2. Transformée de Fourier et bases hilbertiennes

*Dvlpts :*

Riesz-Fischer BRE
Weierstrass avec probas Z-Q

## 2.2 202. Exemples de parties denses et applications.

*Plan :*

I] Définition et outils de base ? ? ?

1.

II] Densité et nombres réels

1. Premiers résultats POM
2. Équirépartition OXEan2

III] Densité et fonctions Z-Q

1. Approximation
2. $\mathcal{C}^k$ et L$^p$

IV] Densité et espaces complets

1. Prolongement de fonction et complétion d'un espace ALB
2. Théorème de Baire ALB
3. Espace de Hilbert OBJ

IV] Exemples de parties denses en algèbre M-T

*Dvlpts :*

Densité des fonctions nulle part dérivables GOU
Weierstrass avec probas Z-Q

*Questions :*

1) Montrer que $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

2) Montrer que $L^\infty$ n'est pas séparable.

3) Quelle est l'adhérence de l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $L^\infty$ ?

4) Comment étendre la transformée de Fourier de $L^1$ à $L^2$ ?

5) Montrer que l'opérateur de translation dans $L^p$ est continu (où $1 \leq p < +\infty$).

6) Montrer qu'un ensemble $\sigma$-compact est séparable.

7) Qu'est-ce que la topologie faible $*$ ?

8) Soit $E$ un espace vectoriel normé séparable. Montrer que la boule unité de $E'$ est métrisable pour la topologie faible étoile.

*Réponses :*

3) c'est l'ensemble des fonctions continues qui tendent vers 0 en les infinis.

6) *indice :* il suffit de le montrer pour les espaces compacts.

## 2.3 203. Utilisation de la notion de compacité.

*Cadre :* $(E, d)$ un espace métrique

*Plan :*

I] La notion de compacité BER

1. Définitions
2. Propriétés + StR

II] Continuité et convergence

1. Continuité BER + GOU
2. Suites et séries de fonctions POM (+ OXEan2 + NOU pr dvlpt)
3. Approximation OBJ (+ H-L)
4. Procédé d'extraction diagonale POM + OXEan2 (+ H-L ?)
5. Théorème d'Ascoli TES

III] Compacité dans les espaces vectoriels normés

1. En dimension finie GOU
2. En dimension infinie BRE

*Dvlpts :*

Théorème de Helly OXEan2
Théorèmes de Dini + Glivenko-Cantelli OXEan2 + NOU

*Questions :*

1) C'est difficile à démontrer le théorème de Tychonoff ?

2) Énoncé de la version générale du théorème de Stone-Weierstrass ?

3) Exemple de fonction dont l'image est un Banach ?

4) Preuve du tipi de Cantor ?

5) Pourquoi aime-t-on travailler sur des compacts ?

6) En dimension infinie, on en trouve souvent des compacts ? Quel est le théorème qui permet de retrouver des compacts ?

7) Preuve de la propriété : "les fonctions continues et nulle part dérivables sont denses dans l'ensemble des fonctions continues" ?

8) On suppose qu'il existe $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue nulle part dérivable. Soit $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Peut-on construire à partir de $f$ une suite de fonctions $(f_n)$ continues nulle part dérivables telle que $f_n \underset{n}{\longrightarrow} F$ ?

9) Soit $K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour $x \in [0,1]$, $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, on pose : $T(f)(x) = \int\limits_0^1 K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$. Montrer que $T(\overline{B(0,1)})$ est compacte.

10) Sur $[0,1]^{\mathbb{N}}$, on pose $d((x_n),(y_n)) := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$. Montrer que ça donne un espace compact.

11) Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n + v_n \longrightarrow 0$ et $\mathrm{e}^{u_n} + \mathrm{e}^{v_n} \longrightarrow 2$. Montrer que $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent.

*Réponses :*

3) Une fonction à valeurs réelles ou dans un espace vectoriel réel de dimension finie.

4) Appeler Bellis, il se fera une joie de vous expliquer.

5) Car on a la propriété de Bolzano-Weierstrass

6) ? et théorème d'Ascoli

7) Utiliser le théorème de Baire

8) D'après le théorème de Stone-Weierstrass, il existe $(F_n)$ $\mathcal{C}^1$ telle que $F_n \longrightarrow F$. Alors considérer $f_n := F_n + \frac{1}{n} f$.

9) Utiliser Ascoli

11) Bricoler.

## 2.4 204. Connexité. Exemples et applications.

*Plan :* + HAU

I] Introduction à la connexité

1. Définitions et propriétés BER + TES + StR
2. Connexité par arcs BER + TES

II] Utilisation en analyse

1. Sur $\mathbb{R}$ TES
2. Sur $\mathbb{R}^n$ BER + TES + StR
3. Analyse complexe OBJ

III] Utilisation en algèbre M-T + C-G + OXEalg3 (simplicité de SO(3))

*Dvlpts :*

Simplicité de SO(3) OXEalg3
Courbe de Jordan G-T

## 2.5 205. Espaces complets. Exemples et applications.

*Intro :* L'introduction du critère de Cauchy permet, sans avoir la moindre idée d'une éventuelle limite, de décider si une suite de réels converge. Cependant, dans un espace métrique quelconque, une suite vérifiant ce critère n'est pas toujours une suite convergente. C'est là qu'intervient alors la notion d'espace complet : un espace dans lequel toute suite de Cauchy converge. cf ALB

*Plan :* partout ALB
I] Espaces complets + GOU

1. Suites de Cauchy
2. Exemples + BRE

II] Propriétés des espaces complets et applications

1. Propriétés générales
2. Théorème du point fixe
3. Théorème de prolongement
4. Théorèmes d'inversion TES

III] Théorème de Baire + applications

1. Énoncé
2. Applications

IV] Le complété

*Dvlpts :*
Riesz-Fischer BRE
Densité des fonctions nulle part dérivables GOU

*Remarques :*

- dvlpt possible : théorème de complétion,
- donner des exemples d'espaces non complets, d'espaces complétés (il est unique mais peut avoir différentes représentations : en donner plusieurs !),
- $\mathbb{R}[X]$ ne peut pas être rendu complet (par aucune norme) : c'est une conséquence de Baire,
- exemple de fonction globalement lipschitzienne (fonctions linéaires, distances).

*Questions :*

1) Donner un exemple de fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uniquement continue sur $\mathbb{Q}$.

2) Donner un exemple de fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uniquement continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3) Un exemple d'espace non complet non trivial (autre que $\mathbb{Q}$) ?

4) Tiens tiens, quel est le complété de $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_{L^1})$ ?

5) Est-il nécessaire que $F$ (espace d'arrivée) soit complet dans Banach-Steinhaus ?

6) Un exemple de fonction continue et nulle part dérivable ?

7) Soit $(f_n) \in L^2(\Omega)$, $\Omega$ ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$. On suppose que pour tout $g \in L^2(\Omega)$, $\int_\Omega f_n g$ converge vers un réel noté $\mathcal{L}(g)$. Montrer qu'il existe $f \in L^2(\Omega)$ telle que pour tout $g \in L^2(\Omega)$, $\mathcal{L}(g) = \int_\Omega fg$.

8) Un exemple d'espace de Fréchet ?

9) À quoi sert le théorème de Stampacchia (à part retrouver Lax-Milgram) ?

10) Soit $F$ un espace complet dénombrable non vide. Montrer que $F$ contient au moins un point isolé.

11) Montrer qu'un espace de Banach de dimension infinie ne peut avoir de base (au sens de base d'un ev) dénombrable.

12) Application de la projection dans un Hilbert sur un convexe fermé ?

13) Où intervient la complétude dans la démonstration du théorème de la projection ?

14) Exemple de distance produit sur un complet produit fini de complets ?

15) Et pour un produit infini ?

16) Et pour un produit non dénombrable ?

17) Quand on a deux distances, donner une condition suffisante pour que la

notion de complétude coïncide.

18) Exemple de complété ? (autre que $\mathbb{R}$ pour $\mathbb{Q}$)

19) Exemple de mise en situation concrète de Stampacchia ?

20) Pour $\mathbb{R}[X]$, avec $||P|| := \sum |a_i|$, a-t-on un ensemble complet ?

21) Quel est le complété de $\mathbb{R}[X]$ pour cette norme ?

22) Et pour $||P|| := \max\limits_i |a_i|$ ?

23) Et pour $||P|| := \sup\limits_{x\in[0,1]} |P(x)|$ ?

24) Soit $\alpha \in ]0,1[$. Posons $\mathcal{C}_\alpha := \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f$ $\alpha$-höldérienne $\}$ et $||f||_\alpha := ||f||_\infty + \sup\limits_{x\neq y} \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$. Montrer que $(\mathcal{C}_\alpha, ||.||_\alpha)$ est complet.

*Réponses :*

1) Il n'existe pas de telle fonction.
Pour une fonction $f$ quelconque $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ : {points de continuité de $f$} = une intersection dénombrable d'ouverts.

2) $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ \frac{1}{p} & \text{si } x = \frac{p}{q},\ \text{pgcd}(p,q)=1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

3) $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_{L^1})$ n'est pas complet. Pour le voir, on peut considérer

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ nx + 1 - \frac{n}{2} & \text{si} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

En effet, par convergence dominée elle converge dans $L^1$ vers $1_{[1/2,1]}$ mais cet élément de $L^1$ n'a aucun représentant continu.

4) C'est justement $(L^1([0,1]), \|\cdot\|_{L^1})$. En fait c'est pour ça qu'on a construit les espaces $L^p$.

5) Non ($F$ e.v.n. suffit, cf. preuve).

6) On a entre autres la fonction de Weierstrass (http : //fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_de_Weierstrass) construite pour l'occasion (cf Z-Q). Il y en a également une dans GOU. Et on a aussi le mouvement brownien mais c'est très risqué...

7) *Indice :* Utiliser Banach-Steinhaus.

8) L'espace de Schwartz $\mathcal{S}$ qui est au programme.

9) Difficile de trouver des exemples qui ne soient pas des problèmes d'EDP très éloignés du programme de l'agreg. Néanmoins un exemple est donné dans le Brezis (mais pas détaillé).

11) *Indice :* Utiliser le théorème de Baire.

12) Stampacchia

13) il y a des suites de Cauchy dans la démo

14) pour $(E_i, d_i)$ complets et $E = \prod E_i$, $d(x, y) := \max(d_i(x_i, y_i))$. $E$ est également complet pour $d(x, y) := \sum d_i(x_i, y_i)$.

15) $d(x, y) := \sum \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)}$

17) équivalence des distances

18) le complété de $\mathcal{C}_c^\infty([0, 1])$ est $L^p([0, 1])$.

19) chercher du côté des espaces de Sobolev : $H^1([0, 1]) := \{u \in L^2 \mid u' \in L^2\}$ (avec $u'$ dérivée au sens des distributions).

20) conséquence du théorème de Baire : non

21) $l^1(\mathbb{R})$

22) $c_0$ (suites qui convergent vers 0) dans $l^\infty(\mathbb{R})$

24) considérer $(f_n)$ de Cauchy pour $||.||_\alpha$ et bricoler.

## 2.6 206. Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

*Intro :* cf TES p315

*Plan :* + ROU pr ex

I] Points fixes et complétude TES

1. Théorème du point fixe de Banach
2. Théorème de points fixes à paramètre
3. Théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites + ROU
4. Théorème de Stampacchia et théorème de Lax-Milgram

II] Points fixes et compacité TES

1. Théorèmes du point fixe dans un compact
2. Théorème de Brouwer
3. Théorème de Schauder

III] Résolution approchée de $F(x) = 0$

1. Points fixes attractifs et répulsifs DEM + OXEan1 (pour $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$)
2. Méthode de Newton DEM + ROU
3. Résolution de systèmes linéaires par méthode itérative CIA

IV] Le point fixe dans d'autres domaines

1. En algèbre TES
2. En probabilités COT

*Dvlpts :*

Méthode de Newton ROU
Processus de Galton-Watson COT

*Remarques :*

– application de Stampacchia : équation d'une membrane avec contrainte (ex : table).

*Questions :*

1) Montrer qu'une norme euclidienne est strictement convexe.

2) Définition de vecteurs $x, y$ positivement liés ?

3) Montrer le théorème du point fixe dans un compact.

4) Soient $I := [0, 1]$ et $\varphi : I \longrightarrow I$ strictement croissante. Montrer que $\varphi$ admet un point fixe.

5) Comment utiliser le théorème d'existence de point fixe de Schauder pour montrer le théorème de Cauchy-Peano ?

*Réponses :*

1) Passer au carré et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2) $\exists \lambda > 0 : x = \lambda y$.

3) cf GOU

4) Considérer $\{x \in I | \varphi(x) = x\}$. cf TES p138.

## 2.7 207. Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

*Plan :*

I] Aspects topologiques

1. Prolongement ponctuel GOU + POM
2. Un thm de prolongement global Z-Q
3. Prolongement par densité POM + RUD
4. Prolongement des applications linéaires BRE + POM

II] Aspects différentiels

1. Régularité POM + Z-Q
2. Équations différentielles Z-Q

III] Aspects analytiques

1. Séries entières GOU + Z-Q
2. Fonctions holomorphes Z-Q + OBJ

*Dvlpts :*

Lemme de Borel ROU
Théorème taubérien fort GOU

## 2.8 208. Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

*Plan :*

I] Introduction aux espaces vectoriels normés

1. Espaces vectoriels normés BER
2. Applications linéaires continues StR
3. Dimension finie GOU

II] Espaces de Banach

1. Propriétés et premiers exemples StR
2. Théorème de Baire et applications ALB
3. Espaces $L^p$ BRE

III] Espaces de Hilbert StR + OBJ

1. Définition et premières propriétés
2. Projection
3. Bases hilbertiennes

*Dvlpts :*

Riesz-Fischer BRE
Shannon WIL

*Remarques :*

– prendre soin de bien définir $\mathcal{L}^p$ et $\mathrm{L}^p$.

*Questions :*

1) Pour le théorème de Riesz-Fischer, quel est l'intérêt de se placer sur un ouvert ?

2) Pour quelles normes $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$ n'est pas continue ?

3) En dimension infinie, donner un exemple de fonction continue pour une norme et non continue pour une autre.

4) Donner un exemple d'espace préhilbertien et pas complet.

5) Donner une application de $(\overline{F} = E) \Leftrightarrow (\forall f \in E',\ f_{|F} = 0 \Rightarrow f = 0)$.

6) Dans le corollaire du théorème de Banach-Steinhaus (si $\forall x \in E,\ T_n(x) \underset{n}{\longrightarrow} T(x)$) alors $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$), a-t-on $|||T_n - T||| \underset{n}{\longrightarrow} 0$ ?

7) Dans le théorème de Hahn-Banachn avec semi-norme, faut-il que l'espace de départ soit normé ?

8) On dit que deux distance sont équivalentes lorsqu'elles ont la même topologie induite. Pour $d$ et $d'$ deux distances équivalentes, est-ce qu'une suite de Cauchy pour $d$ l'est également pour $d'$ ?

9) Sur un espace de Banach, existe-t-il une forme linéaire non continue ?

10) Démontrer que pour $f \in \mathrm{L}^p\ :\ ||f||_p = 0 \Rightarrow f = 0$.

11) Exhiber une suite de Cauchy $(f_n)$ de $\mathrm{L}^p$ (pour $p \in [1,+\infty]$) qui ne converge pas presque partout.

12) Donner le schéma de la démonstration du théorème de Banach-Steinhaus.

13) Quand est-ce qu'un evn est préhilbertien ?

*Réponses :*

1) en fait il faut juste que $\Omega$ (l'espace considéré) soit au moins mesurable.

2) pour $\sup|coeff|$, $\sum|coeff|$, elle n'est pas continue. (y en a-t-il d'autres ?)

3) cf 'Quelques exemples et contre-exemples'

4) cf 'Quelques exemples et contre-exemples'

5) même sous-espace qu'en 4)

6) Non cf 'Quelques exemples et contre-exemples'

7) Non

8) Non cf 'Quelques exemples et contre-exemples'

9) Oui cf 'Quelques exemples et contre-exemples'

10) *indice :* $\exists (f_n)$ étagée qui converge en croissant vers $f$. Travailler avec $(f_n)$.

11) pour $p = +\infty$, il n'en existe pas.
pour $p \in [1, +\infty[$, cf 'Quelques exemples et contre-exemples'.

12) repose sur le théorème de Baire en posant $\Omega_k := \{x \in E \mid \sup_{f \in H} ||f(x)|| > k\}$.

13) Quand il vérifie l'identité du parallélogramme.

## 2.9 209. Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

*Intro :* cf POM

*Plan :* POM pour la trame et plus si affinités
I] Approximation par des polynômes

1. Polynômes interpolateurs OBJ + DEM
2. Polynômes de Bernstein et théorème de Stone-Weierstrass POM + Z-Q + COT

II] Approximation en moyenne quadratique

1. Procédé de Gram-Schmidt DEM
2. Construction de polynômes orthogonaux POM + OBJ + DEM

III] Approximation par des polynômes trigonométriques POM + OBJ + Z-Q

1. Convergence au sens de Cesàro
2. $L^2$
3. Convergence ponctuelle

*Dvlpts :*
Weierstrass avec probas Z-Q
Théorème de Fejér H-L + Z-Q

## 2.10 213. Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

*Intro :* En dimension infinie, la projection et l'approximation ne sont pas évidentes à mettre en pratique/(ne sont pas choses aisées). Cependant, le cadre d'espaces dits de Hilbert offre une structure pour approcher des objets grâce au théorème de projection qui confère aux espaces de Hilbert en dimension infinie des propriétés proches de celles des espaces de dimension finie.

*Plan :*
I] Espaces préhilbertiens et espaces de Hilbert StR + OBJ pr ex

1. Espaces préhilbertiens
2. Espaces de Hilbert

II] Projection sur un convexe et dualité OBJ

1. Projection sur un convexe
2. Projection sur un sev +StR
3. (Dualité )

III] Bases hilbertiennes et applications OBJ

1. Bases hilbertiennes
2. Séries de Fourier
3. Polynômes orthogonaux

*Dvlpts :*
Shannon WIL
Inégalité isopérimétrique OXEan4

## 2.11 214. Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

*Plan :*

I] Théorème d'inversion locale

1. Énoncé TES
2. Corollaires OBJ + ROU

II] Théorème des fonctions implicites

1. Énoncé TES
2. En pratique ROU
3. Applications ROU + TES

III] Mise en situation : les sous-variétés ROU

1. Définitions
2. Exemples + M-T

*Annexe :* courbes, folium de Descartes

*Dvlpts :*

Lemme de Morse ROU
Théorème des extrema liés GOU

*Question :*

1) Exemple d'utilisation du théorème des fonctions implicites dans un cas où il ne s'applique pas ?

## 2.12 215. Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

*Intro :* Le but est d'approcher au voisinage d'un point une fonction par une fonction plus simple (voir Rouvière pour l'explication de la grande idée du calcul différentiel).

*Cadre :* $\mathbb{R}$-ev de dimension finie

*Plan :* + ROU et HAU pr ex

I] Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

1. Différentiabilité StR
2. Limites de fonctions différentiables StR
3. Dérivées partielles StR
4. Exemples et règles de calcul BER
5. Inégalité des accroissements finis StR
6. Théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites TES

II] Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ StR

1. Définitions et opérations
2. Dérivées partielles
3. Problèmes d'extremums TES

III] Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ BER

1. Définitions et propriétés
2. Formules de Taylor

*Dvlpts :*

Lemme de Morse ROU

Théorème des extrema liés GOU

*Question :*

1) Qu'en est-il du calcul différentiel en dimension infinie ?

*Réponse :*

1) C'est fait dans BER et c'est pas joli joli !

