

216 - Étude métrique de courbes. Exemples.

Jonathan Harter

21 mai 2013

Table des matières

| | | |
|------------|--|-----------|
| I | Arcs paramétrés de \mathbb{R}^n | 2 |
| I .1 | Généralités | 2 |
| I .2 | Propriétés métriques, abscisse curviligne | 4 |
| II | Courbes planes ; étude métrique | 8 |
| II .1 | Inégalité Isopérimétrique | 8 |
| II .2 | Propriétés métriques des courbes planes | 11 |
| II .3 | Développées de courbes | 16 |
| III | Courbes gauches | 20 |
| III .1 | Extension des notions définies dans \mathbb{R}^2 | 20 |
| III .2 | Propriétés métriques, repère de Frenet–Serret | 20 |
| III .3 | Exemple : cas de l’hélice à pas constant | 21 |

I Arcs paramétrés de \mathbb{R}^n

Dans toute cette partie, on fixe un entier $n \geq 1$, et on suppose le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^n muni du produit scalaire usuel, c'est-à-dire de la forme bilinéaire symétrique définie positive \langle, \rangle vérifiant :

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

On notera par $\| \cdot \|$ sa norme naturelle associée. Le but est de définir un certain nombre de notions générales, attrayant à des arcs paramétrés de \mathbb{R}^n . En particulier la notion de régularité, birrégularité, changement de paramétrage. Dont l'un deux jouera un rôle particulier : l'abscisse curviligne.

I.1 Généralités

Définition I.1 On appelle arc paramétré de \mathbb{R}^n une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ où I désigne un intervalle non vide de \mathbb{R} . On dit que l'arc est de classe \mathcal{C}^k si f l'est. L'ensemble des arcs paramétrés de classe \mathcal{C}^k sera noté $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^2)$.

Remarque. Pour une telle application, être de classe \mathcal{C}^k signifie que chacune de ses composantes l'est, il suffit de calculer une variation infinitésimale pour le voir.

Définition I.2 Soit f un arc paramétré de \mathbb{R}^n . On appelle trajectoire de f l'ensemble

$$Im(f) := \{f(t) : t \in I\}$$

Remarque. A présent il est légitime de se poser la question si selon certains changements de variables, la trajectoire demeure inchangée ou non. Prenons l'exemple classique du cercle unité de \mathbb{R}^2 . Une façon simple de le paramétrer est par $f : t \mapsto (\cos t, \sin t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, la description du cercle se fait dans le sens trigonométrique. Mais en écrivant $t \mapsto (\cos t, -\sin t)$, on décrit toujours le cercle unité, dans le sens opposé. On peut aussi agir sur la "vitesse", $t \mapsto (\cos(t^3 + t), \sin(t^3 + t))$ est une description à "vitesse" croissante. En somme, dans les exemples on a écrit $f \circ \varphi$ où φ désigne l'application $t \mapsto -t$, $t \mapsto t^3 + t$ respectivement. Mais on déclare qu'un changement de paramétrage est admissible si l'application est un difféomorphisme d'un intervalle J dans I ; intuitivement cette notion implique notamment que les trajectoires vont coïncider (notion de bijectivité) et que la courbe

sera parcourue un même nombre de fois (une application réelle difféomorphe est strictement monotone).

Définition I .3 Soient I et J deux intervalles réels, et $\varphi : J \longrightarrow I$. On dit que φ est un $\mathcal{C}^k(J, I)$ difféomorphisme ($k \geq 0$) si :

- φ est bijective
- φ est de classe \mathcal{C}^k
- φ^{-1} est de classe \mathcal{C}^k

Un \mathcal{C}^0 difféomorphisme est appelé homéomorphisme.

Proposition I .1 Un \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) difféomorphisme de J sur I est strictement monotone sur J .

PREUVE. C'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires. En effet, comme φ' est continue, pour montrer la stricte monotonie, on prouve qu'elle ne peut s'annuler. Et c'est le cas car $\forall x \in J \quad (\varphi^{-1})'(\varphi(x)) \times \varphi'(x) = 1$. \square

Définition I .4 (Changement de paramétrage admissible) Soit $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^k(J, \mathbb{R})$ deux arcs paramétrés. On dit que g est un changement de paramétrage admissible de f s'il existe une application $\varphi : J \longrightarrow I$ \mathcal{C}^k -difféomorphe telle que $g = f \circ \varphi$. L'application φ est appelée changement de paramétrage.