## 2.13 216. Étude métrique des courbes. Exemples.

*Cadre :* $\mathbb{R}^n$ euclidien

*Plan :* MON partout

I] Théorie générale

1. Vocabulaire
2. Longueur

II] Courbes planes (n=2)

1. Coordonnées polaires
2. Repère de Frenet et courbure + B-G
3. Position d'une courbe par rapport aux tangentes AUD
4. Développées, développantes

III] Courbes gauches (n=3) + B-G

1. Courbure
2. Repère de Serret-Frenet
3. Second théorème fondamental et applications

*Dvlpts :*

Inégalité isopérimétrique OXEan4
Courbe de Jordan G-T

*Questions :*

1) Faire quelques dessins au tableau afin d'illustrer les notions énoncées (courbure, torsion, repère de Frénet,...).

2) Donner un exemple de courbe de torsion non nulle.

3) Donner un exemple de courbe dont la torsion varie linéairement.

4) Malgré le caractère intuitif du théorème de Jordan, pourquoi la démo n'est-elle pas évidente ? Quels sont les pièges à éviter ?

5) Faire un dessin pour illustrerle théorème des quatre sommets.

6) Quel est le lien entre courbure et cercle osculateur ?

7) Montrer que dans le cas de l'ellipse il y a exactement quatre points critiques.

*Réponses :*

1) Dessiner.

2) hélice à pas constant

## 2.14 217. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Exemples.

*Intro :* Les sous-variétés sont les parties des espaces $\mathbb{R}^n$ sur lesquelles on peut appliquer les méthodes du calcul differentiel.

*Plan :*
I] Définitions et caractérisation

1. Préliminaires de calcul TES
2. Définitions ROU
3. Propriétés TES

II] Espace tangent ROU

1. Définition
2. Expressions

II] Illustrations avec une petite dimension ROU

1. n=2
2. n=3

IV] Sous-variétés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ M-T

*Annexe :* des dessins

*Développements :*
Théorème des extrema liés GOU
Cartan-Von Neumann G-T

*Questions :*

1) pour le théorème de Von Neumann : que se passe-t-il si on considère GL($\mathbb{C}$) ? et dans la preuve, pourquoi séparer $\mathcal{L}_{\mathrm{G}} = 0$ et $\mathcal{L}_{\mathrm{G}} \neq 0$ ?

2) Considérons $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Pour $c \in \mathbb{R}$, que vaut $f^{-1}(c)$ ? (distinguer les cas en fonction de la valeur de $c$)

3) Même $f$ : pour quels $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(c)$ est-il une variété de $\mathbb{R}^3$ ?

4) Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $f(x,y) =^t xAy$. Déterminer $\mathcal{L}_{\mathrm{G}}$.

5) Interprétation géométrique des extrema liés ?

6) Montrer qu'un cône n'est pas une sous-variété ?

7) Soit $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\}$ où $f$ est $\mathcal{C}'$. Soit $P$ un point n'appartenant pas à $S$. Montrer qu'il existe $A \in S$ tel $(PA)$ est perpendiculaire au plan tangent à $S$ en $A$.

## 2.15 218. Applications des formules de TAYLOR.

*Plan :*
I] Formule de Taylor pour les polynômes BER
II] Formules de Taylor avec reste intégral

1. Énoncé BER
2. Lemme de Morse ROU
3. Probabilités OUV

III] Formule de Taylor-Lagrange

1. Énoncé TES
2. Méthode de Newton TES + ROU
3. Théorème de Darboux OXEan1
4. Inégalités de Kolmogorov OXEan1

IV] Formule de Taylor-Young

1. Énoncé BER
2. Applications aux développements limités GOU
3. Étude affine locale d'une courbe plane ROU

V] Calcul de développement de Taylor
Lemme de Borel Z-Q

*Dvlpts :*
Lemme de Morse ROU
Lemme de Borel ROU

*Remarques :*
– savoir répondre rapidement à 2),
– attention à la hiérarchie des résultats !

*Questions :*

1) Faire un dessin pour illustrer la méthode de Newton

2) Comment appliquer la méthode de Newton à un polynôme de Newton ?

3) Quelle est la définition de la torsion ?

4) Contrex pour $q := \mathrm{d}^2 f$ définie-positive et $f$ sans minimum.

5) Soit $f \in \mathcal{C}^3([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que : $\exists a \in [0,1] \ : \ |f'''(a)| \geq 4$.

6) Considérons $P \in \mathbb{R}[X]$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ tq $P(x_0) = 0$. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tq $\forall x,\ \forall n \ : \ |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$. Montrer que $f = 0$.

7) Soit $(E) \ : \ y'' = f(x,y),\ f$ lipschitzienne par rapport à $y$ et continue par rapport à $x$ et $y$. Montrer que $(E)$ admet une unique solution.

*Réponses :*

4) $f(x) := x^4$, ou $x^3$

5) $f(0) = 0,\ f(1) = 1$, TAF $\Rightarrow \exists \eta \in ]0,1[$ tq $f'(\eta) = 1$. Donc $\max f' \geq 1$ puis $\exists \xi \in ]0,1[$ tq $\left\{ \begin{array}{lcl} f'(\xi) & \geq & 1 \\ f''(\xi) & = & 0 \end{array} \right.$. Ensuite : $\exists \xi_2$ tq $f''(\xi_2) > 2$ (TAF + distinguer cas $\xi > \frac{1}{2}$ ou $< \frac{1}{2}$).

6) Taylor-Young avec reste intégral

7) Considérer $y_1$ et $y_2$ deux solutions de $(E)$ + Taylor
+ Gronwall sur $|y_1(x) - y_2(x)|$

## 2.16 219. Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications [4]

*Intro :* cf TES / les pbs d'optimisation se rencontrent dans la vie de tous les jours : minimiser le coût d'un produit, placement en bourse, un temps d'attente ; en maths cela revient à étudier une fonction $f$ et ses extremums ; l'attaque d'un tel problème se fait en quatre temps : existence, unicité, localisation et calcul avec un algorithme : d'où ma structure du plan.

*Plan :* tout dans le TES
I] Existence et unicité

1. Première approche
2. Convexité

II] Localisation et calcul différentiel

1. Extrema libres
2. Extrema liés + OBJ

III] Optimisation numérique

1. Méthodes de descente
2. Méthodes du gradient

IV] Application en statistiques CAD
EMV, exemple avec Bernoulli

*Dvlpts :*
Théorème des extrema liés GOU
Ellipsoïde de John-Loewner OXEalg3

*Remarques :*
– question 8 : pourrait servir de développement ? cf Chambert-Loir, tome 2,
– penser à des petits exemples en $(x, y)$ et $(x, y, z)$,
– pour illustrer : pourquoi pas $x \longmapsto < Ax|x >$,
– pour le gradient : penser à l'illustrer avec des lignes de niveaux,
– pour illustrer : pourquoi pas utiliser l'exemple de $\frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >$ pour la méthode du gradient et parler du lien avec les systèmes linéaires.

*Questions :*

4. Celle où Bellis a conclu son développement en disant : "Bon bin voila".

1) idée de la preuve de Banach-Steinhaus ?

2) Comment montrer l'inégalité arithmético-géométrique avec les extrema liés ?

3) Définition de la distance de Hausdorff ?

4) $E := \{f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. $E$ est-il de Banach pour $||.||_\infty$ ?

5) $C := \{f \in E \mid \int\limits_0^1 f = 0\}$. $C$ est-il fermé pour $||.||_\infty$ ? convexe ? non vide ?

6) $f_0(x) := x$. Peut-on trouver $f \in C$ telle que $||f_0 - f||_\infty = \inf\limits_{g \in C} ||f_0 - g||_\infty = \frac{1}{2}$ ?

7) pour $f$ non continue, donner des exemples de non-unicité de la projection

8) Soit $f$ convexe sur $[a,b]$ à valeurs réelles. Soient $c, d \in [a,b]$, $c < d$. Connaissant $f(a), f(b), f(c), f(d)$, trouver $I \subsetneq [a,b]$ tel que $\min\limits_{[a,b]} f = \min\limits_I f$.

9) On considère une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$. Quels sont ses points de norme euclidienne (on est dans $\mathbb{R}^2$) maximale ?

10) Quelle complexité pour trouver les valeurs propres d'une matrice ?

11) Illustrer la méthode du gradient par un dessin au tableau.

12) EMV pour une loi exponentielle ?

13) Comment montre-t-on le théorème de diagonalisation des matrices symétriques ?

14) Comment montre-t-on que les normes sont équivalentes en dimension finie ?

*Réponses :*

1) "C'est pas hyper dur", dixit Bellis.

2) On pose $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 \ldots x_n \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \sum x_i - s \end{array} \right.$ où $s > 0$. Et on considère alors $\Gamma := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$.

4) $E$ est un sous-espace fermé d'un sous-espace de Banach

5) Oui pour les trois

6) Non : on répond à la question avec un dessin

8) Considérer $\mu_i := \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$. On a par convexité : $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$. Si $\mu_3 \leq 0$ alors $f$ est décroissante sur $[a, d]$. Si $\mu_1 \geq 0$ alors $f$ est croissante sur $[c, d]$. Puis distinguer les cas.

## 2.17 220. Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

*Intro :* cf TES p579

*Plan :* + NOU + OXEan4 pr ex

I] Introduction aux équations différentielles $X' = f(X, t)$ DEM

1. Étude de l'existence et de l'unicité des solutions
2. Quelques outils pour l'étude des solutions

II] Étude de la stabilité

1. Définition DEM
2. Cas des équations différentielles linéaires à coefficients constants DEM
3. Cas général : Liapunov ROU

III] Quelques exemples

1. Hill-Mathieu Z-Q
2. Lotka-Volterra OXEan4
3. Équations à variables séparées DEM

*Dvlpts :*

Lotka-Volterra OXEan4
Hill-Mathieu Z-Q

## 2.18 221. Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

*Intro :* cf TES p579

*Plan :*

I] Définition et propriétés d'un système linéaire

1. Existence et unicité globales GOU
2. Structure de l'espace des solutions POM
3. Résolvante DEM

II] Résolution explicite DEM + GOU

1. Cas coeffs constants
2. Cas coeffs non constants

III] Études qualitatives

1. Étude de la stabilité DEM + ROU
2. Cas dim=2, coeffs non constants DEM

*Dvlpts :*

Lotka-Volterra OXEan4
Hill-Mathieu Z-Q

## 2.19 223. Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

*Plan :* + HAU

I] Définitions et premières propriétés GOU

1. Limites
2. Théorèmes de convergence
3. Suites extraites et valeurs d'adhérence + Z-Q

II] Théorèmes de convergence et étude du comportement asymptotique

1. Sommes de Riemann GOU
2. Théorème de détermination d'équivalent GOU
3. Théorèmes taubériens Z-Q + GOU

III] Étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Suites récurrentes usuelles GOU
2. Application : résolution d'équations du type $F(x) = 0$ TES + ROU
3. Équirépartition (critère de Weyl) OXEan2

IV] Les suites en probabilité COT

*Dvlpts :*

Processus de Galton-Watson COT
Théorème taubérien fort GOU

*Questions :*

1) Pour $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, montrer que valeurs d'adhérence de $u$ est fermé.

2) Montrer : si $u$ est majorée et croissante alors u est convergente.

3) Montrer que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n}{\longrightarrow} \mathrm{e}$.

4) Est-ce que $\mathrm{e} \in \mathbb{Q}$ ? Justifier.

5) Démontrer le lemme de Césaro.

6) Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

7) Si $u_{n+1} = h(u_n)$ où $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ alors $u_n = ?$

8) $M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle toujours trigonalisable ?

9) Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n, p : u_{n+p} \leq u_n + u_p$. Montrer que $\dfrac{u_n}{n} \underset{n}{\longrightarrow} \inf\limits_n \left(\dfrac{u_n}{n}\right)$.

10) Comment résoudre $x^2 - ny^2 = \pm 1$ ?

11) Résoudre $x^2 - 2y^2 = 1$.

*Réponses :*

1) On montre que {valeurs d'adhérence de $u$}$= \bigcap\limits_{n \geq 0} \overline{\{u_k,\ k \geq n\}}$.

4) Non, procéder par l'absurde et écrire e en série entière.

6) Par l'absurde. Poser $E := \{0, a_0, a_1, \ldots, a_n \in [\![0, 8]\!]\}$ et regarder $x_n = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{a_{k,n}}{10^k}$.

7) indice : regarder les différents cas en fonction des valeurs de $a, b, c, d$. (pourquoi pas $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ?)

8) Non, par exemple : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

9) Si $l := \liminf\limits_n \dfrac{u_n}{n}$, $L := \limsup\limits_n \dfrac{u_n}{n}$ et $a := \inf\limits_n \dfrac{u_n}{n}$ alors $L \leq a \leq l \leq L$.

10) Pour $p_0 + \sqrt{n} q_0 \in \mathbb{Q}[\sqrt{n}]$, $(p_0 + \sqrt{n} q_0)^k = p_k + \sqrt{n} q_k$.

## 2.20 224. Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

*Plan :* + TES + POM

I] Introduction aux développements asymptotiques

1. Notation de Landau GOU + DIE
2. Échelles de comparaison GOU
3. Calcul de développements asymptotiques DIE

II] Développements asymptotiques de suites

1. Moyenne de Cesàro GOU + OXEan1
2. Comparaison série-intégrale GOU + AF2
3. Utilisation d'une série entière OXEan2
4. Théorème des nombres premiers GOU

III] Développements asymptotiques de fonctions

1. Formule de Taylor-Young et développements limités usuels GOU + G-T
2. Développements asymptotiques de fonctions réciproques TES
3. Développements asymptotiques implicites DIE
4. Méthode de Laplace TES
5. Asymptotique d'une équation du 3e degré ROU

IV] Développements asymptotiques en probabilités NOU + CAN

*Dvlpts :*

Méthode de Laplace + Stirling TES
Cartan-Von Neumann G-T

*Questions :*

1) L'hypothèse de la méthode d'Aitken-Steffenson se rencontre-t-elle souvent ?

2) Quelle(s) application(s) en fait-on en pratique ?

3) Exemple de suite pour laquelle la méthode fonctionne ?

4) S'applique-t-elle au cas $\alpha = 0$ et $x_n := \dfrac{1}{n}$ ?

5) Pour une suite définie par récurrence $x_{n+1} := f(x_n)$, sous quelles hypothèses la méthode d'Aitken fonctionne-t-elle ?

6) Qu'est-ce que l'ergodicité ?

7) Quel est un des outils majeurs pour démontrer le théorème des nombres premiers ?

8) Donner un développement asymptotique de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ plus précis que $\ln(n) + \gamma$.

9) Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$. Donner un équivalent de $u_n$.

10) Soit $f(x) := \ln(x) + x$. On cherche $x_n$ solution de $f(x_n) = n$, puis un développement limité de $f$. On cherche $x_n$ sous la forme $x_n := an + b\ln(n) + c\dfrac{\ln(n)}{n} + o(\dfrac{\ln(n)}{n})$. Trouver $a, b$ et $c$.

11) Démontrer la formule de Stirling avec les formules de Wallis.

12) Pour $\alpha_n \geq 0$, $\sum \alpha_n = +\infty$ et $u_n \underset{n}{\longrightarrow} l$, montrer que $v_n := \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k u_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i} \underset{n}{\longrightarrow} l$.

13) Donner un contre-exemple avec $v_n \not\longrightarrow l$ et $u_n \longrightarrow l$.

*Réponses :*

2) Elle permet de trouver quelque chose qui converge vers un point répulsif d'une fonction $\mathcal{C}^2$.

3) $x_{n+1} := a\sin(x_n)$, avec $|a| < 1$.

5) $f' < 1$

6) L'ergodicité c'est le fait qu'une moyenne à temps long tend vers une donnée qui dépend de la mesure.

7) La fonction $\zeta$ de Riemann : $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x} = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-x}}$.

8) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

11) Calculer.

## 2.21 226. Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples et applications.

*Plan :*

I] Dépendance vis-à-vis de $f$ et exemples GOU

1. Fonctions monotones
2. Fonctions continues
3. Suites arithmétiques et géométriques
4. Homographies
5. Récurrence linéaire à coefficients constants
6. Contraction TES + DEM

II] Classification des points fixes

1. Cas réel DEM + OXEan1 ($x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$)
2. Cas vectoriel DEM
3. Orbites périodiques OXEan1 (Sarkowski + tente)

III] Méthodes numériques TES

1. Méthode de la sécante + ROU
2. Méthode de Newton + ROU
3. Résolution de systèmes linéaires (+OXEalg3)

IV] Chaînes de Markov COT

*Dvlpts :*

Processus de Galton-Watson COT
Calcul itératif de l'inverse d'une matrice OXEalg3

*Remarque :*

- dvlpts possibles : fractales, ensembles de Cantor, ensembles auto-similaires, Stephenson (accélérateur d'itérations).

*Questions :*

1) Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue. Soit $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ telle que $f(u_n) = u_{n+1}$. Démontrer l'équivalence suivante : ($u_n$ converge) $\Leftrightarrow$ ($u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$).

2) Donner un exemple de fonction $f : I \longrightarrow I$ continue ne possédant pas de point fixe.

3) Donner un exemple d'une fonction qui admet un point 3-périodique mais pas $n$-périodique ($\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \neq 3$).

4) Dans la méthode de Newton, pourquoi prendre $f'(x)$ et pas $f'(a)$ ? (où $x$ est variable et change à chaque pas et $a$ est constant et tel que $f(a) = 0$)

5) En supposant toutes les hypothèses vérifiées, en pratique comment faire démarrer la méthode de Newton dans le cas non convexe ?

6) Toujours pour la méthode de Newton, que se passe-t-il si $a$ est un zéro d'ordre plus élevé (ie $f'(a) = 0$).

7) Réécrire la méthode de Newton pour $f(x) := (x-a)^p h(x)$, où $h$ est $\mathcal{C}^\infty \geq 0$.

8) Expliciter la méthode de Newton en dimension 2.

9) Résoudre $\left\{ \begin{array}{lcl} x^2 + y^2 & = & 4 \\ x^2 - y^2 & = & 1 \end{array} \right.$

*Réponses :*

1) ($\Leftarrow$) Soient $\alpha, \beta$ deux valeurs d'adhérence telles que $\alpha \leq \beta$. On montre que $\forall l \in ]\alpha, \beta[$, $l$ est une valeur d'adhérence de $u_n$, puis que $l$ est un point fixe de $f$. Ainsi $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ est un point fixe de $f$. Puis ... ?

2) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] \bigcup [2,3] & \longrightarrow & [0,1] \bigcup [2,3] \\ x \in [0,1] & \longmapsto & x+2 \\ x \in [2,3] & \longmapsto & x-2 \end{array} \right.$

3) *indice :* chercher une fonction $f$ qui admet un point 3-périodique et pas de point fixe puis montrer que $f$ et $f \circ f$ n'ont pas de point fixe et enfin chercher un point fixe de $f \circ f \circ f$.
*réponse :* $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

4) Car on ne connaît pas $f'(a)$.

5) Par dichotomie, jusqu'au moment où on atterrit dans un intervalle satisfaisant (où $f'$ ne s'annule pas)

6) Si $f'(a) = 0$ alors dans la démonstration de la méthode de Newton alors $F(x) := x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ n'est pas définie en $a$ et il n'est pas possible de faire apparaître un certain terme (lequel ? bonne question ! !)

8) Prendre $F(x) := x - (Df(x))^{-1}.f(x)$

9) *indice :* méthode de Newton
*réponse :* $f(x, y) := (x^2 + y^2 - 4, x^2 - y^2 - 1)$. $F(x) := (x, y) - (Df(x, y))^{-1}.f(x, y)$. $Df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$. Pour $xy \neq 0$ : $Df(x, y)^{-1} = \dfrac{-1}{8xy} \begin{pmatrix} -2y & -2y \\ -2x & 2x \end{pmatrix}$. Puis continuer les calculs en appliquant la méthode de Newton.

## 2.22 228. Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

*Plan :* + HAU

I] Introduction aux notions de continuité et dérivabilité GOU + StR

1. Définitions et premières propriétés
2. Lien entre continuité et dérivation

II] Théorèmes fondamentaux TES

1. Théorème des valeurs intermédiaires
2. Théorème de Rolle + POM
3. Théorème des accroissements finis
4. Formules de Taylor + OXEan1

III] Suites de fonctions

1. Régularité d'une limite de suite de fonctions GOU + HAU
2. Théorème de Weierstrass GOU + Z-Q

IV] Exemples

1. Fonctions lipschitziennes et uniformément continues GOU + TES
2. Fonctions monotones POM
3. Fonctions convexes GOU + TES
4. Théorème d'Ascoli TES
5. Intégrales HAU + B-P

*Dvlpts :*

Weierstrass avec probas Z-Q
densité des fonctions continues nulle part dérivables GOU

*Remarques :*

– le théorème taubérien fort est à la limite de la leçon,
– parler des séries qui donnent des fonctions continues non dérivables,
– pourquoi pas mettre des équations différentielles,
– pourquoi pas parler du théorème de Darboux,
– exemple et contre-exemple classique : escalier de Cantor (encore appelé escalier de Cantor-Lebesgue ou escalier du diable),
– si $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]0,1[$ telle que $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$ existe alors $f$ est dérivable en $0^+$ et $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$,
– et si ds les hypothèses on remplace $f : [0,1]$ par $f : ]0,1]$ alors $f$ se prolonge par continuité en 0. Contre-exemple : $\sin(\frac{1}{x})$,

– intégrale de Riemann : application du théorème de prolongement ci-dessus, cf POM.

*Questions :*

1) L'ensemble {fonctions $\mathcal{C}^0$ nulle part dérivables} est-il dénombrable dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ ?

2) Si $I$ est non compact, le résultat reste-t-il valable dans $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ ?

3) Existe-t-il une démonstration plus rapide ?

5) Donner un exemple de fonction dérivable de dérivée non nulle.

6) On a : ($f$ convexe dérivable) $\Rightarrow$ ($f$ $\mathcal{C}^1$) ; pourquoi ?

7) Démontrer le théorème de Darboux.

8) Envisager un autre type de démo.

9) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Supposons $a$ algébrique (ie $\exists P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(a) = 0$). Montrer que $\exists C > 0, \exists b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\ :\ |a - \frac{p}{q}| \geq \frac{C}{q^b}$.

10) Montrer que $a := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{10^{n!}}$ est transcendant. (On supposera que $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

11) Prouver que $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

12) Montrer que $x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue.

13) Comment construit-on les fonctions plateaux ?

14) Exhiber un exemple d'une fonction dérivable mais pas de classe $\mathcal{C}^1$, et d'une fonction continue nulle part dérivable.

15) Quelles sont les hypothèses minimales du théorème des accroissements finis ?

16) Donner une application du théorème de Weierstrass.

17) Soit $f$ une fonction de classe $C^2$ au voisinage de 0. Montrer que

$$\lim_{(t,h)\to(0,0)} \frac{1}{th}\left(f(t+h)-f(t)-f(h)+f(0)\right)=f''(0).$$

18) Le développement dyadique d'un nombre est-il unique ? Pour quels réels le développement est ambigu ?

19) Soit $f$ dérivable en $x$. A-t-on $\dfrac{f(y)-f(z)}{y-z}$ qui tend vers $f'(x)$ quand $y$ et $z$ tendent vers $x$ ?

20) Si $f$ est dérivable en $x$ alors $f$ admet-elle un développement limité en $x$ ?

21) Montrer que convexe + dérivable = $\mathcal{C}'$.

22) Que sait-on sur la dérivabilité des fonctions convexes ?

23) Si $f$ est $\mathcal{C}'$ et $f$ tend vers 0 en $+\infty$ alors quelle est la limite de $f'$ ?

24) Et si on rajoute $f$ positive et décroissante ?

25) Trouver un autre exemple de fonction qui vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

*Réponses :*

1) *indice* : une intersection d'ouverts denses peut-elle être dénombrable ?
*rép* : Si $X := \bigcup_n U_n$ et $\mathcal{C} = X \bigcup X^c = (\bigcup_{x\in X}\{x\})\bigcup(\bigcup_n U_n^c)$ alors d'après le théorème de Baire : $\exists n$ tel que $\widehat{U_n^c}^{\circ} \neq \emptyset$, ce qui est absurde !

2) -pour $\mathbb{R}$, ça marche
-si $I$ est borné alors on peut le placer dans un compact et c'est bon
- si $I$ est non borné alors ça marche encore, mais faut-il changer de norme ?

3) *indice* : théorème de Weierstrass

5) $x \mapsto x^2 \sin(\dfrac{1}{x})$

7) utiliser le théorème de Rolle

8) Poser $E := \{(x,y) \in I^2 \mid x < y\}$ et $g(x,y) := \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ définie sur $E$. $E$ est connexe et $g$ continue donc $g(E)$ est un connexe de $\mathbb{R}$ donc un intervalle (notons-le $\tilde{I}$). $f'$ prend ses valeurs sur $\overline{g(E)}$ d'où (+théorème des accroissements finis pour l'inclusion réciproque) : $\tilde{I} \subseteq f'(I) \subseteq \overline{\tilde{I}}$.

9) *indices :* -vérifier la propriété directement avec $a = \sqrt{2}$
-faire le lien avec le TAF

10) Par l'absurde : considérer $\dfrac{p_n}{q_n} := \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{10^{k!}}$ et $q_n := 10^{n!}$ et utiliser 9).

11) Par l'absurde avec 9) et 10)

15) on peut supposer la fonction seulement dérivable à droite.

17) *Indication* : utiliser Taylor-Lagrange, un changement de variables et une intégration par parties.

## 2.23 229. Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

*Plan :*

I] Fonctions monotones

1. Définitions et premières propriétés AF2 + COT (+ OXEan1 pr $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$)
2. Monotonie et continuité POM + AF2
3. Monotonie et dérivabilité GOU + POM + B-P
4. Suites de fonctions GOU + POM + OXEan2 (Helly)
5. Fonctions à variations bornées GOU

II] Fonctions convexes

1. Définitions et premières propriétés BER
2. Régularité et caractérisation des fonctions convexes BER + COT
3. Fonctions convexes et différentiabilité BER
4. En dimension $n \geq 2$ GOU

III] Applications

1. Inégalités de convexité POM + GOU + COT
2. Optimisation CIA + GOU + OXEalg3 (J-L)

*Annexe :* dessins de convexité

*Dvlpts :*

Théorème de Helly OXEan2
Théorème de Dini + théorème de Glivenko-Cantelli OXEan2 + NOU

*Question :*

1) Pourquoi relier fonctions monotones et fonctions convexes dans une même leçon ?

*Réponse :*

1) Pour une fonction convexe, les pentes des tangentes sont croissantes ; pr une fonction dérivable : convexe équivaut à la croissance de la dérivée ; suffisant ?

## 2.24 230. Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

*Plan :*

I] Première approche GOU

1. Définitions et premières propriétés + HAU
2. Critère de Cauchy et séries absolument cvgtes

II] Séries à terme général positif GOU

1. Théorèmes de comparaison
2. Critères de convergence +HAU
3. Application : l'espérance

III] Séries à terme général quelconque

1. Séries alternées GOU
2. Transformation d'Abel GOU
3. Produit de Cauchy HAU
4. Changement d'ordre et regroupement des termes GOU
5. Séries doubles HAU

IV] Utilisation de fonctions GOU

1. Séries entières
2. Séries de Fourier

*Dvlpts :*

Formule sommatoire de Poisson GOU
Théorème taubérien fort GOU

## 2.25 232. Méthodes d'approximation des solutions d'une équation F (X ) = 0. Exemples.

*Plan :*

I] Principe des méthodes itératives DEM

1. Introduction aux méthodes itératives
2. Théorème du point fixe
3. Points fixes attractifs et répulsifs

II] Approximation de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ TES

1. Méthode par dichotomie
2. Méthode de la sécante
3. Méthode de Newton en dimension 1 + ROU

III] Approximation de $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

1. Méthode de Newton-Raphson DEM
2. Méthode de descente TES + CIA
3. Résolution de systèmes linéaires CIA (+inv)

*Dvlpts :*

Méthode de Newton ROU
Calcul itératif de l'inverse d'une matrice OXEalg3

*Remarque :*

– dvlpt possible : méthode de la puissance.

*Questions :*

1) Exemple de norme matricielle non subordonnée ?

2) Méthode pour trouver la plus grande valeur propre d'une matrice ?

*Réponses :*

1) norme de Frobenius : $A \longmapsto \sqrt{\mathrm{tr}(A^t A)}$ et regarder avec l'identité

2) méthode de la puissance

## 2.26 234. Espaces $\mathrm{L}^p$, $1 \leq p \leq +\infty$

*Plan :*

I] Introduction aux espaces $L^p$

1. $\mathcal{L}^p$ B-P
2. $L^p$ et convergence dans $L^p$ B-P + BRE
3. Cas de $L^2$ OBJ

II] Relations entre les $L^p$

1. Inclusion et densité B-P + BRE
2. Dualité BRE

III] Produit de convolution et transformée de Fourier

1. Produit de convolution BRE + OBJ
2. Séries de Fourier OBJ
3. Transformée de Fourier RUD + COT

IV] Probabilités COT

1. Espérance et moments + CAD
2. Martingales

*Dvlpts :*

Riesz-Fischer BRE
Shannon WIL

*Remarques :*

– connaître par coeur le développement de Riesz-Fischer,
– pas masse de développements classiques à caser à part Riesz-Fischer, Sobolev et densité de $\mathcal{C}_c^\infty$ dans $\mathrm{L}^p$,
– autres dvlpts possibles : fonction maximale, causalité,
– dual de $\mathrm{L}^\infty$ : mesures $\sigma$-finies,
– connaître des applications pratiques de Riesz-Fischer et Fréchet-Kolmogorov.

*Questions :*

1) Démontrer le lemme suivant :

Si $g \in \mathrm{L}^1_{loc}(I)$, $y_0 \in I$ et $\forall x \in I : v(x) := \displaystyle\int_{y_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t$
alors $v \in \mathcal{C}(I)$ et $\forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(I) : \int_I v\varphi' = -\int_I g\varphi$

2) Pourquoi $\mathrm{L}^\infty$ n'est pas séparable ?

3) Pour $t \geq 1$, on pose $f_t(x) = \dfrac{1}{1+t+x^2}$, ($f_t \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$).
Montrer que $\{f_t \mid t \geq 1\}$ est relativement compact.

4) L'espace $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_1)$ est-il complet ? Pourquoi ?

5) Dans le théorème de convergence dominée, peut-il y avoir "convergence sans domination" ? (i.e. l'hypothèse de domination couvre-t-elle toutes les situations de convergence d'intégrales ?)

6) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ qui converge $\mu - p.p.$ vers $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. On suppose que, pour tout $n \geq 0$, $f_n \geq 0$ $\mu - p.p.$ Donner une condition suffisante, et ce sans hypothèse de domination, de sorte que $\lim\limits_n \displaystyle\int_X |f_n - f| \mathrm{d}\mu = 0$.

7) Soit $\mu$ une mesure sur $\mathbb{R}$, et soit $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ ou $1 \leq p < +\infty$. Simplifier l'expression de

$$\int_0^{+\infty} t^{p-1} \mu(f > t) \mathrm{d}t.$$

8) Peut-on munir $\mathrm{L}^p$ ($p \neq 2$) d'un produit scalaire ?

*Réponses :*

1) Écrire :

$$\begin{aligned}\int_I v\varphi' &= \int_a^b \Big(\int_{y_0}^x g'(t)\mathrm{d}t\Big)\varphi'(x)\mathrm{d}t \\ &= -\int_a^{y_0}\Big(\int_x^{y_0} g'(t)\mathrm{d}t\Big)\varphi'(x)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^b\Big(\int_{y_0}^x g'(t)\mathrm{d}t\Big)\varphi'(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

puis intervertir d$t$ et d$x$.

2) indice : trouver $(f_t)_{t\in\mathbb{R}}$ tels que tous les $f_t$ soient "éloignées" les uns des autres.
rép : Soit $\varepsilon = (\varepsilon_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Soit $f_\varepsilon(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n \mathbf{1}_{[n,n+1[}(x)$.
Pour $\varepsilon' \neq \varepsilon$ : $||f_\varepsilon - f_{\varepsilon'}||_\infty = 1$.
On suppose qu'il existe $(g_n)$ une famille dénombrable dense.
$\forall \varepsilon, \exists n_\varepsilon$ tel que $||f_\varepsilon - g_{n_\varepsilon}||_\infty \neq \dfrac{1}{3}$.

$g_{n_\varepsilon}$ sont distincts et dénombrables $\to$ absurde car $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est non dénombrable.

3) Appliquer le théorème d'Ascoli

4) Non, l'espace $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_1)$ étant un sous espace de l'espace complet $(L^1, \|\cdot\|_1)$, $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_1)$ est complet si et seulement si il est fermé. Ce n'est pas le cas (construire un contre exemple).

5) Non, contre-exemple de la "bosse glissante", cf B-P (après le théorème de convergence dominée).

6) Sous la condition : $\lim_n \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu$, il suffit d'appliquer le lemme de Fatou à la suite $g_n := f_n + f - |f_n - f|$ pour obtenir le résultat.

7) Exprimer la mesure à l'aide de l'intégrale d'une fonction indicatrice, et appliquer le théorème de Fubini positif.

## 2.27 235. Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications.

*Plan :*

I] Théorèmes fondamentaux

1. Fonctions positives B-P
2. Convergence dominée B-P
3. Espaces $L^p$ BRE

II] Régularisation

1. Produit de convolution et identités approchées OBJ
2. Applications aux séries de Fourier Z-Q

III] Autres applications

1. Fonctions holomorphes Z-Q + StR
2. En probabilités COT

*Dvlpts :*

Théorème de Féjer H-L + Z-Q
Riesz-Fischer BRE

*Remarque :* Trois réflexes à avoir quand on calcule une intégrale : résidus, dérivée, série entière.

*Questions :*

1) Quels sont les compacts de $l^p(\mathbb{N})$ ?

2) Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. $\int_{\mathbb{R}} |f(t+h) - f(t)|\mathrm{d}t$ admet-il une limite lorsque $h \to +\infty$ ? Si oui, laquelle ?

3) L'application $\begin{array}{ccc} \mathrm{L}^1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ f & \longmapsto & (c_n(f))_n \end{array}$ est-elle surjective ?

4) Donner un énoncé où $(f_n)$ est semi-intégrable et $\int \lim\limits_n f_n = \lim\limits_n \int f_n$.

5) Pour $x \geq 0$, $\int_0^\infty \dfrac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\mathrm{d}t = ?$

*Réponses :*

1) Ce sont les ensembles bornés équi-intégrables.

2) Oui : $2||f||_{L^1(\mathbb{R})}$.

3) Non : conséquence de Banach-Steinhaus.

4) théorème de la moyenne.

## 2.28 236. Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

*Plan :*

I] Méthodes de base GOU

1. Primitives
2. Intégration par parties
3. Changement de variable
4. Décomposition en éléments simples

II] Utilisation de l'analyse complexe OBJ

1. Prolongement analytique
2. Théorème des résidus OBJ + StR (calcul d'ints + formule des compléments) (chercher ds les exos !)

III] Autres méthodes

1. Suites et séries GOU
2. Fubini B-P
3. Théorème de régularité des intégrales à paramètre Z-Q
4. Formule de Green-Riemann (+OXEan4)

IV] Méthode d'approximation : Laplace TES

V] Calcul d'intégrales en probabilités COT + CAN

1. Espérance et moments
2. Fonctions caractéristiques

*Dvlpts :*

Méthode de Laplace + Stirling TES

Inégalité isopérimétrique OXEan4

## 2.29 239. Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

*Plan :*

I] Régularité et premiers exemples

1. Continuité Z-Q (+ HAU + GOU pr ex et contrex)
2. Dérivabilité Z-Q (+ HAU + GOU pr ex et contrex)
3. Convolution OBJ

II] Holomorphie

1. Holomorphie sous l'intégrale OBJ + Z-Q
2. Exemples OBJ + Z-Q

III] Transformées de Fourier et de Laplace

1. Transformée de Fourier RUD + COT
2. Transformée de Laplace COT

IV] Étude asymptotique des intégrales à paramètre

1. Méthode de Laplace TES
2. Méthode la phase stationnaire Z-Q

*Dvlpts :*

Shannon WIL
Méthode de Laplace + Stirling TES

*Questions :*

1) Pour $k > 0$, on pose $I(\alpha, k) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha x)}{x} \mathrm{e}^{-kx} \mathrm{d}x$. Montrer que $I$ est dérivable par rapport à $\alpha$.

2) Calculer $\dfrac{\partial I}{\partial \alpha}$.

3) Montrer que $I(\alpha, k) = \dfrac{1}{2} \ln\left(1 + \dfrac{\alpha^2}{k^2}\right)$.

4) Pour $z \in \mathbb{C}$, $\Gamma(z) := \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$. Où est définie $\Gamma$ ?

5) $\Gamma \underset{z\to 0}{\longrightarrow}$ ?

6) Pour $z$ réel : $\Gamma \underset{z\to +\infty}{\longrightarrow}$ ?

7) Donner un équivalent de $\Gamma$.

8) D'où vient la fonction d'Airy ?

9) Soit $f$ une application semi-convergente sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)\mathrm{d}t$ est finie, puis déterminer

$$\lim_{\alpha \to 0} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(t)\mathrm{d}t.$$

10) Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, calculer

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_1$$

*Réponses :*

1) théorème de convergence dominée ?

2) $\displaystyle\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_0^{+\infty} \sin(\alpha x)\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x$.

3) indice : $\displaystyle\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(i\alpha - k)x}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{k - i\alpha} = \frac{k + i\alpha}{k^2 + \alpha^2}$.

4) définie pour $z$ tel que $\mathrm{Re}(z) = 0$.

5) ou 6) indice : $\Gamma(z) = \dfrac{1}{z} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

7) $\Gamma(x+1) \sim x^{x+1}\sqrt{\dfrac{2\pi}{x}}\mathrm{e}^{-x}$.

8) Bonne question ! début de rép : utilisée en physique, elle porte le nom de l'astronome britannique George Biddell Airy qui l'introduisit pour ses calculs d'optique, notamment lors de l'étude de l'arc-en-ciel.

9) *Indication* : utiliser une formule de la moyenne.

## 2.30 240. Produit de convolution, transformation de FOURIER. Applications.

*Intro :* résolution de l'équation de la chaleur

*Plan :*
I] Produit de convolution Z-Q

1. Définition et premières propriétés
2. approximation et régularisation

II] Transformée de Fourier

1. Dans $L^1$ B-P
2. Dans $L^2$ B-P
3. discrète PEY

III] Applications

1. Résolution de l'équation de la chaleur OXEan4
2. En probas : fonction caractéristique COT

On peut trouver des trucs dans OBJ, H-L, BRE, RUD, CARTAN

*Dvlpts :*
Formule sommatoire de Poisson GOU
Théorème de Fejér H-L + Z-Q

*Questions :*

1) Pour la formule sommatoire de Poisson (version *Gourdon*), a-t-on encore le résultat si on affaiblit les hypothèses ?
2) Pour la fonction caractéristique, comment obtient-on la formule :
$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k\mathbb{E}(X^k e^{itX})$ ?

3) Comment montre-t-on que la fonction caractéristique est uniformément continue ?

4) Existence et/ou unicité des solutions de l'équation de la chaleur ?

5) Transformer l'équation de la chaleur en utilisant la transformée de Fourier.

*Réponse :*

1) Non, on peut fabriquer un contre-exemple avec $f(x) = O(1/x)$ et une convolution.