Les propriétés essentielles des courbes sont celles qui ne dépendent pas du changement de paramétrage. Et nous verrons que ce sera quasiment toujours le cas. Dans toute la suite de cette partie, on considère $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ un arc paramétré fixé.

Définition I .5 (Régularité, birégularité) Soit $t_0 \in I$, on dit que t_0 est un point régulier pour f si $f'(t_0) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ (singulier dans le cas contraire), t_0 est dit birégulier pour f si $f'(t_0)$ et $f''(t_0)$ ne sont pas liés. On dit qu'un arc est régulier (ou birégulier) s'il l'est en chacun de ses points.

Dans la suite, on s'attache à étudier l'allure d'une courbe plane (on se place donc provisoirement dans le cas $n = 2$) au voisinage d'un point singulier. Il y aura quatre cas possibles, qui se déduisent directement du développement limité de l'arc. Plus précisément :

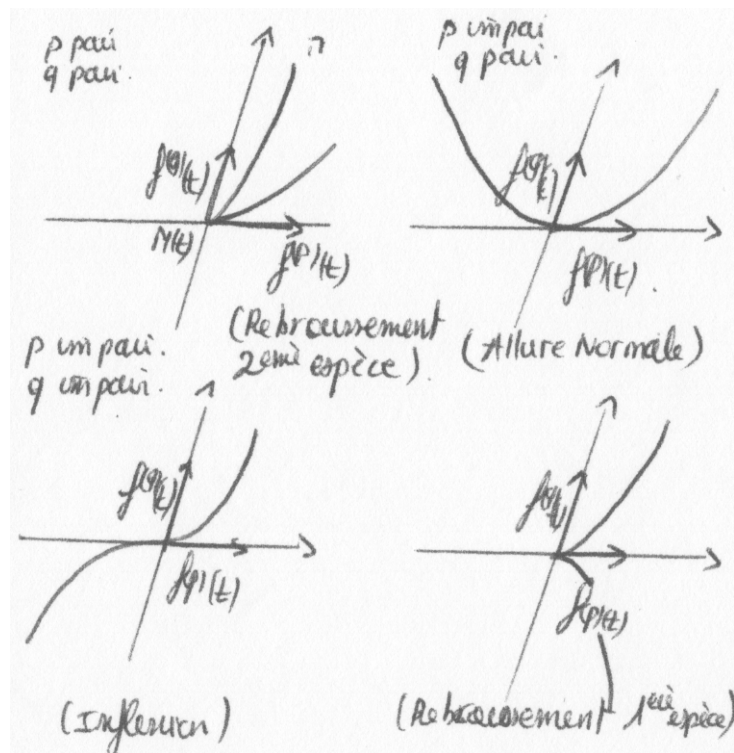
Proposition I .2 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe suffisamment grande pour donner sens à la suite, et soit $t \in I$. On note :

- p le plus petit entier ≥ 1 tel que : $f^{(p)}(t) \neq 0$
- q le plus petit entier $> p$ tel que : $(f^{(p)}(t), f^{(q)}(t))$ libre.

Alors :

- pour p, q pairs ; on a un point de rebroussement de seconde espèce.
- pour p impair, q pair ; le point singulier est dit d'allure normale.
- pour p, q impairs ; on a un point d'inflexion.
- pour p pair et q impair ; le point est un rebroussement de première espèce.

Voici une illustration de tout ceci :



Remarque. La régularité d'un arc est préservée par changement de paramétrage admissible. En effet considérons deux paramétrages f, g d'un même arc, et φ un changement de paramétrage ($f = g \circ \varphi$). Alors $f' = g'(\varphi)\varphi'$, si g est régulier alors f l'est aussi (puisque φ' ne peut s'annuler via le théorème des valeurs intermédiaires). De la même manière, comme c'est aussi le cas pour φ^{-1} , si g est régulier, f aussi.