## 2.31 241. Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

*Plan :* + HAU

I] Convergence

1. Lien entre les différentes convergences GOU + Z-Q
2. Résultats sur les suites extraites GOU + BRE + OXEan2 (Helly) + HAU
3. Régularité de la limite GOU
4. Intégrabilité B-P
5. Interversions de limites B-P (+ GOU pr ex et contrex)

II] Séries entières et holomorphie OBJ

1. Séries entières
2. Lien avec les fonctions holomorphes

III] Séries de Fourier

1. Définition OBJ
2. Convergence des séries de Fourier GOU + Z-Q

IV] Probabilités

1. Théorèmes limites COT
2. Test du $\chi^2$ CAD

*Dvlpts :*

Théorème de Helly OXEan2
Théorème de Dini + Glivenko-Cantelli OXean2 + NOU

*Remarque :*

- savoir faire le genre de petits exos comme en 10,11) avec le lemme de Fatou, le thm de Beppo-Levi,...

*Questions :*

1) contre-exemple au théorème de Dini si on enlève une des hypothèses ?

2) Le second théorème de Dini est-il valable si à la place de "$I$ intervalle" on met "$I$ compact" ?

3) Pour le premier théorème de Dini, a-t-on besoin de $(f_n)$ continues ?

4) Pour le théorème de Dirichlet, exemple de fonction qui vérifie les hypothèses et qui n'est pas $\mathcal{C}^1_m$ ?

5) Qu'est-ce qu'une fonction à variation bornée ?

6) Application de Glivenko-Cantelli ?

7) À quoi sert la convergence uniforme dans le théorème de Glivenko-Cantelli ?

8) Dans le théorème de Riemann-Lebesgue, si les hypothèses sont plus fortes, peut-on obtenir d'autres résultats sur $(\hat{f}(n))_n$ ?

9) Et réciproquement, peut-on obtenir un résultat sur la régularité de $f$ ?

10) Soit $(f_n)$ définies sur $X$ (sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$) telles que $f_n \geq 0$ et $f_n \to F$ en décroissant. A-t-on $\int\limits_X F \mathrm{d}\mu = \lim\limits_n \int\limits_X f_n \mathrm{d}\mu$ ?

11) Si on ne fait pas l'hypothèse avec l'existence de $n_0$, est-ce toujours faux ?

*Réponses :*

1) $f_n(x) := \dfrac{x}{n}$, sur $\mathbb{R}^+$. $f_n \overset{CVS}{\longrightarrow} 0$ mais pas uniforme car $f_n(n) = 1$.

autre contre-exemple : $f_n(x) := \begin{cases} nx, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -nx + 2, & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$ .

2) Oui, car le théorème de Heine s'applique sur un compact

3) exhiber un contre-exemple avec $(f_n)$ non continues

5) $\sup\{\sum |f(a_{i+1}) - f(a_i)|,\ \text{où } (a_i)\text{subdivision}\} < +\infty$

6) approcher la fonction de répartition d'une va

7) permet d'intervertir $\int$ et lim ; montre que $F_n(x_n) \to F(x)$, où $x_n \to x$.

8) oui : $f$ $\mathcal{C}^k \Rightarrow \hat{f}(n) = o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$

9) pour $k \geq 2$, $\hat{f}(n) = o\left(\dfrac{1}{n^k}\right) \Rightarrow f$ $\mathcal{C}^{k-2}$ grâce à la cvge normale

10) Faux : $X = \mathbb{R}$, $f_n := \dfrac{1}{n}$. En fait il faut supposer : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\int\limits_X f_{n_0} \mathrm{d}\mu < +\infty$, puis appliquer le thm de cvgce dominée ou Beppo-Levi

11) Non : $X = \mathbb{R}$, $f_n = F = 1$.

## 2.32 243. Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

*Plan :* GOU + HAU + POM

I] Le rayon de convergence

1. Définition et premières propriétés
2. Détermination du rayon de cvgce
3. Opérations sur les séries entières

II] Propriétés de la somme

1. Régularité + OBJ
2. Analycité + OBJ
3. Et sur le bord du disque de convergence

III] Développements de fonctions en séries entières

1. Fractions rationnelles
2. Séries entières et équas diff + OXEan4

IV] En probabilités COT

1. Fonctions génératrices
2. Processus de Galton-Watson

*Dvlpts :*

Processus de Galton-Watson COT
Théorème taubérien fort GOU

*Remarque :*

– donner clairement dans le plan la définition de développable en série entière

*Questions :*

1) Montrer que $\mathrm{R}(f^2) \geq \mathrm{R}(f)$, où $f$ est DSE.

3) Donner la définition de développable en série entière.

4) Si $f \in H(\Omega)$ alors que peut-on dire de son rayon de convergence ?

5) Connaissez-vous des fonctions dérivables de tout ordre mais pas analytiques ?

6) Pour $\rho(x)\ :\ \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{|x|^2-1}} & , \quad |x|<1 \\ 0 & , \quad \text{sinon} \end{cases}$, quelle est l'allure de la courbe de $\rho$ ?

7) Donner un exemple d'une fonction qui a une série de Taylor divergente.

8) Si $R_A > R_B$ alors $R_{A+B} = ?$

9) Soit $f(z) := \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ tq $R > 0$ et $\exists z_0 \in D(0,R)$ tq $\forall n,\ f^{(n)}(z_0) = 0$. Montrer que $f = 0$ sur $D(0,R)$.

*Réponses :*

5) cf 'Quelques exemples et contre-exemples'

6) un truc en cloche. grâce à ces fonctions on construit des approximations par convolution.

7) cf 'Quelques exemples et contre-exemples'

9) Taylor puis se déplacer sur $[0, z_0]$

## 2.33 244. Fonctions développables en série entière, fonctions analytiques. Exemples.

*Plan :* + HAU

I] Fonctions analytiques réelles

1. Définitions GOU + OBJ
2. Propriétés des fonctions analytiques GOU + OBJ
3. Fonctions analytiques et fonctions $\mathcal{C}^\infty$ OBJ

II] Fonctions holomorphes : analycité sur $\mathbb{C}$

1. Définitions POM
2. Propriétés POM
3. Prolongements POM + GOU
4. Analycité réelle ou complexe OBJ

III] Résolution d'équations différentielles Z-Q + OXEan4 (Bessel)

IV] Probabilités COT

1. Fonctions génératrices
2. Processus de branchement

*Dvlpts :*

Théorème taubérien fort GOU

Processus de Galton-Watson COT

*Questions :*

1) Application de l'équation de Bessel ?

2) Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Exprimer son laplacien en coordonnées polaires.

3) Exemple d'utilisation du théorème taubérien faible ?

4) Contre-exemple au théorème d'Abel angulaire ?

5) Pourquoi la fonction arg n'est-elle pas holomorphe ?

6) Comment construire le log complexe ?

7) Montrer que $\log'(z) = \dfrac{1}{z}$.

8) Calculer $\exp(\log(z))$ et $\log(\exp(z))$.

9) Démontrer le lemme de Rudin-Shapyro : $\exists(\varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall z$ tels que $|z| \leq 1$ : $\left|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i z^i\right| \leq 5\sqrt{n+1}$.

10) Déterminer une série entière qui n'est pas normalement convergente sur $B(0,1)$ mais qui est uniformément convergente sur $B(0,1)$.

*Réponses :*

1) un rapport avec les valeurs propres du laplacien en sphérique ?

4) $f(z) := \dfrac{1}{1+z} = \sum_{n\geq 0}(-z)^n$ sur $D(0,1)$. On a : $\lim_{z\to 1} f(z) = 1/2$. Or $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ ne converge pas.

5) Pour $z = x + iy$ : $\arg(z) = \arctan(y/x)$. On a :

$$\frac{\partial \arg(z)}{\partial x} = \frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2} = \frac{-y}{x^2+y^2} \text{ et } \frac{\partial \arg(z)}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

6) Pour $z \notin \mathbb{R}_-^*$, $\log(z) := \displaystyle\int_0^1 \frac{z-1}{(1-t)+tz}\mathrm{d}t$.

7) Théorème d'holomorphisme et on dérive sous l'intégrale.

10) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\varepsilon_n}{n+1} z^n$.

## 2.34 245. Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

*Plan :*

I] Introduction aux fonctions holomorphes

1. Définition et premières propriétés StR
2. Holomorphie et différentiabilité (+ courbe de Jordan ? ?)
3. Interprétation géométrique : applications conformes OBJ

II] Propriétés des fonctions holomorphes StR (+Bell ? ?)

1. Formule de Cauchy
2. Conséquences de la formule de Cauchy
3. Analycité OBJ

III] Fonctions méromorphes StR

1. Singularités
2. Théorème des résidus
3. Dénombrement des zéros et des pôles

*Dvlpts :*

Courbe de Jordan G-T
Nombres de Bell (version holomorphe) OXEalg1

*Remarques :*

– leçon très riche, il faut faire des choix (les fonctions holomorphes ont 200, 300 ans) ; pourquoi pas parler des fonctions harmoniques (cf RUD),
– intérêt de la propriété de la question 2) : on peut redémontrer toute la théorie de Cauchy grâce à elle,
– $\varphi$ biholomorphisme := $\varphi$ holomorphisme, bijectif et $\varphi^{-1}$ holomorphisme.

*Questions :*

1) Justifier le fait que $Ind_\gamma$ est une fonction entière et constante sur chaque composante connexe.

2) On considère deux lacets $\gamma_1$ et $\gamma_2$ homotopes. Montrer que $\int\limits_{\gamma_1} f = \int\limits_{\gamma_2} f$, où $f \in \mathrm{H}(\Omega)$.

3) Pourquoi peut-on décomposer tout lacet comme précédemment (dans la rép de 2) ) avec des petits carrés ?

4) Comment retrouve-t-on le théorème de Cauchy ?

5) Posons $\mathring{D}_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ et $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Soit $f \in \mathrm{H}(\overline{D_2})$ tel que $f(\mathbb{S}) \in \mathring{D}_1$. Montrer que $f$ possède un point fixe.

6) Montrer le théorème de Brouwer en dimension 2.

7) Soient $f \in \mathrm{H}(\Omega)$ et $a \in \Omega$. Montrer que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ et $\varphi$ un biholomorphisme $V(a) \to V(a)$ tels que $f(x) = f(a) + \varphi(x)^{n_0}$, $\forall x \in V(a)$.

8) Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n > 1$ et $a_n \underset{n}{\longrightarrow} +\infty$. Soit $f_{a_n} : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x - a_n} \end{array}$.
Montrer que $(f_{a_n})_n$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([0,1]), ||.||_\infty)$.

*Réponses :*

1) On a : $Ind_\gamma(z) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\gamma'}{\gamma(t) - z} \mathrm{d}t$. Posons $g : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ s & \longmapsto & \displaystyle\int_0^s \dfrac{\gamma'}{\gamma - z} \end{array}$.
On a : $g(1) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2i\pi g(1)} = 1$. Posons alors $f(s) := \mathrm{e}^{2i\pi g(s)}$. On calcule $f'$, on trouve une équation différentielle vérifiée par $f$, on en déduit $f$ et $f(1) = f(0) = 1$. Il reste enfin à montrer que $Ind_\gamma(z)$ est continue par rapport à $z$.

2) Décomposer l'intégrale sur un carré en quatre intégrales sur chacun des côtés puis utiliser Morera et de proche en proche on arrive au résultat voulu.

3) à cause de l'homotopie

5) On a $f(\mathring{D}_1) \in \mathring{D}_1$ car le maximum est atteint sur le bord (principe du maximum). Puis utiliser le théorème de Brouwer.

6) Procéder en deux étapes : on suppose que $f : \overline{D_1} \to \overline{D_1}$ n'a pas de point fixe. On définit $g$ comme sur le dessin (faire dessin !) ($g(z) \in \mathbb{S} \bigcap [f(z), z]$ du côté de $z$). On définit $\gamma_s(t) := g(s\cos(2\pi t), s\sin(2\pi t))$ pour $s, t \in [0,1]$. Calculer $Ind_{\gamma_0}(0)$. C'est égal à 0 car $\gamma_0$ est constant. Or $Ind_{\gamma_1}(0) = 1$ car $g_{|\mathbb{S}} = \mathrm{id}$. Et $\gamma_0$ et $\gamma_1$ sont homotopes, donc c'est absurde !

7) $g(x) := f(x) - f(a) = \lambda(x-a)^k(1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x-a)^n) =: \lambda(x-a)^k h(x)$, avec $k \geq 1$. $h(a) = 1$ donc $\exists V(a)$ tel que $h(V(a)) \subset D(1,1)$ et $\exists \psi : D(1,1) \to \mathbb{C}$

holomorphe telle que $\psi(x)^k = x$, $g(x) = (x-a)^k \mu^k \psi(h(x))^k = \varphi(x)^k$, et comme $\varphi' \neq 0$ alors $\varphi$ est biholomorphe.

8) Montrer que : ($E$ est dense) $\Leftrightarrow$ ($\forall \varphi \ : \ \mathcal{C}^0([0,1]) \to \mathbb{R}$ forme linéaire continue : $\varphi_{|E} = 0 \Rightarrow \varphi = 0$). (implication directe : par continuité de $\varphi$ ; implication réciproque : Hahn-Banach). Poser $E := Vect(f_{a_n} \mid n \in \mathbb{N})$.

## 2.35 246. Séries de Fourier. Exemples et applications.

*Intro :* parler de l'équation de la chaleur ; historiquement c'est pour la résoudre qu'ont été introduites les séries de Fourier.

*Plan :*
I] Définitions et préliminaires

1. Définitions GOU + OXEan2
2. Propriétés des coefficients de Fourier Z-Q
3. Convolution et identités approchées OBJ

II] Problèmes de convergence OBJ + Z-Q

1. Convergence au sens de Cesàro
2. $L^2$
3. Convergence ponctuelle

III] Applications

1. Régularité Z-Q
2. Calcul de sommes GOU
3. Formule sommatoire de Poisson GOU
4. Résolution de l'équation de la chaleur OXE4

*Dvlpts :*
Formule sommatoire de Poisson GOU
Théorème de Fejér Z-Q + H-L

## 2.36 247. Exemples de problèmes d'interversion de limites.

*Plan :* + HAU

I] Limites et régularité

1. Limite et continuité POM + GOU
2. Limite et dérivation POM + GOU + OBJ

II] Limites et intégrales

1. Théorème de Beppo-Levi et conséquences B-P
2. Intégrales dépendant d'un paramètre Z-Q + OBJ
3. Intégrales doubles POM + Z-Q

III] Limites et séries

1. Conséquences directes des théorèmes de régularité POM (+ GOU pr taubérien)
2. Séries doubles GOU + OXEalg1 (Bell)

*Dvlpts :*

Nombres de Bell OXEalg1
Théorème taubérien fort GOU

*Questions :*

1) Pourquoi $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arctan(x/n) \end{array}\right.$ ne converge pas uniformément vers $x \mapsto 0$ ?

2) Soit $(f_n)$ une suite de fonctions à valeurs réelles définies sur un ouvert de $\mathbb{R}$ et dérivables qui converge simplement vers une fonction $f$ et telle que $(f_n')$ converge uniformément. Alors que peut-on dire sur $f_n$ et $f$ ?

3) À l'aide du théorème de convergence monotone, montrer l'interversion de sommes pour une famille de nombres réels positifs.

4) On a : $\left\{\begin{array}{l} f_n \xrightarrow{\text{CVS}} f \\ |f_n| \leq g_n \\ g_n \xrightarrow[n]{L^1} g \text{ et pp} \end{array}\right.$. Peut-on en déduire $f \in L^1$ ?

5) Pour $x \in [0, \pi]$, que peut-on dire de $\lim\limits_{n \to +\infty} [\sin(nx)]^2$ ?

*Réponses :*

1) car $\lim_{n} \lim_{x \to +\infty} \neq \lim_{x \to +\infty} \lim_{n}$.

2) $f$ est dérivable et $f_n$ converge uniformément vers $f$ d'après le théorème d'Ascoli.

3) Considérer $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sum_{j=0}^{n} a_{x,j} \end{array} \right.$ .

4) 1ère démo : $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $g_{\varphi(n)} \leq h \in L^1$ et alors $\forall n, |f_{\varphi(n)}| \leq h$, d'où : $f \in L^1$.

5) $\frac{1}{2}$ dans $L^1$, et même au sens des distributions.

## 2.37 249. Suites de variables de Bernoulli indépendantes.

*Plan :*

I] Suite de va de Bernoulli indépendantes MOR

1. Loi de Bernoulli et jeu du pile ou face
   déf, caractérisation de la loi, esp, variance, illustration avc le jeu de pile ou face
2. Variables de Rademacher CAN
3. Jeu du pile ou face répété : loi binomiale
   avec Weierstrass (dvlpt1) Z-Q
4. Théorème des évènements rares : loi de Poisson OUV
5. Attente d'un évènement : loi géométrique

II] Illustrations

1. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ COT
2. Ruine du joueur OUV
3. Estimation des grds écarts ? ? ?

III] Existence d'une suite de va indptes d'une loi donnée OUV

IV] Statistiques CAD

*Dvlpts :*

Weierstrass avec probas Z-Q

Rademacher CAN + Z-Q

## 2.38 253. Utilisation de la notion de convexité en analyse.

*Plan :*

I] Introduction à la notion de convexité

1. Définition et premières propriétés TES + BER
2. Enveloppe convexe GOU

II] Inégalités

1. Quelques inégalités classiques BER + GOU
2. Espaces $L^p$ BER + COT
3. Inégalité de Kantorovitch OXEan3

III] Optimisation

1. Fonctions convexes et extremums TES + OBJ + OXEalg3 (J-L)
2. Théorème de projection OBJ
3. Méthode de Newton TES + ROU

IV] Autres applications

1. Théorème des points fixes TES + ROU
2. Processus de Galton-Watson COT

*Dvlpts :*

Processus de Galton-Watson COT
Ellipsoïde de John-Loewner OXEalg3

*Remarques :*

– leçon très vaste donc possibilité de la penser comme on veut et il y a plein de développements possibles,
– faire des dessins pour illustrer des exemples et le lemme des trois pentes.

*Questions :*

1) Pourquoi la projection sur un convexe fermé est-elle 1-lipschitzienne ?

2) Peut-on généraliser Stampacchia au cas complexe ?

3) Application de Stampacchia ?

4) Préciser le problème de l'obstacle.

5) Peut-on utiliser le théorème de Stampacchia pour trouver la solution ? (en s'inspirant de la démo, en approchant la solution)

6) Y a-t-il moyen d'optimiser la convergence en jouant sur $\rho$ (paramètre dans la démo de Stampacchia) ?

7) En pratique, est-il facile de voir si une fonction est convexe en utilisant une hessienne ?

8) En dimension infinie, quid de la convexité ?

9) Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ ($E$ evn) convexe et majorée. Est-elle localement minorée ? (ie : minorée sur chaque boule)

10) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et majorée. Alors $f$ est constante : vrai ou faux ?

11) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et minorée. Alors $f$ est constante : vrai ou faux ?

12) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et majorée. Alors $f$ est décroissante : vrai ou faux ?

13) Construire une application linéaire non continue sur $\mathbb{R}$ ($\pm$ explicitement avec le lemme de Zorn)

*Réponses :*

1) $< p_K(u) - u, p_K(u) - w > \leq 0, \ \forall w \in K$. Prendre $w = p_K(v)$ pour $u$ et $w = p_K(u)$ pour $v$ puis sommer et utiliser Cauchy-Schwarz

2) a priori non

3) minimisation d'énergie

4) exemple en dim 1 (graphe d'une bosse !) : y a-t-il une position de la corde (élastique) qui minimise sa longueur ? longueur=$\int\limits_0^1 \sqrt{1 + u'^2(x)}\mathrm{d}x$ (pour le voir, considérer un petit élément $\mathrm{d}x$ et la variation de $u$).

5) Oui avec le théorème du point fixe

6) minimiser $\rho$ : oui c'est possible. le faire en exo !