I.2 Propriétés métriques, abscisse curviligne

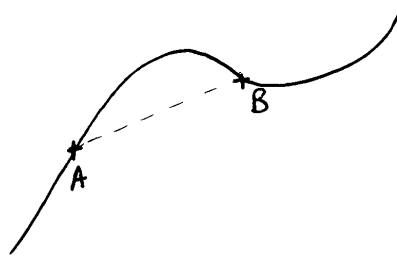
Passons maintenant aux propriétés métriques. L'idée est de transformer la variable t qui n'a aucun sens géométrique particulier en une nouvelle variable s appelée abscisse curviligne qui elle possède une interprétation géométrique simple. En plus, elle simplifiera

considérablement certain calcul (notamment celui de la base de Frenet). Rappelons comment est définie la notion de longueur d'arc dans \mathbb{R}^2 .

Définition I .6 (Longueur d'arc) On appelle longueur de f entre deux points $A(t_0)$ et $B(t_1)$, la quantité :

$$l(\widehat{AB}) = \int_{t_0}^{t_1} \|f'(u)\| du$$

Remarque. Une définition plus générale de la longueur d'arc existe pour des arcs seulement continus (le principe est de considérer les lignes brisées à une subdivision fixée, puis de prendre la borne supérieure sur l'ensemble de subdivisions de l'ensemble des longueurs brisées). Mais dans le cas d'arcs au moins \mathcal{C}^1 , les deux coïncident. On peut aussi démontrer un résultat intuitif, c'est que **le segment est l'arc de longueur minimal joignant deux points de \mathbb{R}^2** . En effet, :



En effet, notons par $f = (x, y)$ un arc quelconque \mathcal{C}^1 joignant A et B . On note $f(t_0) = A$ et $f(t_1) = B$. Alors, on montre que :

$$\int_{t_0}^{t_1} \|f'(u)\| du = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)} du \geq \|f(t_1) - f(t_0)\| = \sqrt{(x(t_1) - x(t_0))^2 + (y(t_1) - y(t_0))^2}$$

Dans un premier temps par une étude de fonction, on peut prouver que :

$$\forall a, b \geq 0, \quad \sqrt{a+b} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Sachant cela, on peut écrire :

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)} du \geq \left| \int_{t_0}^t x'(u) du \right| + \left| \int_{t_0}^t y'(u) du \right| \geq \left| \int_{t_0}^t (x' + y')(u) du \right| = \sqrt{(x(t) - x(t_0) + y(t) - y(t_0))^2}$$

Cette dernière quantité étant minorée par : $\sqrt{(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2}$ puisque $x(t_1) - x(t_0) \geq 0$ et $y(t_1) - y(t_0) \geq 0$.

Définition I .7 (Abscisse Curviligne) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ un arc au moins \mathcal{C}^1 , on appelle abscisse curviligne toute application $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ au moins \mathcal{C}^1 vérifiant :

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 = \|f'\|^2$$

Remarque. Supposons que s soit de classe \mathcal{C}^1 . Alors on a l'équivalence avec l'équation intégrale :

$$(s'^2 = x'^2 + y'^2) \iff \left(\forall t_0 \in I \quad s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du \right)$$

Ceci permet d'interpréter l'abscisse curviligne comme étant la longueur algébrique de l'arc entre t_0 et t , où t_0 est un point arbitraire choisi comme référence. Ainsi, lorsque l'arc est de classe \mathcal{C}^1 , un paramétrage par abscisse curviligne existe toujours !

Remarque. [Unicité du paramétrage curviligne ?] Considérons deux paramétrages s, S par abscisse curviligne, alors par définition :

$$s' = \|f'\| = S'$$

Donc on en déduit que $(s - S)' = 0$ c'est-à-dire que $S - s$ est constante. Deux abscisses curvilignes d'un même arc paramétré diffèrent d'une constante.

Définition I .8 (Paramétrage normal) On appelle paramétrage normal d'un arc paramétré f un changement de paramétrage g vérifiant :

$$\|g'(u)\| = 1 \quad \forall u$$

Autrement dit, cinématiquement, le parcours de la courbe a lieu à vitesse constante unitaire. C'est le cas de l'abscisse curviligne :

Proposition I .3 Le paramétrage par l'abscisse curviligne est un paramétrage admissible, normal.