7) c'est compliqué quand on a une grosse matrice mais il existe une technique avec trace et déterminant en dimension 2

9) Oui, soit $x \in B(a,r)$, $M := \sup f$. On a :

$$\begin{aligned} f(a) &= f(\frac{1}{2}(a-(x-a)) + \frac{1}{2}(a+(x-a))) \\ &\leq \frac{1}{2}f(a-(x-a)) + \frac{1}{2}f(a+(x-a)) \\ &\leq \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}f(x) \end{aligned}$$

10) Vrai

11) Faux, contrex : $x \longmapsto \mathrm{e}^x$

12) Faux, avec le lemme des trois pentes, en faisant tendre qqch vers $+\infty$

13) cf 'Quelques exemples et contre-exemples'

## 2.39 260. Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

*Intro :* CAN p110

*Plan :*

I] Notions d'espérance, de variance et de moments COT + B-L + CAN

1. Définitions
2. Premières propriétés + Z-Q (pr dvlpt Weierstrass)

II] Fonctions caractéristiques et transformée de Laplace CAN + COT + B-L

1. Fonction caractéristique
2. Fonction génératrice
3. Transformée de Laplace B-L

III] Applications

1. Comportement asymptotique de variables CAN
2. Espérance conditionnelle COT + CAD
3. Les moments en statistique CAD (+ EMV)
4. Vecteurs gaussiens COT + CAD

*Dvlpts :*

Weierstrass avec probas Z-Q
EMV (non référencé)

## 2.40 261. Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

*Intro :* CAN p209

*Cadre :*$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé

*Plan :*
I] Fonction caractéristique

1. Définition et propriétés CAN (+COT)
2. Fonction caractéristique et moments COT + B-L
3. Indépendance de variables CAN + COT
4. Inversion CAN + COT

II]Transformée de Laplace B-L
III] Fonction génératrice (CAN)+COT
IV] Convergence en loi

1. Définition et caractérisation CAN (+Z-Q pr Rademacher)
2. TCL et application aux statistiques CAD

*Dvlpts :*
Processus de Galton-Watson COT
Rademacher CAN + Z-Q

## 2.41 262. Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

*Cadre :* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et les va à valeurs ds $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$

*Plan :*

I] Définitions et propriétés COT

1. Les différentes convergences
2. Liens entre les convergences

II] Convergence ps et applications

1. Évènements asymptotiques COT
2. Applications COT + CAN (+Rademacher avec CAN et Z-Q)

III] Convergence en loi et applications

1. Propriétés COT
2. Applications
   TCL, Slutsky, Student, test du $\chi^2$ CAD, (+EMV), thm des evenmts rares OUV

*Annexe :* schéma des liens des cvgces p148 COT

*Dvlpts :*

EMV (non référencé)
Rademacher CAN + Z-Q

*Remarques :*

- $(X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X) \Leftrightarrow (\forall n_k, \exists n_{k_p}$ telle que $X_{n_{k_p}} \xrightarrow{\text{ps}} X)$,
- si $(X_n)$ est une suite de va normales qui converge en proba alors elle converge dans $L^p$ pour tout $p$,
- pourquoi pas faire un développement sur les lois normales,
- parler du théorème des moments (cf B-L),
- connaître des contre-exemples pour toutes les implications de convergence (cf COT),
- parler de l'intérêt du lemme de Slutsky (convergence d'estimateurs),
- parler de convergence dans $L^\infty$ (avec la définition du sup essentiel) (référence pour ça ?).

*Questions :*

1) Démontrer $(X_n \xrightarrow{\text{ps}} X) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(\overline{\lim}\{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0)$.

2) Peut-on démontrer le théorème de Cantelli (loi des grands nombres pour $\mathbb{E}(X^4) < +\infty$ ?) en se plaçant seulement dans $L^3$ avec des va positives ?

3) L'hypothèse $L^1$ est-elle optimale pour la loi des grands nombres ?

4) Soient $(X_i)$ une suite de va iid, $S_n := \sum_{i=1}^{n}$ tels que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n]{\text{ps}} c \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{X_n}{n}$ converge et préciser la limite.

5) Mêmes hypothèses qu'en 4) : si on fixe $\varepsilon > 0$, alors que peut-on dire de $\sum_n \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n}\right| > \varepsilon\right)$ ?

6) Mêmes hypothèses qu'en 5) : si on remplace $X_n$ par $X_1$ dans la somme, qu'est-ce que cela change ?

7) À l'aide du théorème de Fubini-Tonelli, exprimer l'espérance d'une va sous forme d'une intégrale.

8) À l'aide de 6) et 7), montrer que $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$.

9) La convergence ps est-elle métrique ?

10) Prouver que $||.||_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} ||.||_\infty$.

11) Le *continuous mapping theorem* (théorème de convergence en loi en composant par une fonction) est-il valable pour les autres convergences ?

12) Preuve du théorème de Lévy ?

13) Démonstration du TCL ?

*Réponses :*

1)

$$\begin{aligned}
X_n \xrightarrow{\text{ps}} X &\Leftrightarrow \mathbb{P}(X_n \to X) = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{p\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} \left\{|X_k - X| \leq \frac{1}{p}\right\}\right) = 1 \\
&\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}\left(\liminf \left\{|X_n - X| \leq \frac{1}{p}\right\}\right) = 1 \\
&\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\left(\liminf\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}\right) = 1 \\
&\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\left(\limsup\{|X_n - X| > \varepsilon\}\right) = 0
\end{aligned}$$

2) C'est trivial car les $X_i$ sont centrées.

3) Oui car LGN $\Rightarrow \mathbb{E}(X_1) < +\infty$.

4) $\dfrac{X_n}{n} = \dfrac{S_n - S_{n-1}}{n} \xrightarrow[n]{\text{ps}} 0$.

5) Si la série est divergente alors d'après le lemme de Borel-Cantelli : $\mathbb{P}\left(\limsup\left\{\left|\dfrac{X_n}{n}\right| > \varepsilon\right\}\right) = 1$, ce qui est absurde vu 4).

6) Rien car les $X_i$ sont de même loi.

7) $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq t)\mathrm{d}t$

8) Une comparaison série-intégrale nous permet d'obtenir : $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$.

9) Non.

10) *indice :* montrer que $(||.||_p)_p$ est croissante en $p$. (penser à Hölder)
Une fois cela établi, on en déduit que $(||X||_p)_p$ admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ (où $X$ est une va). On suppose que $||X||_\infty < +\infty$. Soit $M \geq 0$ tel que $M < ||X||_\infty$. On pose $A := \{|X| > M\}$. Alors $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{E}(|X|^p) \geq \mathbb{E}(|X|^p \mathbb{1}_A) > M^p\mathbb{P}(A)$. D'où : $||X||_p \geq \mathbb{P}(A)^{1/p}M$ et donc $\lim\limits_p ||X||_p \geq ||X||_\infty$. En outre : $||X||_p \leq \mathbb{E}(||X||_\infty^p)^{1/p} = ||X||_\infty$.

11) ps : oui ; en proba : oui.

12) Il y a un sens trivial et l'autre sens est plus dur, il fait intervenir des suites tendues.

13) Lévy + continuous mapping theorem avec des va centrées réduites

## 2.42 263. Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

*Cadre :* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $X$ une va à valeurs ds $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

*Plan :*
I] Introduction aux variables aléatoires à densité CAN + COT + B-L

1. Définitions et premières propriétés (+Rademacher)
2. Opérations sur les densités
3. Fonctions caractéristiques et densité

II] Utilisation des lois à densité en statistique CAD

1. Maximum de vraisemblance (+dvlpt !)
2. Théorème central limite
3. Modèle linéaire gaussien

*Dvlpts :*
Rademacher CAN + Z-Q
EMV (non référencé)

## 2.43 264. Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

*Cadre :* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé

*Plan :*

I] Introduction aux variables discrètes

1. Définition COT
2. Exemples fondamentaux
   loi uniforme, Bernoulli (+ Z-Q), binomiale, hypergéométrique, géométrique, Poisson MOR, multinomiale COT

II] Caractéristiques et phénomènes

1. Fonction génératrice (CAN)+COT
2. Marche aléatoire COT
3. Ruine du joueur OUV

III] Théorèmes limites

1. Poisson OUV
2. LGN et TLC COT
3. Utilisation en statistiques CAD

*Dvlpts :*

Weiertstrass avec probas Z-Q
Processus de Galton-Watson COT

*Remarques :*

– parler des fonctions génératrices et donner des exemples,
– parler de marches aléatoires, ruine du joueur, urnes.

*Questions :*

1) Pour $X_n \sim \mathcal{B}(n, \lambda/n)$, alors quelle est la limite en loi de $\dfrac{X_n - \lambda}{\sqrt{n}}$ ?

2) Définition d'une fonction génératrice ?

3) Calculer la fonction génératrice de $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

4) Comment montrer la loi faible des grands nombres ?

5) Preuve de la loi forte des grands nombres ?

6) Considérons un vote où il y a deux candidats $A$ et $B$ avec $a + b$ électeurs. $A$ a obtenu $a$ votes et $B$ en a obtenu $b$. On suppose que $A$ a été élu (ie $a > b$). Calculer la probabilité que pendant tout le dépouillement des voix $A$ était en tête.

*Réponses :*

1) (c'est le théorème de Moivre-Laplace) Utiliser le TCL

2) cf COT

4) utiliser l'inégalité de Tchebychev

5) C'est dur et c'est fait dans CAN

6) (c'est le théorème du scrutin) cf COT

# 3 Quelques remarques générales

Ne pas avoir l'air blasé et ne pas dire au jury : "j'ai dû recopier sans faire attention".

Ne pas se laisser déstabiliser par les questions trop dures et montrer qu'on a confiance en soi.

Ne pas dire au jury "c'est logique comme question" à propos d'une question posée par le jury.

Ne pas dire à propos d'un résultat "c'est assez important" !

Éviter le terme '*Généralités*' comme nom de partie : ça fait un peu fourre-tout.

Ne pas dire *"récurrence que je n'ai pas vérifiée"* mais plutôt *"récurrence que j'admets"*.

Ne pas mettre de théorème s'il est 'sec', ie : sans application, sans mise en situation concrète.

Pour les développements :
- commencer par expliquer la stratégie de la preuve et les principaux résultats intermédiaires structurant le développement
- si un gros résultat est utilisé/admis pour la démonstration alors le dire lors de la présentation et l'écrire

En algèbre linéaire, commutative, on s'intéresse aux idéaux maximaux, principaux. Et dès qu'on introduit un anneau, on regarde les inversibles et les idéaux.

Pour les leçons concernant les endomorphismes nilpotents : toujours citer le théorème de Jordan et préciser la structure en termes de blocs de Jordan sans se contenter d'indiquer que la première diagonale supérieur est remplie de 0 et de 1 sans autre précision !

Ne pas 'survendre' Dunford !

Pour les leçons concernant les séries de Fourier : on commence par énoncer le théorème de Féjer et la convergence $L^2$. La convergence ponctuelle : c'est plus dur, on met ça après !

On ne dit pas "$f$ est $\mathcal{C}^1$ en $\alpha$", où $\alpha$ est un point.

À savoir :
- l'ensemble $\{$points de discontinuité d'une fonction monotone$\}$ est au plus dénombrable
- Une fonction croissante $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dérivable p.p. et sa dérivée appartient à $L^1(a,b)$
- Un métrique compact est séparable

# 4 Quelques exemples et contre-exemples

## Action non linéaire d'un groupe sur un espace vectoriel

On fait agir $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ avec :
pour $x \in \mathbb{R}$ : $0 * x = x$, $1 * x = \dfrac{1}{x}$ (si $x \neq 0$) et $1 * 0 = 0$.

Alors $1 * (1 + 1) = 1/2 \neq 2 = 1 * 1 + 1 * 1$.

## Une autre action non linéaire d'un groupe sur un espace vectoriel

On fait agir $\mathbb{R}$ sur lui-même avec : pour $x, y \in \mathbb{R}$ : $x * y = x + y$. Alors $1 * (1 + 1) = 3 \neq 4 = 1 * 1 + 1 * 1$.

## Stabilisateur distingué

Pour une action triviale, un stabilisateur est le groupe tout entier donc est distingué, ou encore : action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par translation : le stabilisateur de $\overline{1}$ est trivial donc distingué.

## Stabilisateur non distingué

Action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par multiplication à gauche :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ stabilise $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, mais $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

## Matrice non diagonalisable produit de deux matrices diagonalisables pour $n$=2 dans $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## Matrice non normale

$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est telle que ${}^tAA \neq A{}^tA$.

## Anneau principal non euclidien

$\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}]$ et $\mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2+1)$, cf PER.

## Anneau d'entiers quadratiques non factoriel

$\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ : $(1+i\sqrt{5})(1-i\sqrt{5}) = 6 = 2 \times 3$.

## Extension de corps de degré infini

$\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$-ev.

## Norme matricielle non subordonnée

Norme de Frobenius : $A \longmapsto \sqrt{\mathrm{tr}(A^t A)}$ et regarder avec l'identité.

## Polynôme non nul valant zéro en tout point de l'ensemble considéré

$X^q - X$ sur le corps à $q$ éléments.

## Application linéaire non continue sur $\mathbb{R}$

On considère $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$-ev. Il n'est pas de dimension finie. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $E := \{q + \sqrt{2}p \mid q, p \in \mathbb{Q}\}$ $\mathbb{Q}$-sev de $\mathbb{R}$. D'après le lemme de Zorn, il existe $E_2$ complémentaire algébrique de $E$. Puis $\phi(x = q + \sqrt{2}p + x_2) := p + \sqrt{2}q + x_2$. $\phi$ n'est pas continue en $\sqrt{2}$.

## Fonction continue que sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{p} & \text{si } x = \frac{p}{q},\ \mathrm{pgcd}(p,q) = 1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

## Fonction continue sans point fixe

$$f : \begin{cases} [0,1] \bigcup [2,3] & \longrightarrow & [0,1] \bigcup [2,3] \\ x \in [0,1] & \longmapsto & x+2 \\ x \in [2,3] & \longmapsto & x-2 \end{cases}$$

## Fonction décroissante sans point fixe

cf TES p139 :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x \in [0,1[ & \longmapsto & 1 \\ x \in \{1\} & \longmapsto & 0 \end{array} \right.$$

## Fonction lipschitzienne sans point fixe définie sur un non-convexe

cf TES p324 :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}^1 & \longrightarrow & \mathcal{S}^1 \\ x & \longmapsto & -x \end{array} \right., \text{ où } \mathcal{S}^1 \text{ est le cercle-unité de } \mathbb{R}^2.$$

## Fonction lipschitzienne sans point fixe définie sur un non-compact

cf TES p324 :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array} \right.$$

## Fonction continue dont une itérée est contractante

cf TES p337 :
pour $E$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ ne contenant ni 0 ni 1, posons $f = \mathbb{1}_E$. $f$ est discontinue et $f \circ f$ est contractante.

## Fonction qui a un taux convergent mais dont la dérivée n'a pas de limite

cf TES p80 :
$f(x) := x + \sin x$. $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 1 lorsque $x$ tend vers $+\infty$ et $f'(x) = 1 + \cos x$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

## Fonction qui vérifie le TVI mais non continue

$f(x) := x^2 \sin(1/x)$ est continue et dérivable. $f'$ vérifie le TVI d'après le théorème de Darboux mais elle est non continue.

## Fonction continue pour une norme et pas pour une autre

Sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, l'application $f \longmapsto f(0)$ est :

- continue pour $||.||_\infty$ : $|f(0)| \leq ||f||_\infty$,
- non continue pour $||.||_1$, avec $f_n(t)$ : $\begin{cases} 1-nt, & \text{si } t \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0, & \text{si } t \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$.

  En effet : $f_n(0) = 1$ mais $||f_n||_1 \underset{n}{\longrightarrow} 0$.

## Non-équivalence de deux normes

Sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, considérons $f_n(x) := x^n$. Alors $||f_n||_1 = \dfrac{1}{n+1} \underset{n}{\longrightarrow} 0$ et $||f_n||_\infty = 1$.

## Suite de fonctions qui converge simplement mais pas uniformément

Soit $f_n(x) := x^n$ mais définie cette fois que sur $[0,1[$. Alors $f_n$ converge simplement vers la fonction nulle. Mais il n'y a pas convergence uniforme : soit $\varepsilon \in ]0,1[$, soit $N \in \mathbb{N}$. Alors $\exists \alpha \in ]\varepsilon, 1[$. Posons $a := \sqrt[N]{\alpha} \in ]0,1[$ et alors $f_N(a) = \alpha > \varepsilon$.

## Suite double qui admet une limite en $p$ mais pas en $n$

$$u_{n,p} := \frac{(-1)^n}{p}.$$

## Fonction dérivable de tout ordre mais non analytique

$\begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$. (regarder son développement de Taylor)

## Fonction continue et nulle part dérivable

On note $\Delta$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 1-périodique, dont la restriction à [-$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}$] vérifie $\Delta(x) = |x|$. Alors $f \ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^p}\Delta(2^p x) \end{array} \right.$ est continue mais n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$. cf GOU pp84-85

Autre exemple : fonction de Weierstrass
(http : //fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_de_Weierstrass)

## Fonction uniformément continue mais non lipschitzienne

$f \ : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$. $f$ est uniformément continue car pour $y \geq x$, on a : $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y-x}$ et $f$ n'est pas lipschitzienne car $\dfrac{f(y)-f(0)}{y-0} = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ et donc le rapport tend vers $+\infty$ en 0 et ne peut être majoré.

## Fonction qui a une série de Taylor divergente

$f(x) := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}^{in^2x}$. $f$ est bien définie car uniformément convergente, puis calculer ses dérivées,...

## Série qui converge uniformément mais pas normalement

cf POM p172 : considérer la série de terme général : $f_n(x) := x|\sin(\frac{\pi}{x})|\mathbb{1}_{[1/(n+1),1/n]}(x)$.

## Développement asymptotique qui n'est pas un développement limité

$$\sin(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - \frac{x^{3/2}}{6} + o(x^{3/2})$$

## Série trigonométrique qui n'est pas une série de Fourier

cf Z-Q 4e édition p121

## Espace préhilbertien non complet

$A := \{(a_n) \in l^2(\mathbb{N}) \mid \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N : a_n = 0\}$ est préhilbertien non complet : considérons $a^p := (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{p}, 0, \dots, 0, \dots)$. Nous avons :

$$\text{pour } p > q : ||a^p - a^q||_2^2 = \sum_{i=q+1}^{p} \frac{1}{i^2} < \sum_{i=q+1}^{+\infty} \frac{1}{i^2}.$$

Donc $(a^p)$ est de Cauchy. Mais s'il existe $a \in A$ telle que $||a^p - a||_2 \underset{p}{\longrightarrow} 0$ alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N : a_i = 0$ et

$$\text{pour } p > N, ||a^p - a||_2^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{i} - a_i\right)^2 + \sum_{i=N+1}^{p} \frac{1}{i^2},$$

mais le deuxième terme ne tend pas vers zéro lorsque $p$ tend vers $+\infty$.

## Fermé borné n'implique pas compact en dimension infinie

cf POM : Considérons $\overline{\mathcal{B}(0,1)}$ de $l^2(\mathbb{N})$. Soit $(e^p) \in l^2(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ définie par : $e_n^p := \delta_{n,p}$. Pour $n \neq p$, $||e^p - e^n||_2 = \sqrt{2}$ : donc $(e^p)$ n'admet pas de sous-suite convergente.

## Convergence csqce du thm de Banach-Steinhaus

Dans $l^2(\mathbb{N})$, posons $T_n((a_i)_i) := (\delta_{i \leq n} a_i)_i$. On a $\forall x \ : \ T_n(x) \underset{n}{\longrightarrow} x$ mais $|||T_n - \mathrm{id}||| = 1,\ \forall n$.

## Pour $d$ et $d'$ deux mesures équivalentes, une suite de Cauchy pour l'une ne l'est pas forcément pour l'autre

Sur $\mathbb{R}^+$, posons $x_n := n$ et $d(x,y) := |\arctan x - \arctan y|$. $(x_n)$ est une suite de Cauchy pour $d$ mais pas $|.|$. On a le même comportement autour de 0 pour $d$ et $|.|$ donc même topologie induite.

## Forme linéaire non continue

Sur $\mathbb{R}[X]$ muni de $||.||_\infty$ sur [0,1], posons : $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(2) \end{array} \right.$. Alors $\varphi(X^n) = 2^n$.

## Suite de Cauchy $(f_n)$ de $\mathrm{L}^p$ ($p \in [1, +\infty[$) qui ne converge pas p-p

Posons $f : \begin{cases} \left[0, \frac{1}{2}\right] & \longrightarrow \{1\} \\ \left[\frac{1}{2}, 1\right] & \longrightarrow \{0\} \end{cases}$. Puis contracter $f$ d'un demi et faire glisser pour obtenir $f_n$ et etc. La suite obtenue est de Cauchy mais ne converge pas p-p.

## Suite absolument sommable mais pas sommable

$u_n := \dfrac{1}{2^n} e_n$, où $e_n := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (avec 1 au $n^e$ coefficient). $(u_n)$ est absolument sommable avec $||.||_\infty$ et pas sommable dans $c_{0,0}(\mathbb{N})$ car elle l'est dans $c_0(\mathbb{N})$ vers $(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \ldots)$ qui n'est pas dans $c_{0,0}(\mathbb{N})$.

## Suite sommable qui admet une sous-famille non sommable

$\begin{cases} v_{2n} & = \dfrac{1}{2^n} e_n \\ v_{2n+1} & = -\dfrac{1}{2^n} e_n \end{cases}$. $(v_n)$ est sommable car elle est absolument sommable et donc sommable dans $c_0(\mathbb{N})$ (car complet) mais $(v_{2n})$ n'est pas sommable.

## Suite sommable mais pas absolument sommable

$u_n := \dfrac{1}{n+1} e_n$ dans $c_0(\mathbb{N})$.

## Exemple typique de famille pas absolument sommable avec les séries de Fourier

$u_n := \dfrac{\sin(nx)}{nx}$

## Contre-exemple au théorème de Brouwer en dimension infinie

Soient $E := l^2(\mathbb{N})$ et $B := B(0,1)$ de $E$. Posons $T(u)_n := \begin{cases} u_{n-1} & , n > 0 \\ \sqrt{1 - ||u||_2^2} & , n = 0 \end{cases}$.
Alors $T$ est continue et $T(B) \subset B$ mais $T$ ne possède pas de point fixe. cf TES pp414-415 pour le cas général en dimension infinie.

## Non-unicité des solutions du problème de Cauchy dans le cas non-lipschitzien

cf TES p609 :
L'équation $y' = 4y^{1/4}$ admet une infinité de solutions vérifiant $y(0) = 0$, par exemple pour $c \in \mathbb{R}_+^*$ : $y(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0, & \text{si } x < c, \\ 3^{4/3}(x-c)^{4/3}, & \text{sinon.} \end{array} \right.$.

## Contre-exemple au théorème intégral de Cauchy sans la simple connexité

http : //fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_intégral_de_Cauchy

## Ensemble triadique de Cantor

cf OBJ :

Soit $I := [0,1]$. On construit une suite de parties de $I$ par récurrence :
- $K_0 = I$
- pour $K_n$ une réunion finie de segments disjoints $K_n = \bigcup\limits_k [a_k, b_k]$, on pose

$$K_{n+1} := \bigcup_k \left( \left[ a_k, a_k + \frac{b_k - a_k}{3} \right] \cup \left[ a_k + 2\frac{b_k - a_k}{3}, b_k \right] \right)$$

On pose alors $K := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ l'ensemble de Cantor.

## L'escalier du diable, ou fonction de Lebesgue

cf GOUanal : $\psi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ telle que $\psi(0) = 0$ et $\psi(1) = 1$. Sur $K$ : $\psi(\sum 2\frac{\beta_k}{3^k}) := \sum \frac{\beta_k}{2^k}$, avec $\beta_k \in \{0,1\}$ et localement constante sur ${}^cK$. $\psi$ est continue, dérivable p.p. et de dérivée presque partout nulle.

## Contre-exemple au théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym lorsque les mesures ne sont pas $\sigma$-finies

$\Omega := [0,1]$, $\tau := \mathrm{d}x$, $\mu :=$mesure de comptage. Si $\tau = h\mathrm{d}\mu$ alors si $h \neq 0$ alors $\exists \eta > 0$ tel que $\mu([h > \eta]) > 0$. on a : $1 \geq \int\limits_{[0,1]} h\mathrm{d}\mu \geq \eta\mu([h > \eta])$ alors card$([h > n]) < +\infty$ et donc $\tau([h > n]) = 0$. Or : $\tau([h > \eta]) = \int\limits_{[h>\eta]} h\mathrm{d}\mu > 0$ ! !

## Hypothèse "E complet" indispensable pour thm de Baire

E $:=\mathbb{R}[X]$, $||\sum a_i X^i|| := \max_i |a_i|$, $P_n := 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k}$, $(P_n)$ est de Cauchy donc E n'est pas complet. En outre : $\forall n,\ \mathbb{R}_n[X]$ est fermé et d'intérieur vide.

## Tableau récapitulatif des propriétés des $L^p$

| | réflexif | séparable | Espace dual |
|---|---|---|---|
| $L^p\ (1 < p < +\infty)$ | *Oui* | *Oui* | $L^q$, où $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ |
| $L^1$ | *Non* | *Oui* | $L^\infty$ |
| $L^\infty$ | *Non* | *Non* | contient strictement $L^1$ |

# 5 Applications et intérêt de certains développements

## 5.1 Algèbre

Loi de réciprocité quadratique C-G : calcul du symbole de Legendre.

Diagrammes de Young C-G : réduction de Jordan. cf MNE pp59-60 pour la résolution de $X^2 = A$. Il y a également un lien avec les représentations, cf COL.

Formes de Hankel C-G : pour une application concrète de l'usage du comptage de racines d'un polynôme, aller voir Gantmacher,tome1 et Dieudonné,calcul infinitésimal. Pour l'appliquer sur un petit exemple, pourquoi pas $X^3 + X = X(X+i)(X-i)$. Calculs 'rapides' et résultat immédiat.

Sous-algèbres réduites de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ MNE : on déduit immédiatement de ce résultat que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ : $A$ est diagonalisable ssi $\mathbb{C}[A]$ est réduite.

Simplicité de SO(3) OXEalg3 : rapport du jury : "*De très bons candidats proposent de démontrer la simplicité du groupe SO3(R) comme application de la connexité. Ils semblent désemparés lorsque le jury demande d'établir que ni SO2(R), ni SO4(R) ne sont simples*".

## 5.2 Analyse

Théorème d'échantillonnage de Shannon WIL : travaux de Claude Shannon sur la communication et transmission de l'information.

Théorème de sélection de Helly OXEan2 : en application, il y a le théorème de Prohorov, cf COT p114.

Théorème de Dini OXEan2 : en application, il y a le théorème de Glivenko-Cantelli NOU. Il y a une autre application en rapport avec la racine carrée (et qui elle-même est utile pour le théorème de Weierstrass) dans H-L. Il existe des contre-exemples lorsqu'on ne se place pas sur un compact ou lorsqu'on perd la monotonie des fonctions considérées.

Formule sommatoire de Poisson GOU : en application, il y a une égalité dans GOU qui sert pour l'étude de la fonction thêta de jacobi utilisée en physique quantique.

# 6 Remarques et autres concernant l'épreuve de modélisation option A : probabilités-statistiques

*Remarques :*

- attention à ne pas faire une lecture/exposé linéaire du texte : il faut apporter quelque chose au texte, se poser des questions, creuser
- pour éviter la paraphrase : ne pas tenir le texte dans la main et même éviter de le consulter ; écrire sa trame d'exposé sur une autre feuille
- être très clair sur les hypothèses mathématiques faites
- bien développer les hypothèses et être critique (et discuter des différentes lois possibles)
- bien expliquer et décrire les phénomènes physiques
- bien distinguer la partie *exposé* où on doit se comporter comme un prof faisant son cours et la partie *discussion* où on peut dire ce qu'on a réussi ou pas à démontrer
- dire clairement ce qui justifie l'introduction de l'aléa
- écrire le plan au tableau et indiquer (avec une * par exemple) les parties contenant de la simulation
- écrire un titre au tableau (pas forcément celui du texte, on peut le modifier)
- écrire titre+plan avant de faire un laïus introductif
- se focaliser sur une démo suffisamment longue et l'exposer de manière rigoureuse et intégrale (ou deux petites démos)
- faire des dessins au tableau dès que possible (cette remarque vaut également pour les oraux d'algèbre et analyse)
- égrainer les simulations dans l'exposé (et ne pas faire une dernière partie avec toutes les simulations !)
- à la fin de l'exposé : faire un(e) résumé/conclusion avec points forts/faibles du modèle
- avant la démo mathématique : pourquoi pas mettre une simu pr montrer le côté intuitif (ou non !) du résultat qu'on va démontrer
- si une propriété est trop difficile à démontrer alors on peut affaiblir les hypothèses
- vraiment insister sur les limites du modèle : domaine d'application, cas où cela ne fonctionne pas
- pour les simulations : faire varier les paramètres des lois (et utiliser plutôt les valeurs extrêmes)
- pour les simulations : ne pas tracer une trajectoire mais un ensemble/faisceau de trajectoires ou à un instant $n$ élevé faire un histogramme de $X_n$ pour différentes trajectoires simulées
- parler de stats (même des choses banales) dès que et autant que possible

- parler d'intervalles de confiance dès qu'ils sont implicitement présents (par ex : Monte-Carlo)
- iid des va + moments $\rightarrow$ restriction du domaine d'application
- connaître les lois classiques et leur interprétation concrète
- pour chaîne de Markov : faire un dessin du graphe de transition
- présence du laplacien dans une équation : cela sous-entend que le solide considéré est homogène ; pour un solide inhomogène, on a des équations avec des dérivées secondes et des coefficients non constants
- une marche aléatoire de pas $h$ devient un *mouvement brownien* lorsque $h \to 0$
- connaître le théorème ergodique et bien sûr les théorèmes de convergence 'classiques' portant sur les martingales
- loi géométrique "=" loi exponentielle discrète
- connaître la loi des évènements rares (binomiale qui tend en loi vers une poisson)
- connaître la méthode des moindres carrés
- maximisation de la vraisemblance : on cherche le(s) paramètre(s) qui décri(ven)t au mieux le comportement des observations et donc qui maximise(nt) la vraisemblance (voir avec un dessin ça parle) (c'est l'idée sous-jacente à l'EMV)
- somme de petites perturbations iid : on a à peu près une loi normale d'après le TCL
- savoir justifier qu'une famille de va est une chaîne de Markov ou non
- savoir simuler une loi normale avec des lois uniformes en dimension quelconque (cf COT)

*Autres :*

Si $U$ suit la loi uniforme sur $[0,1[$ alors $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Méthode de Box-Muller : transformation de variables uniformes en variables normales (en attente d'une meilleure référence :
http : //fr.wikipedia.org/wiki/Méthode_de_Box − Muller).

Exemple de chaîne de Markov irréductible et de période 2 (ie non apériodique) : à deux états 1 et 2 et transitions : va de 1 à 2 avc proba=1 et va de 2 à 1 avc proba=1. Cette chaîne est de période 2 et admet une unique mesure stationnaire $(1/2, 1/2)$.

(chaîne irréductible et tr(matrice de transition)$\neq$0) $\Rightarrow$ (chaîne apériodique)
Condition suffisante mais pas nécessaire :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ : \ \text{matrice de transition d'une chaîne irréductible, apériodique et de trace nulle.}$$

La relation $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$ n'implique pas l'indépendance de $X$ et $Y$. Contre-exemple : si $X$ suit la loi de Cauchy alors $\varphi_{X+X} = \varphi_{2X} = \varphi_X^2$.

Exemple d'une va $X$ qui admet une valeur moyenne mais pas g(X) : cf CAN 4p112.

Exemple d'une va $X$ telle que sa fonction caractéristique n'est dérivable qu'une fois en zéro et $X$ est non intégrable : cf CAN p213.

La convergence en loi implique la convergence de la distance en variation totale sur un ensemble dénombrable (ou fini) mais pas sur un ensemble indénombrable, contre-exemple :

$$X \sim \mathcal{U}_{[0,1]}, \ X_n \sim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\frac{k}{n}}.$$

Un test statistique d'adéquation de loi à queue légère (cf texte l'armateur) :

Soit $A > 0$ fixé. Soit $\alpha > 2$ (pour que $X \in L^1$).
On écrit la densité de $X$ sous la forme (type loi de Pareto) :

$$f_\alpha(x) = C(\alpha)\frac{1}{x^\alpha}\mathbf{1}_{[A,+\infty[}(x)$$

$H_0 \ : \ \alpha \geq \alpha_0$ contre $H_1 \ : \ \alpha_0 > \alpha$.

$e(\alpha) := \mathbb{E}(X)$, et $\overline{X_n} \xrightarrow{ps} e(\alpha)$ et après regarder si $e$ est croissante ou décroissante puis broder...

Paradoxe de st pétersbourg : cf CAN p110.

**Catchphrases :**
- Espérance conditionnelle : cf CAD p181,
- EMV : cf CAD p45 plus un dessin.

# 7 Deux inclassables

## 7.1 Principe du min-max

*Référence :* Algèbre linéaire numérique, Grégoire Allaire & Sidi Mahmoud Kaber.

**Définition :** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On appelle *quotient de Rayleigh* de $A$ :

$$R_A : \begin{cases} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{< Ax, x >}{< x, x >} \end{cases}$$

**Proposition :** Notons $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de $A$ et notons également $(e_1, \ldots, e_n)$ des vecteurs propres de $A$ associés à $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Alors :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = \min_{x \perp e_1, \ldots, e_{i-1}} R_A(x) = \max_{x \perp e_{i+1}, \ldots, e_n} R_A(x).$$

**Théorème (de Courant-Fisher ou min-max) :**

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = \min_{a_1, \ldots, a_{n-i} \in \mathbb{R}^n} \max_{x \perp a_1, \ldots, a_{n-i}} R_A(x) = \max_{a_1, \ldots, a_{i-1} \in \mathbb{R}^n} \min_{x \perp a_1, \ldots, a_{i-1}} R_A(x).$$

## 7.2 Théorème de Perron-Frobenius

Pour $A$ irréductible positive, on a : $\rho(A) > 0$, $\rho(A)$ est une valeur propre simple de $A$ et il existe un unique vecteur $x$ de coordonnées positives tel que $Ax = \rho(A)x$ et $||x|| = 1$.

**Application aux chaînes de Markov :**

Si $P$ la matrice de transition est irréductible (et sous-entendu récurrente) alors il existe une unique mesure invariante $\mu$.

Si $P$ est irréductible et apériodique alors pour toute loi $\mu_0$ (représentant l'état initial), on a :

$$||\mu_0 P^k - \mu||_1 = O(\rho^k),\ \text{où } \rho := \max\{|\lambda| \text{ tels que } \lambda \in \sigma(P) \text{ et } \lambda \neq 1\}$$

# 8 Quelques développements

## 8.1 Diagrammes de Young et réduction de Jordan

Référence : *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*, Caldero-Germoni

Développement pour les leçons :
- 101. Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 150. Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
- 151. Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
- 153. Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
- 157. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Les définitions suivantes sont à mettre dans le plan :

Notons $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Considérons l'action par conjugaison de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Remarquons que cette action stabilise $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$. Nous parlerons alors d'*orbite nilpotente* : c'est une orbite de l'action restreinte à $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$, ou autrement dit une classe de similitude de matrices nilpotentes.

**Définition :** La *partition* d'un entier $n$ est une suite d'entiers naturels $\lambda = (\lambda_i)$ décroissante, nulle à partir d'un rang $m+1$ et dont la somme vaut $n$ : $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = n$.

**Définition :** Un *diagramme de Young* de taille $n$ associé à une partition $\lambda$ de $n$ est une représentation de $\lambda$ par $n$ cases juxtaposées de la manière suivante :

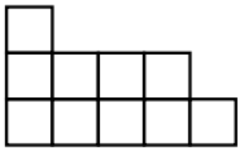


DIAGRAMME DE YOUNG DE (5,4,1)

où la $i^e$ ligne contient $\lambda_i$ cases. Le diagramme dual est le diagramme obtenu en mettant à la $i^e$ ligne le nombre de cases de la $i^e$ colonne du diagramme d'origine. Le diagramme dual peut être vu comme le diagramme symétrique par rapport à la première bissectrice.

**Définition :** Soit $p$ un entier non nul. Le *bloc de Jordan* de taille $p$ est la matrice :

$$J_p := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}).$$

Nous noterons également $J_\lambda$ la matrice avec des zéros et des blocs diagonaux qui sont les blocs de Jordan $J_{\lambda_i}$ de tailles respectives $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$

Montrons le résultat suivant :

**Théorème :** Pour $A$ et $B$ deux matrices nilpotentes de même taille, $A$ et $B$ sont dans la même orbite nilpotente si et seulement si leurs diagrammes de Young sont égaux. En particulier, $A$ est semblable à $J_{\lambda^*}$, où $\lambda^*$ est la partition associée au diagramme de Young dual de $A$.

*preuve :*

Notons $K_i := \ker(A^i)$.

Commençons par montrer le lemme suivant :

**Lemme :** $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $0 \leq \dim K_{i+1} - \dim K_i \leq \dim K_i - \dim K_{i-1}$.

*preuve du lemme :*

Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. La première inégalité est immédiate car $K_i \subset K_{i+1}$. Pour la deuxième, nous avons $AK_{i+1} \subset K_i$. Considérons alors les morphismes suivants :

$$\nu : \left\{ \begin{array}{ccc} K_{i+1} & \longrightarrow & K_i \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right. \text{ et } \pi : \left\{ \begin{array}{ccc} K_i & \longrightarrow & K_i/K_{i-1} \\ Y & \longmapsto & \overline{Y} \end{array} \right. .$$

Nous avons alors les égalités suivantes :

$$\ker(\pi \circ \nu) = (\pi \circ \nu)^{-1}(\{\overline{0}\}) = \nu^{-1}(\pi^{-1}(\{\overline{0}\})) = \nu^{-1}(K_{i-1}) = K_i.$$

D'où : $K_{i+1}/K_i \hookrightarrow K_i/K_{i-1}$ et donc $\dim(K_{i+1}/K_i) \leq \dim(K_i/K_{i-1})$.

Retour à la preuve du théorème : ainsi $(\dim(K_i))_i$ est une suite strictement décroissante avant de devenir stationnaire car si $K_i = K_{i+1}$ pour un certain $i$ alors avec l'inégalité des dimensions on obtient :

$$\mathbb{C}^n = K_n = K_{n-1} = \cdots = K_{i+1} = K_i.$$

Posons maintenant $\lambda_i := k_i - k_{i-1}$ (avec $k_i := \dim(K_i)$). Montrons que $A$ est semblable à $J_{\lambda^*}$.