PREUVE. L'abscisse curviligne est de dérivée strictement positive, $f \circ s^{-1}$ est donc un paramétrage admissible de f . On notera dans toute la suite $f(s^{-1}(t))$ plus simplement par $f(s)$. Il est de plus normal, puisque $\|(f \circ s^{-1})'\| = \|f'(s^{-1}) \times \frac{1}{s'(s^{-1})}\| = \|f'(s^{-1}) \times \frac{1}{\|f'(s^{-1})\|}\| = 1$
□

Schématiquement

$$\mathbb{R} \xrightarrow{s^{-1}} I \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$$

Remarque. Le paramétrage par abscisse curviligne (ou longueur d'arc) est donc un paramétrage à vitesse unitaire. Inversement tout paramétrage à vitesse unitaire est une abscisse curviligne, en effet : si $\|g'(u)\| = 1 \quad \forall u$ alors en intégrant cette équation entre t_0 et t réels, on a :

$$\int_{t_0}^t \|g'(u)\| du = t - t_0$$

Cette équation signifie que la longueur de l'arc entre t_0 et t correspond bien au paramètre.

Dans toute la fin du paragraphe, on fixe un arc paramétré $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, de trajectoire Γ .

Définition I .9 (Vecteur tangent) Soit $A \in \Gamma$. On dit que f admet un vecteur tangent en A si la limite $\lim_{M \rightarrow A} \frac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|}$ existe et est fini. Dans ce cas, le vecteur limite s'appelle le vecteur tangent à Γ en A .

Proposition I .4 (Cas d'un arc \mathcal{C}^1) Si f est de plus \mathcal{C}^1 , un vecteur tangent est alors $\frac{f'(t_0)}{\|f'(t_0)\|}$ si $A(t_0)$ est régulier. On le note $T(t_0)$.

Remarque. Il est aussi possible de définir un vecteur tangent en un point non forcément régulier d'un arc de classe \mathcal{C}^k , si au moins un des vecteurs $f'(t_0), \dots, f^{(k)}(t_0)$ est non nul (par un développement limité à l'ordre k , la limite précédente existera et sera précisément le premier de ces vecteurs, non nul).

Proposition I .5 Supposons que f soit paramétré normalement (par s) alors :

$$T(s) = f'(s)$$

II Courbes planes ; étude métrique

II .1 Inégalité Isopérimétrique

Une belle propriété d'une courbe plane fermée, sans point multiple et de classe \mathcal{C}^1 est la célèbre inégalité isopérimétrique. Que dire, pour un disque qui est l'exemple typique d'une telle courbe, de la relation entre son aire et son périmètre ? Son aire \mathcal{A} est πR^2 , R étant le rayon, et son périmètre \mathcal{L} au carré est $4\pi^2 R^2$. Ainsi, on a la relation :

$$4\pi\mathcal{A} = \mathcal{L}^2$$

Après avoir étudié le cas du disque, notons que l'inégalité $4\pi\mathcal{A} \leq \mathcal{L}^2$ est vraie dans le cas du triangle (même si cette courbe n'est pas de classe \mathcal{C}^1).

Proposition II .1 (Formule de Héron) Fixons ABC un triangle de \mathbb{R}^2 . Notons p sont demi-périmètre. C'est-à-dire : $p = \frac{a+b+c}{2}$, où a, b, c sont les longueurs de AB, BC et CA respectivement. Alors, en notant \mathcal{A} l'aire du triangle, on a :

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

C'est une conséquence de la formule d'Al-Kashi appliquée plusieurs fois.

Proposition II .2 (Inégalité isopérimétrique pour le triangle) Avec les mêmes notations que précédemment :

$$4\pi\mathcal{A} \leq \mathcal{L}^2$$

PREUVE. Ici $\mathcal{L}^2 = (2p)^2 = 4p^2$. Il faut donc prouver que $p^2 \geq \pi\mathcal{A} = \pi\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. La preuve de cette inégalité repose essentiellement sur un argument de convexité :

$$\forall x, y, z > 0 \quad (xyz)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

En effet, le \ln est concave donc :

$$\forall x, y, z > 0 \quad \frac{1}{3} (\ln x + \ln y + \ln z) \leq \ln \left(\frac{x+y+z}{3} \right)$$

On en déduit alors le résultat en passant à l'exponentielle. Or $\mathcal{A}^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$. Donc en appliquant cette inégalité au produit $(p-a)(p-b)(p-c)$, on a :

$$((p-a)(p-b)(p-c))^{\frac{1}{3}} \leq \frac{3p-a-b-c}{3}$$

Soit :

$$\mathcal{A}^{\frac{2}{3}} \leq p^{\frac{1}{3}} \frac{3p - a - b - c}{3} = p^{\frac{1}{3}} \frac{p}{3}$$

Ainsi, $4\pi\mathcal{A} \leq 4\pi \frac{\mathcal{L}^2}{4 \times 3\sqrt{3}} = \mathcal{L}^2 \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \leq \mathcal{L}^2$ □

Passons au cas général énoncé ci-dessus. Avant on prouve un lemme faisant appel à la théorie des séries de Fourier.

Lemme II .1 Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{C})$ telle que $\int_0^1 f = 0$ et $f(0) = f(1)$. Alors

$$\int_0^1 |f|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 |f'|^2.$$

PREUVE. On prolonge f sur \mathbb{R} en une fonction 1-périodique que l'on note encore f . La fonction f est continue sur \mathbb{R} et \mathcal{C}^1 par morceaux. On a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \int_0^1 f'(t) e^{-2i\pi n t} dt \\ &= [f(t) e^{-2i\pi n t}]_0^1 + 2i\pi n \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi n t} dt \\ &= 2i\pi n c_n(f), \end{aligned}$$

Puisque f' est continue sur $[0, 1]$. De la formule de Parseval, on déduit :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f'(t)|^2 dt &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |2n\pi c_n(f)|^2 \\ &\geq 4\pi^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \\ &= 4\pi^2 \int_0^1 |f(t)|^2 dt, \end{aligned}$$

car $c_0(f) = 0$. □

Théorème II .1 (Inégalité isopérimétrique) Soit Γ une courbe du plan, régulière, de classe \mathcal{C}^1 , fermée, sans point multiple. Soient \mathcal{L} la longueur de Γ et \mathcal{A} l'aire qu'elle délimite. Alors

$$4\pi\mathcal{A} \leq \mathcal{L}^2$$

PREUVE. On suppose que la courbe admet la représentation paramétrique, que l'on peut supposer à vitesse unitaire :

$$\begin{aligned} g &: [0, \mathcal{L}] \rightarrow \mathbb{C} \\ s &\mapsto g(s) \end{aligned}$$

Puis on définit $f(s) = g(\mathcal{L}s)$ $s \in [0, 1]$, qui est alors à vitesse constante égale à \mathcal{L} (c'est un changement de paramétrage admissible de g , comme $s \mapsto \mathcal{L}s$ est difféomorphisme de $[0, 1]$ sur $[0, \mathcal{L}]$) où f est de classe \mathcal{C}^1 , $f(0) = f(1)$ et f est injective sur $[0, 1[$. En faisant éventuellement une translation de la courbe, ce qui ne change ni la longueur ni l'aire, on peut supposer que $\int_0^1 f = 0$. On pose, pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) = x(t) + iy(t)$. D'après la formule de Green-Riemann, on a

$$A = \frac{1}{2} \int_0^1 (x'y - xy').$$

En effet, la formule de Green-Riemann donne $\forall \Omega \subset \mathbb{R}^2$, $P, Q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{C}^1$ que :

$$\int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial \Omega} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy)$$

On choisit donc P, Q convenablement pour que $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 1$, pour $P(x, y) = -\frac{x}{2}$ et $Q = \frac{y}{2}$, on a :

$$S = \int \int_{\Omega} dx dy = \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} (-y dx + x dy) = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt$$

On remarque que

$$\int_0^1 f \bar{f}' = \int_0^1 (xx' + yy') + i(x'y - xy') = 2iA,$$

car $\int_0^1 (xx' + yy') = \frac{1}{2}[x^2 + y^2]_0^1 = 0$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire usuelle sur $L^2(\mathbb{C})$, puis le lemme, on obtient

$$2A = \left| \int_0^1 f \bar{f}' \right| \leq \int_0^1 |f| |f'| \leq \sqrt{\int_0^1 |f|^2 \int_0^1 |f'|^2} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^1 |f'|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \mathcal{L}^2,$$

car $|f'|^2 = L^2$. On a donc $4\pi A \leq \mathcal{L}^2$. Passons maintenant au cas d'égalité. Si $4\pi A = \mathcal{L}^2$, il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz donc $|f|$ et $|f'|$ sont proportionnelles. Comme $|f'| = \mathcal{L}$, $|f|$ est constante et Γ est incluse dans un cercle ; la courbe Γ est fermée donc c'est un cercle. Réciproquement, si Γ est un cercle de rayon R , $A = \pi R^2$ et $\mathcal{L} = 2\pi R$ donc $4\pi A = \mathcal{L}^2$ (c'est le cas traité au début du paragraphe) \square