Notons $p$ l'indice de nilpotence de $A$. D'après ce qui a été vu avant, nous avons :

$$\{0\} \subsetneq K_1 \subsetneq \cdots \subsetneq K_p = \mathbb{C}^n.$$

Soit $G$ un supplémentaire de $K_{p-1}$ dans $K_p = \mathbb{C}^n$. Remarquons que $\lambda_p = \dim(G)$. Soit $(e_1, \ldots, e_{\lambda_p})$ une base de $G$. Comme $G$ est un supplémentaire de $K_{p-1}$, si $x \in G$ est tel que $A^{p-1}x = 0$ alors $x = 0$. Donc $(Ae_1, \ldots, Ae_{\lambda_p})$ est une famille libre de $K_{p-1}$ intersectant $K_{p-2}$ trivialement, aussi nous pouvons la compléter en une base $(Ae_1, \ldots, Ae_{\lambda_p}, e_{\lambda_p+1}, \ldots, e_{\lambda_{p-1}})$ d'un supplémentaire de $K_{p-2}$. Par récurrence descendante sur $r$, nous construisons ainsi une famille libre $(A^{p-r}e_1, \ldots, A^{p-r}e_{\lambda_p}, A^{p-r-1}e_{\lambda_p+1}, \ldots, A^{p-r-1}e_{\lambda_{p-1}}, \ldots, e_{\lambda_{r+1}+1}, \ldots, e_{\lambda_r})$ qui engendre un supplémentaire de $K_{r-1}$ dans $K_r$ de dimension $\lambda_r = \dim(K_r) - \dim(K_{r-1})$. Comme $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = n$, nous obtenons finalement une base de $\mathbb{C}^n$ (on intervertit les vecteurs afin d'obtenir une matrice triangulaire supérieure) :

$$(A^{p-1}e_1, \ldots, Ae_1, e_1, \ldots, A^{p-2}e_{\lambda_p+1}, \ldots, e_{\lambda_p+1}, \ldots, e_{\lambda_1}),$$

dans laquelle la matrice de $A$ est $J_{\lambda^*}$. (dessiner le diagramme de Young associé à A et à la base construite au tableau, cf C-G)

Achevons maintenant la preuve du théorème :

Si $A$ et $B$ sont dans une même orbite alors $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = PAP^{-1}$, d'où $\forall i$, $\dim(\ker(B^i)) = \dim(\ker(A^i))$ et donc $Y(A) = Y(B)$.

Si $Y(A) = Y(B)$ alors $A$ et $B$ ont même partition et donc même partition duale. Avec ce qui a été fait avant, $A$ et $B$ sont donc semblables à une même matrice de Jordan et ainsi elles sont dans la même orbite.

**Remarques :**
- coquille p88 dans le C-G : l'ensemble d'arrivée du morphisme $\pi_i$ n'est pas $K_i/K_{i+1}$ mais $K_i/K_{i-1}$,
- développement un peu long, attention à ne pas traîner.

## 8.2 Formes de Hankel

Référence : *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*, Caldero-Germoni.

Développement pour les leçons :
- 142. Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.
- 144. Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.
- 158. Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
- 159. Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.
- 170. Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
- 171. Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

**Intérêt :** étant donné $P \in \mathbb{R}[X]$, le but du jeu est de construire une forme quadratique réelle de signature $(a, b)$ telle que $a + b =$(nb de racines distinctes de $P$) et $a - b =$(nb de racines réelles distinctes de $P$).

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Notons $n$ son degré, $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ ses racines (réelles et complexes) distinctes et $m_1, \dots, m_l$ leurs multiplicités respectives. Posons[5] $s_k := \sum_{i=1}^{l} m_i \alpha_i^k$ et $q(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i,j=1}^{n} s_{i+j-2} x_i x_j$. $q$ est une forme quadratique réelle car

$$\begin{aligned} s_k &= \sum(\text{racines réelles}) + \sum(\text{racines complexes}) \\ &= \sum(\text{racines réelles}) + \sum m_i(\alpha_i^k + \overline{\alpha_i}^k) \\ &= \sum(\text{racines réelles}) + \sum m_i 2\mathrm{Re}(\alpha_i^k) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Notons $(a, b)$ la signature de $q$ et posons également, pour $k \in [\![1, l]\!]$, $\varphi_k(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_k^{i-1} x_i$. Les $\varphi_k$ sont des formes linéaires de $\mathbb{C}^n$. Montrons qu'elles forment une famille libre. Si $\sum_{k=1}^{l} \lambda_k \varphi_k = 0$ alors (en notant $(e_1, \dots, e_n)$ la

5. Ce sont les sommes de Newton.

base canonique de $\mathbb{C}^n$) : $\sum_{k=1}^{l} \lambda_k \varphi_k(e_i) = 0$, ie : $\sum_{k=1}^{l} \lambda_k \alpha_k^{i-1} = 0$, d'où[6] :

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_l) \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{l-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_l & \dots & \alpha_l^{l-1} \end{pmatrix} = 0$$

Le déterminant de la matrice est un déterminant de Vandermonde non nul car les $\alpha_i$ sont distincts. Donc les $\lambda_i$ sont nuls et la famille $(\varphi_k)_{k=1,\dots,l}$ est libre. Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{l} m_k \varphi_k(x)^2 &= \sum_{k=1}^{l} m_k (\sum_{i=1}^{n} \alpha_k^{i-1} x_i)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} m_k \alpha_k^{i+j-2} x_i x_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} s_{i+j-2} x_i x_j \\ &= q(x) \end{aligned}$$

Donc $l = \mathrm{rg}(q) = a + b$.

Pour le second résultat, remarquons que si $\alpha_k$ est une racine complexe de $P$ alors $\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2 = 2\mathrm{Re}(\varphi_k)^2 - 2\mathrm{Im}(\varphi_k)^2$, aussi $\mathrm{sign}(\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2) = (1, 1)$.

Notons $r$ le nombre de racines réelles distinctes de $P$ et (quitte à réordonner les racines de $P$) supposons que les $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont les racines réelles de $P$. Alors, en regroupant les racines complexes et leurs conjuguées dans la deuxième somme et en remarquant qu'il y a $l - r$ racines complexes distinctes, on obtient :

$$q = \sum_{k=1}^{r} m_k \varphi_k^2 + \sum_{r+1}^{r+\frac{l-r}{2}} m_k (\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2)$$

Or la signature de la première somme est égale à $(r, 0)$ et celle de la deuxième est égale à $(\frac{l-r}{2}, \frac{l-r}{2})$ donc $a = r + \dfrac{l-r}{2} = r + b$ et alors $r = a - b$.

6. Remarquer que $l \leq n$ et donc ce qu'on fait là est légitime.

**Calcul des sommes de Newton :** (référence : *Algèbre*, Gourdon)

Pour un polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, les sommes de Newton vérifient les relations suivantes (et peuvent donc se calculer sans connaître les racines) :

$$s_0 = n,\ \forall k \in [\![1, n]\!]\ :\ s_k = -k a_{n-k} - \sum_{i=1}^{k-1} s_i a_{n-k+i},$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ s_{n+p} = -\sum_{k=0}^{n-1} s_{p+k} a_k.$$

**Remarques :**

– Développement un peu court donc à la fin faire la remarque sur le calcul des sommes de Newton et comment calculer une signature,
– le nom Hankel vient du fait que la matrice associée à $q$ est appelée une matrice de Hankel,
– attention dans le Caldero-Germoni : à la question 3, si la racine est réelle alors $\overline{\varphi_k}^2$ n'apparaît pas dans la décomposition de la forme quadratique donc cas inintéressant,
– calcul d'une signature : décomposition de Gauss d'une forme quadratique, utilisation des mineurs principaux, règle de Descartes,
– pour aller plus loin : agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/racsign.pdf

## 8.3 Loi de réciprocité quadratique

Référence : *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*, Caldero-Germoni.

Développement pour les leçons :
- 101. Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 103. Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient.
- 104. Groupes finis. Exemples et applications.
- 120. Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.
- 121. Nombres premiers. Applications.
- 123. Corps finis. Applications.
- 126. Exemples d'équations diophantiennes.
- 170. Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
- 190. Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Soient $p$ et $q$ deux nombres premiers impairs distincts.

**Définition :**

Pour $a \in \mathbb{F}_p$, on définit le *symbole de Legendre* de $a$ par :

$$\left(\frac{a}{p}\right) := a^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ est un carré dans } \mathbb{F}_p^* \\ -1 & \text{si } a \text{ n'est pas un carré dans } \mathbb{F}_p^* \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

**Théorème (loi de la réciprocité quadratique) :**

On a :

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

*Démonstration :*

On utilisera la propriété suivante : pour $a \in \mathbb{F}_p^*$, on a :

$$|\{x \in \mathbb{F}_p,\ ax^2 = 1\}| = 1 + \left(\frac{a}{p}\right).$$

Posons :

$$S := \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{F}_q^p,\ \sum_{i=1}^{p} x_i^2 = 1\}.$$

L'idée de la preuve consiste à calculer le cardinal de $S$ de deux manières différentes pour arriver à nos fins. Dans un premier temps, faisons agir $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur $S$ de manière circulaire :

$$\forall \overline{k} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ \forall (x_1, \dots, x_p) \in S,\ \overline{k}.(x_1, \dots, x_p) = (x_{1+k}, \dots, x_{p+k}),$$

où les indices sont vus modulo $p$ : $x_{i+p} = x_i$. D'après la formule des classes, les orbites sont de deux types : soit elles sont de cardinal égal à 1 (ce sont les singletons $\{(x, \dots, x)\}$, où $x \in \mathbb{F}_q$), soit elles sont de cardinal égal à $p$. Or le nombre d'orbites de type singleton est égal au nombre de solutions $x$ de l'équation $px^2 = 1$ dans $\mathbb{F}_q$. On en déduit la première égalité :

$$|S| = \left(\frac{p}{q}\right) + 1 \mod p.$$

Maintenant considérons les formes quadratiques suivantes :

$$\begin{aligned} q_1(x_1, \dots, x_p) &:= \sum_{i=1}^{p} x_i^2 \\ \text{et} \quad q_2(x_1, \dots, x_p) &:= \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} 2\, x_{2i-1}\, x_{2i} + (-1)^{\frac{p-1}{2}} x_p^2. \end{aligned}$$

Leurs matrices $p \times p$ à coefficients dans $\mathbb{F}_q$ sont respectivement :

$$I_p = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 1 & 0 & \\ & & & & & & & (-1)^{\frac{p-1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Or $I_p$ et $A$ ont même déterminant et donc même discriminant. D'après la classification des formes quadratiques sur $\mathbb{F}_q$, $q_1$ et $q_2$ sont équivalentes et on a alors :

$$|S| = |\tilde{S}| := \left| \left\{ (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{F}_q^p,\ \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} 2\, x_{2i-1}\, x_{2i} + (-1)^{\frac{p-1}{2}} x_p^2 = 1 \right\} \right|.$$

Distinguons deux types de points de $\tilde{S}$ :

– les points tels que $x_1 = x_3 = \cdots = x_{p-2} = 0$ : chaque valeur de $x_p$ telle que $(-1)^{(p-1)/2}\, x_p^2 = 1$ détermine $q^{(p-1)/2}$ points, donc, d'après la propriété du début, on a $q^{(p-1)/2}(1 + (-1)^{(p-1)(q-1)/4})$ points de ce type,

– les points pour lesquels au moins un des $x_{2i-1}$ est non nul : une fois fixés les $x_{2i-1}$ ($q^{(p-1)/2} - 1$ choix possibles) et $x_p$ ($q$ choix possibles), il reste à choisir $(x_2, x_4, \dots, x_{p-1})$ dans un hyperplan affine de $\mathbb{F}_q^{(p-1)/2}$ ($q^{(p-3)/2}$ choix possibles) : il y a donc $q^{(p-1)/2}(q^{(p-1)/2} - 1)$ points de ce type.

On obtient ainsi notre deuxième égalité et on en déduit :

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\left(\frac{q}{p}\right) + (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) + 1 \mod p$$

D'où la formule voulue après simplification (multiplication par $\left(\frac{q}{p}\right)$).

Un mot sur le symbole de Legendre :

justification (pour $a \neq 0$) de $a^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ est un carré dans } \mathbb{F}_p^* \\ -1 & \text{si } a \text{ n'est pas un carré dans } \mathbb{F}_p^* \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$ :

Considérons les morphismes de groupes $\chi : \begin{cases} \mathbb{F}_p^* & \longrightarrow & \mathbb{F}_p^* \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$ et $\lambda : \begin{cases} \mathbb{F}_p^* & \longrightarrow & \mathbb{F}_p^* \\ x & \longrightarrow & x^{(p-1)/2} \end{cases}$. D'après le petit théorème de Fermat, le morphisme $\lambda \circ \chi = \chi \circ \lambda$ est trivial. On en déduit d'une part : $a^{(p-1)/2} = \pm 1$. D'autre part : $\mathrm{Im}\chi \subset \ker \lambda$. Or $|\mathrm{Im}\chi| = |\mathbb{F}_p^*|/|\ker \chi| = (p-1)/2$ et $|\ker \lambda| \leq (p-1)/2$ car $\ker \lambda = \{\text{racines de } X^{(p-1)/2} - 1\}$ (sur un corps commutatif). D'où : $\ker \lambda = \mathrm{Im}\chi$. The end !

**Remarques :**

– attention dans le C-G il y a plusieurs coquilles : dans la formule en-dessous de "En effet, faisons agir ...", l'indice du dernier $x_i$ est $p$ et pas $n$ ; il faut rajouter "non" après le premier "stabilisateur", enlever "non" après le deuxième (et le pan de phrase "nécessairement ...") et rajouter "non" devant le troisième,
– cf les remarques dans le C-G autour du symbole de Legendre.

**Annexe (Calcul de $\left(\frac{2}{p}\right)$) :**

Soit $\alpha$ une racine de $X^4+1$. C'est une racine $8^e$ primitive de l'unité dans une extension de $\mathbb{F}_p$, ie : $\alpha^8=1$ et $\alpha^4=-1$, ou encore : $\alpha^2=-\alpha^{-2}$.

Posons $\beta := \alpha+\alpha^{-1}$. Alors $\beta^2=\alpha^2+\alpha^{-2}+2=2$. Donc 2 est un carré dans $\mathbb{F}_p$ ssi $\beta \in \mathbb{F}_p$. Or $\beta \in \mathbb{F}_p \Leftrightarrow \beta^p=\beta$. Calculons : $\beta^p=\alpha^p+\alpha^{-p}$, d'où :

$$\text{pour } p \equiv \pm 1 \; [8], \;\; \beta^p=\alpha+\alpha^{-1}=\beta, \;\; \text{car } \alpha^8=1,$$

$$\text{pour } p \equiv \pm 3 \; [8], \;\; \beta^p=\alpha^3+\alpha^{-3}=\alpha^{-1}(\alpha^4+\alpha^{-2})=\alpha^{-1}(-1-\alpha^2)=-\beta, \;\; \text{car } \alpha^4=-1.$$

D'où le résultat voulu. Référence : *Arithmétique*, Hindry.

## 8.4 Équation de Fermat avec n=3

Référence : *Théorie des nombres*, Duverney

Développement pour les leçons :
– 122. Anneaux principaux. Exemples et applications.
– 126. Exemples d'équations diophantiennes.

**Théorème :**

L'équation $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ ne possède pas de solution telle que $xyz \neq 0$.

*preuve :*

Nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme :** $\forall x \in \mathbb{Z}[j]$, $\exists \varepsilon \in \mathbb{Z}[j]^\times$, $\exists y \in \mathbb{Z}[i\sqrt{3}]\ :\ x = \varepsilon y$.

Supposons qu'il existe $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tels que $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ et $xyz \neq 0$. Commençons par remarquer que si $p$ premier divise deux des trois entiers $x$, $y$ et $z$ alors $\left(\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p}\right)$ est solution. Donc nous pouvons supposer que $x$, $y$ et $z$ sont deux à deux premiers entre eux. Puis notons que sur les trois variables il y en a exactement une qui doit être paire. Quitte à échanger les variables, nous supposerons que $y$ est pair et que $x$ et $z$ sont impairs. Choisissons une telle solution avec $|y|$ minimum.

Posons maintenant $a := \frac{x+z}{2}$ et $b := \frac{x-z}{2}$. D'où $x = a + b$ et $z = a - b$, donc l'équation devient $2a(a^2 + 3b^2) = -y^3$. Comme $x$ et $z$ sont premiers entre eux, $a$ et $b$ le sont également. De l'équation vérifiée par $a$, $b$ et $y$, nous en déduisons que $a$ est pair. Et ainsi $b$ est impair.

Puisque $a$ et $b$ sont de parités différentes, $a^2+3b^2$ est impair. Aussi tout diviseur commun à $2a$ et $a^2 + 3b^2$ est impair, donc divise $a$ puis $3b^2$. Il en résulte alors : pgcd($2a$,$a^2 + 3b^2$)=1 ou 3.

Premier cas : pgcd($2a$,$a^2 + 3b^2$)=1.

Alors, en regardant la factorisation en nombres premiers, $\exists r, s \in \mathbb{Z}$ tels que $2a = r^3$ et $a^2 + 3b^2$=$s^3$. Maintenant, nous allons travailler dans l'anneau euclidien (et donc principal !) $\mathbb{Z}[j]$, où $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Notons que $i\sqrt{3} = 2j+1$. Factorisons dans $\mathbb{Z}[j]$ : $(a+ib\sqrt{3})(a-ib\sqrt{3}) = s^3$.

Or si $p$ premier dans $\mathbb{Z}[j]$ divise $a+ib\sqrt{3}$ et $a-ib\sqrt{3}$ alors il divise $2a$ puis $N(p) \mid 4a^2$ dans $\mathbb{Z}$ ; sauf que $N(p)$ divise $a^2+3b^2$ impair donc $N(p) \mid a^2$ et $N(p) \mid a^2+3b^2$, ce qui est absurde car $a$ et $a^2+3b^2$ sont premiers entre eux.

Donc $a+ib\sqrt{3}$ et $a-ib\sqrt{3}$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{Z}[j]$ et il existe $\eta \in \mathbb{Z}[j]^\times$ et $t \in \mathbb{Z}[j]$ tels que $a+ib\sqrt{3} = \eta t^3$. Comme -1=(-1)$^3$, nous pouvons supposer que $\eta \in \left\{1,\ \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}),\ \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})\right\}$.

D'après le lemme, il existe $\varepsilon \in \mathbb{Z}[j]^\times$ tel que $\varepsilon t \in \mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$. Comme $\varepsilon^6 = 1$, alors $\varepsilon^{-3} = \pm 1$. Alors $a+ib\sqrt{3} = \eta\varepsilon^{-3}(\varepsilon t)^3 = \eta(\pm\varepsilon t)^3 = \eta(u+iv\sqrt{3})^3$, avec $u, v \in \mathbb{Z}$. En développant, il vient :

$$a+ib\sqrt{3} = \eta[u(u+3v)(u-3v) + 3v(u-v)(u+v)i\sqrt{3}].$$

Si $\eta = j+1$ alors en développant l'expression précédente et en identifiant les termes nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & \frac{1}{2}[u(u+3v)(u-3v) - 9v(u-v)(u+v)] \\ \\ b & = & \frac{1}{2}[3v(u-v)(u+v) + u(u+3v)(u-3v)] \end{array}\right. .$$

D'où : $b - a = 6v(u-v)(u+v)$, ce qui est absurde car $a$ est pair et $b$ impair. Nous obtenons de même une contradiction si $\eta = j$. Ainsi $\eta = 1$ et nous avons $a = u(u+3v)(u-3v)$ et $b = 3v(u-v)(u+v)$. Mais $a$ est pair, $b$ est impair et $a$ et $b$ sont premiers entre eux donc $u$ est pair, $v$ est impair et $2u$ et $3v$ sont premiers entre eux. Nous en déduisons que $2u, u+3v$ et $u-3v$ sont deux à deux premiers entre eux. Or $2a = r^3$, donc il existe $l, m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $2u = l^3$, $u+3v = m^3$ et $u-3v = n^3$. D'où : $m^3 + n^3 + (-l)^3 = 0$ avec $l$ pair. Enfin remarquons que :

$$|y^3| = |2a(a^2+3b^2)| = |l^3(u^2-9v^2)(a^2+3b^2)| \geq 3|l^3| > |l^3|.$$

Donc $0 < |l| < |y|$, ce qui est absurde.

Second cas : pgcd($2a$,$a^2+3b^2$)=3.

Posons $a = 3c$. L'équation devient : $18c(3c^2+b^2) = -y^3$. Si $p \in \mathbb{Z}$ premier divise $18c$ et $3c^2+b$ alors, comme le deuxième terme est impair, $p$ divise $9c$. Si

$p = 3$ alors $p$ divise $b$ et $a$, ce qui est absurde. De même si $p$ divise $c$. Donc $18c$ et $3c^2 + b$ sont premiers entre eux. Ainsi il existe $r, s \in \mathbb{Z}$ tels que $18c = r^3$ et $3c^2 + b = s^3$. Avec le même raisonnement que pour le premier cas, nous obtenons $b = u(u + 3v)(u - 3v)$ et $c = 3v(u - v)(u + v)$ avec $u$ impair, $v$ pair et $u$ et $v$ premiers entre eux. Remarquons que $r$ est divisible par 3 donc il existe $r' \in \mathbb{Z}$ tel que $r = 3r'$. Alors $r'^3 = 2v(u - v)(u + v)$. Comme ces trois facteurs sont deux à deux premiers entre eux il existe $l, m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $l^3 = 2v$, $m^3 = u - v$ et $n^3 = u + v$. Ainsi nous obtenons : $l^3 + m^3 + (-n)^3$ et

$$|y^3| = |18c(3c^2 + b^2)| = |27l^3(u^2 - v^2)(3c^2 + b^2)| \geq 27|l^3| > |l^3| \ : \ \text{contradiction!}$$

Et le théorème est ainsi démontré.

**Preuve du lemme :**

Soit $x \in \mathbb{Z}[j]$. Il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a + bj = \dfrac{2a - b + ib\sqrt{3}}{2}$. Écrivons $u := 2a-b$ et $v := b$. Remarquons que $u$ et $v$ sont de même parité. S'ils sont tous les deux pairs alors le résultat voulu est vrai. Maintenant s'ils sont tous les deux pairs :

*premier cas :* $u \equiv 1$ *(mod 4) et* $v \equiv -1$ *(mod 4) :*

$$\frac{u + iv\sqrt{3}}{2}(1 + j) = \frac{1}{4}[(u - 3v) + i\sqrt{3}(u + v)] \in \mathbb{Z}[i\sqrt{3}],$$

*deuxième cas :* $u \equiv -1$ *(mod 4) et* $v \equiv 1$ *(mod 4) :*

$\dfrac{u + iv\sqrt{3}}{2}(-1-j) = \dfrac{-u - iv\sqrt{3}}{2}(1+j)$ et nous sommes ramenés au premier cas,

*troisième cas :* $u \equiv -1$ *(mod 4) et* $v \equiv -1$ *(mod 4) :*

$\dfrac{u + iv\sqrt{3}}{2}j$ est le conjugué de $\dfrac{u - iv\sqrt{3}}{2}(-1 - j) \in \mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$,

*quatrième cas :* $u \equiv 1$ *(mod 4) et* $v \equiv 1$ *(mod 4) :*

$\dfrac{u + iv\sqrt{3}}{2} \times (-j) = \dfrac{-u - iv\sqrt{3}}{2}j$ et nous sommes ramenés au troisième cas.

Le lemme est prouvé.

**Remarques :**

- en fait nous avons montré un peu plus : l'équation de Fermat n'admet pas de solutions non triviales pour n égal à un multiple de 3,
- développement un peu long ; on peut faire le premier cas et dire que le deuxième cas est similaire.

## 8.5 EMV de la loi uniforme

Référence : Cours de statistique de M1 de F.Malrieu.

Développement pour les leçons :
- 260. Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.
- 262. Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.
- 263. Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

**Résultats :**

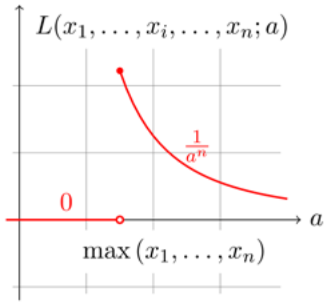
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires de même loi uniforme $\mathcal{U}_{[0,\theta]}$, avec $\theta \in \mathbb{R}_+^*$. Notons $\hat{\theta}_n$ l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre $\theta$. Nous allons montrer les résultats suivants :

1. $\hat{\theta}_n = X_{(n)} := \max\limits_{1\leq i\leq n} X_i$,
2. le biais est : $\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) = \dfrac{n}{n+1}\theta$,
3. consistance : $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n]{\text{ps}} \theta$,
4. vitesse et loi limite : $\dfrac{n}{\theta}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$, où $-Y \sim \mathcal{E}\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$,
5. risque quadratique : $\mathbb{E}((\hat{\theta}_n - \theta)^2) = \dfrac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}$.

*Démonstration :*

1) La vraisemblance des observations $(x_1, \ldots x_n)$ est :

$$L(x1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta}\mathbb{1}_{[0,\theta]} = \begin{cases} 0, & \text{si } \theta \leq \max(x_1, \ldots, x_n) \\ \dfrac{1}{\theta^n}, & \text{si } \theta \geq \max(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}.$$




Vraisemblance d'un échantillon suivant la loi uniforme

D'où l'estimateur cherché : $\hat{\theta}_n = X_{(n)}$.

2) Calculons la loi de $\hat{\theta}_n$ en utilisant les fonctions de répartition et les densités :

$$\forall t \geq 0,\ F_{\hat{\theta}_n}(t) := \mathbb{P}(\hat{\theta}_n \leq t) = \mathbb{P}(X_i \leq t, \forall i \in [\![1,n]\!]) = \mathbb{P}(X_1 \leq t)^n = \begin{cases} \left(\dfrac{t}{\theta}\right)^n, & \text{si } t \leq \theta, \\ 1, & \text{sinon} \end{cases}.$$

D'où la densité de $\hat{\theta}_n$ : $f_{\hat{\theta}_n}(t) = \dfrac{n}{\theta}\left(\dfrac{t}{\theta}\right)^n \mathbb{1}_{[0,\theta]}(t)$

Nous pouvons maintenant calculer le biais :

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) = \int_0^\theta t f_{\hat{\theta}_n}(t)\mathrm{d}t = n\int_0^\theta \left(\frac{t}{\theta}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{n}{n+1}\theta.$$

3) Soit $\varepsilon > 0$. Calculons :

$$\mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \epsilon) = 1 - \mathbb{P}(\theta-\varepsilon \leq \hat{\theta}_n \leq \theta+\epsilon) = 1-(F_{\hat{\theta}_n}(\theta+\varepsilon) - F_{\hat{\theta}_n}(\theta-\varepsilon)) = \left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n = \left(1-\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n.$$

$1-\varepsilon/\theta < 1$ donc la série $\sum \mathbb{P}\left(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon\right)$ converge et d'après le lemme de Borel-Cantelli :

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow[n]{\text{ps}} \theta.$$

4) Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculons en utilisant les fonctions de répartition :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(n(\theta - \hat{\theta}_n) \geq t) &= \mathbb{P}\left(\hat{\theta}_n \leq \theta - \frac{t}{n}\right) \\
&= \left(\frac{\theta - t/n}{\theta}\right)^n \\
&= \left(1 - \frac{t}{n\theta}\right)^n \\
&= \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{t}{n\theta}\right)\right) \underset{n}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-t/\theta}.
\end{aligned}$$

Donc : $n(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} -Y$, où $Y \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)$.

5) Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\hat{\theta}_n^2) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\hat{\theta}_n^2 > t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\hat{\theta}_n > \sqrt{t})\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\theta^2} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{t}}{\theta}\right)^n\right) \mathrm{d}t \\
&= \left[t - \frac{t^{n/2+1}}{\theta^n(n/2+1)}\right]_0^{\theta^2} \\
&= \theta^2 - \frac{\theta^2}{n/2+1}.
\end{aligned}$$

D'où le risque quadratique :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((\hat{\theta}_n - \theta)^2) &= \mathbb{E}(\hat{\theta}_n^2 - 2\theta\hat{\theta}_n + \theta^2) \\
&= \theta^2 - \frac{\theta^2}{n/2+1} - 2\theta\frac{n}{n+1}\theta + \theta^2 \\
&= \theta^2\left(1 - \frac{1}{n/2+1} - \frac{2n}{n+1} + 1\right) \\
&= \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}$$

**Remarques :**

- 2) : c'était prévisible que l'estimateur serait de moyenne plus petite que $\theta$ car $\hat{\theta}_n$ prend des valeurs plus petites que $\theta$,
- 4) : l'estimateur n'est donc pas asymptotiquement normal,
- ici la log-vraisemblance n'est pas définie.

## 8.6 Rademacher

Références : *Théorie des probabilités*, Candelpergher, *Analyse pour l'agrégation*, Zuily-Queffélec (pour Khintchine).

Développement pour les leçons :
- 249. Suites de variables de Bernoulli indépendantes.
- 261. Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications.
- 262. Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.
- 263. Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.
- 264. Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

**Résultats :**

Après avoir défini les variables de Rademacher, on montre quelques résultats :

1. une formule d'analyse : $\prod \cos(t/2^k) = \sin(t)/t$,
2. les variables de Rademacher forment un système orthonormé dans $L^2(\Omega)$,
3. un cas particulier de la loi des grands nombres,
4. l'inégalité de Khintchine,
5. un exemple de va à densité non indépendantes et de covariance nulle.

Soit l'espace probabilisé $\Omega := [0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue $\lambda$.

**Définition :** Pour $X$ une va de Bernoulli, on définit $R := (-1)^X = 1 - 2X$. $R$ est appelé une *variable de Rademacher*. Autrement dit, la loi d'une variable de Rademacher est $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$.

**1. Résultat d'analyse :**

On sait (développement dyadique) que tout $\omega \in \Omega$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\omega = \sum_{n \geq 1} \frac{X_n(\omega)}{2^n},$$

où les $X_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{[1/2^n, 1/2^{n-1}[}$ sont des va de Bernoulli indépendantes. Alors nous avons l'égalité suivante :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{R_n(\omega)}{2^n} = 1 - 2\omega.$$

Autrement dit, la suite $(Y_n)$ définie par

$$Y_n := \sum_{k\geq 1}^{n} \frac{R_k}{2^k}$$

converge presque partout (en fait sur tout $\Omega$) vers la va définie par $Y : \omega \mapsto 1 - 2\omega$. Comme la convergence presque partout implique la convergence en loi et donc la convergence simple des fonctions caractéristiques, on obtient :

$$\varphi_{Y_n}(t) \to \varphi_Y(t) = \int_{[0,1]} e^{it(1-2\omega)} d\omega = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t}, & \text{si } t \neq 0, \\ 1, & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

Or :

$$\varphi_{Y_n}(t) = \mathbb{E}(e^{it\sum \frac{R_k}{2^k}}) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(e^{it\frac{R_k}{2^k}}) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right).$$

D'où le résultat d'analyse suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin t}{t}.$$

*Application : ?*

**2. Famille orthonormale :**

Les $R_n$ sont des va indépendantes donc :

$$\text{pour } n \neq p, \int_{[0,1]} R_n R_p d\lambda = \mathbb{E}(R_n R_p) = \mathbb{E}(R_n)\mathbb{E}(R_p) = 0,$$

$$\text{pour } n = p, \int_{[0,1]} (R_n)^2 d\lambda = \int\limits_{[0,1]} 1 d\lambda = 1.$$

Ainsi, les $R_n$ forment un système orthonormé dans $L^2(\Omega)$.

*Application : la démonstration du point 3.*

**3. Loi des grands nombres :**

On note $T_n := \dfrac{R_1 + \cdots + R_n}{n}$. On a :

$$(T_n)^2 = \frac{R_1^2 + \cdots + R_n^2}{n^2} + \frac{2}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} R_i R_j,$$

d'où :

$$\mathbb{E}((T_n)^2) = \frac{\mathbb{E}((R_1)^2) + \cdots + \mathbb{E}((R_n)^2)}{n^2} = \frac{1}{n},$$

et donc, d'après le théorème de Beppo-Levi, on obtient :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{p \geq 1} (T_{p^2})^2\right) = \sum_{p \geq 1} \mathbb{E}((T_{p^2})^2) = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2} < +\infty.$$

$\sum\limits_{p \geq 1} (T_{p^2})^2$ est positive et d'intégrale finie, la série converge donc presque sûrement et son terme général tend vers 0 presque sûrement.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p^2 \leq n < (p+1)^2$ et alors :

$$\begin{aligned}
|R_1 + \cdots + R_n| &\leq |R_1 + \cdots + R_{p^2}| + |R_{p^2+1}| + \cdots + |R_n| \\
&\leq |R_1 + \cdots + R_{p^2}| + n - p^2 \\
&\leq |R_1 + \cdots + R_{p^2}| + (p+1)^2 - p^2 \\
&\leq |R_1 + \cdots + R_{p^2}| + 2p
\end{aligned}$$

D'où : $|T_n| \leq |T_{p^2}| + 2/p$ et donc $T_n \underset{n}{\longrightarrow} 0$, ce qui donne :

$$\frac{R_1 + \cdots + R_n}{n} \to 0 = \mathbb{E}(R_1) \quad \text{et} \quad \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \to \frac{1}{2} = \mathbb{E}(X_1).$$

**4. Inégalité de Khintchine :**

**Proposition :**

Soient $R_1, \ldots, R_n$ des variables de Rademacher indépendantes. Soit $f \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(R_1, \ldots, R_n)$. Alors $\mathbb{E}(f^2) \leq e\mathbb{E}(|f|)^2$.

*preuve :*

On écrit : $f = \sum a_j R_j$ et quitte à normaliser on suppose que $\mathbb{E}(f^2)^2 = 1 = \sum a_j^2$. On pose $g := \prod_{j=1}^{n} (1 + i a_j R_j)$. Alors pour presque tout $\omega$ :

$$\begin{aligned} |g(\omega)| &= \prod_{j=1}^{n} \sqrt{1 + a_j^2 R_j(\omega)^2} \\ &= \prod_{j=1}^{n} \sqrt{1 + a_j^2} \\ &\leq \prod_{j=1}^{n} \sqrt{\exp(a_j^2)} \\ &\leq \sqrt{\exp(\sum a_j^2)} \\ &\leq \sqrt{e}, \end{aligned}$$

d'où : $||g||_\infty \leq \sqrt{e}$. En outre, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R_j g) &= \mathbb{E}(R_j(1 + i a_j R_j)) \prod_{k \neq j} \mathbb{E}(1 + i a_k R_k), \text{ par indépendance des } R_k, \\ &= i a_j, \text{ car } \mathbb{E}(R_1) = 0 \text{ et } \mathbb{E}(R_1^2) = 1. \end{aligned}$$

Or $\mathbb{E}(fg) = \sum a_j \mathbb{E}(R_j g)$, donc $|\mathbb{E}(fg)| = 1$, ce qui permet de conclure :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(f^2) &= 1 \\
&= |\mathbb{E}(fg)|^2 \\
&\leq \mathbb{E}(|fg|)^2 \\
&\leq \mathbb{E}(|f|)^2 ||g||_\infty^2 \\
&\leq e\mathbb{E}(|f|)^2
\end{aligned}
$$

*Application :* le théorème de Weierstrass via les polynômes de Bernstein.

**5. Un exemple de va à densité non indépendantes et de covariance nulle :**

Soit $N$ une va de loi normale centrée réduite. Soit $R$ une va de loi de Rademacher indépendante de $N$. On considère $Y := RN$. On a :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq x) &= \mathbb{P}(N \leq x \text{ et } R = 1) + \mathbb{P}(-N \leq x \text{ et } R = -1) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(N \leq x) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(-N \leq x), \text{ par indépendance de } N \text{ et } R, \\
&= \mathbb{P}(N \leq x), \text{car } N \text{ et } -N \text{ ont même loi.}
\end{aligned}
$$

Donc $Y$ est une va de loi normale centrée réduite. Puis :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(R)\mathbb{E}(X^2) = 0.$$

Aussi les va $X$ et $Y$ sont non corrélées. Si $X$ et $Y$ étaient indépendantes alors $(X, Y)$ serait un vecteur gaussien or :

$$\mathbb{P}(X + Y = 0) = \mathbb{P}(R = -1) = \frac{1}{2}, \text{ car } X \neq 0 \ \mathbb{P} - \text{ps},$$

donc $X + Y$ n'est pas gaussienne.

# 9 Bibliographie

AF1 : Arnaudiès-Fraysse, *Cours de mathématiques-1 Algèbre*
AF2 : Arnaudiès-Fraysse, *Cours de mathématiques-2 Analyse*
ALB : Albert, *Topologie*
AUD : Audin, *Géométrie*
B-G : Berger-Gostiaux, *Géométrie différentielle*
B-L : Barbe-Ledoux, *Probabilité*
B-P : Briane-Pagès, *Théorie de l'intégration*
BER : Bertram, *Calcul différentiel topologique élémentaire*
BIA : de Biasi, *Mathématiques pour le capes et l'agrégation interne 3e édition*
BRE : Brézis, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*
C-G : Caldero-Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*
CAD : Cadre, *Statistique mathématique*
CAN : Candelpergher, *Théorie des probabilités*
CIA : Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*
COH : Cohen, *Number theory, vol 1 : tools and diophantine equations*
COL : Colmez, *Éléments d'analyse et d'algèbre*
COM : Combes, *Algèbre et géométrie*
COT : Cottrell-Genon-Catalot-Duhamel-Meyre, *exercices de probabilités*
DEM : Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
DIE : Dieudonné, *Calcul infinitésimal*
DUV : Duverney, *Théorie des nombres*
F-G : Francinou-Gianella, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation*
G-T : Gonnord-Tosel, *Calcul différentiel et équations différentielles*
GOU : Gourdon, *Algèbre*
GOU : Gourdon, *Analyse*
GOZ : Gozard, *Théorie de Galois*
GRI : Grifone, *Algèbre linéaire*
H-L : Hirsch-Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*
HAU : Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*
HEL : Hellegouarch, *Invitation aux mathématiques de Fermat-Wiles*
HIN : Hindry, *Arithmétique*
HUN : Hunter, *Number theory*
M-T : Mneimné-Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*
MAD1 : Madère, *Leçons d'algèbre*
MER : Mercier, *Cours de géométrie*
MNE : Mneimné, *Réduction des endomorphismes*
MON : Monier, *Géométrie MP PSI PC PT*
MOR : Morvan$^2$, *Probabilités discrètes*
NOU : Nourdin, *Agrégation de mathématiques épreuve orale*

OBJ : Beck-Malick-Peyré, *Objectif Agrégation*
OUV : Ouvrard, *probabilités 2*
OXE : Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS*
PAZ : de Seguins Pazzis, *Invitation aux formes quadratiques*
PER : Perrin, *Cours d'algèbre*
PEY : Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*
POM : Pommellet, *Cours d'analyse : Agrégation de mathématiques*
ROU : Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel : À l'usage de la licence et de l'agrégation*
RUD : Rudin, *Analyse réelle et complexe*
S-P : Saux Picart, *Cours de calcul formel Algorithmes fondamentaux*
SIE : Sierpinski, *250 problems in elementary number theory*
STE : Stewart, *Algebraic number theory and Fermat's last theorem*
StR : Saint-Raymond, *Topologie, calcul différentiel et variable complexe*
SZP : Szpirglas, *L3 Algèbre*
TAU : Tauvel, *Corps commutatifs et théorie de Galois*
TAUV : Tauvel, *Algèbre*
TAUVG : Tauvel, *Géométrie*
TES : Testard, *Analyse mathématique*
TRU : Truffault, *Géométrie élémentaire*
WIL : Willem, *Analyse harmonique réelle*
Z-Q : Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*

# 10 Références internet

Document de Hélène Hivert :
perso.eleves.bretagne.ens − cachan.fr/ ∼ hhive261/Documents/LeconsAgreg.pdf

agregmaths.free.fr/

Site de Guiheneuf :
math.u − psud.fr/ ∼ guiheneu/

Wiki de la prépa agrég de Rennes :
minerve.bretagne.ens − cachan.fr/index.php/Accueil

Document avec des questions concernant l'oral d'algèbre :
agregmaths.free.fr/doc/divers/LD.pdf

Document lié au précédent contenant les réponses des questions :
agregmaths.free.fr/doc/divers/LD correction.pdf

La collection calvage & mounet :
calvage − et − mounet.fr/

Coquilles du C-G :
math.univ − lyon1.fr/homes − www/H2G2/

Développements possibles dans le C-G :
math.univ − lyon1.fr/homes − www/H2G2/Developpements.pdf