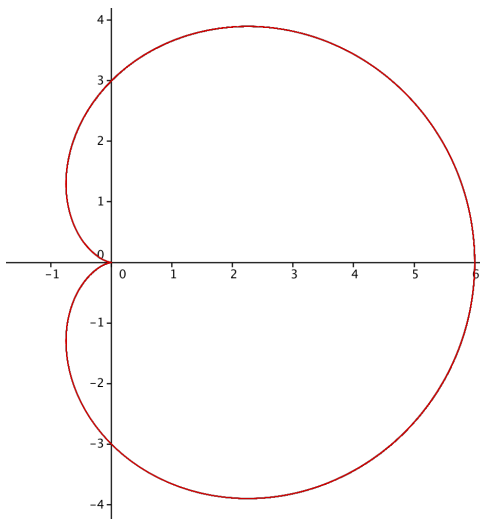
II .2 Propriétés métriques des courbes planes

Fixons dans toute cette partie un arc f de \mathbb{R}^2 supposé **birégulier** ; on peut donc en particulier exprimer T naturellement à l'aide de la dérivée de l'arc.

Remarque. On peut calculer en fonction des coordonnées cartésiennes et polaires $t \mapsto (x(t), y(t))$, $\theta \mapsto \rho(\theta)\vec{u}_\theta$ l'expression d'une abscisse curviligne.

$$s(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \quad s(\theta) = \sqrt{1 + \rho'(\theta)}$$

Exemple. Traitons le cas de la Cardioïde.



Elle est paramétrisée par (en coordonnées polaires) : $\rho(\theta) = a(1 + \cos(\theta))$. Calculons une abscisse curviligne. Par les formules précédentes, on trouve :

$$s'(\theta) = a\sqrt{2(1 + \cos(\theta))}$$

Sa longueur est donc :

$$l_{cardio} = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos(\theta)} d\theta = 8a$$

Où la dernière intégrale se calcule en transformant $1 + \cos(\theta)$ à l'aide des formules de duplication.

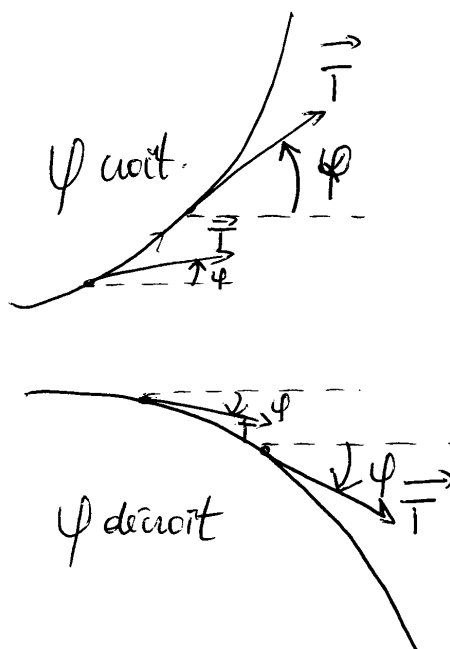
A présent, nous allons définir des grandeurs qui vont caractériser entièrement une courbe à déplacement près. C'est la notion de courbure (et de torsion pour des courbes gauche). Dans toute la suite on notera t le paramètre d'un arc de \mathbb{R}^2 et s une abscisse curviligne. Quand

on écrira $f(s)$ cela signifiera que la paramétrisation choisie est celle par l'abscisse curviligne. De-même pour $f(t)$.

Définition II .1 (Paramétrisation angulaire de T et courbure) Il existe une application $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que : $T(s) = \cos(\varphi(s))\vec{i} + \sin(\varphi(s))\vec{j}$. On appelle courbure (une grandeur algébrique) au point s (notée simplement γ au lieu de $\gamma(s)$) la quantité :

$$\gamma = \frac{d\varphi}{ds}$$

La courbure s'interprète simplement. Le premier cas représenté infra est celui d'une courbure positive (conformément à l'intuition). Négative dans le second.



Remarque. Si on suppose que la courbure est identiquement nulle, alors le vecteur tangent est constant et l'arc est en fait une droite. Or, dans un repère bien choisi, une droite peut se mettre sous la forme $s \mapsto (s, 0)$, qui n'est donc pas birégulier. Donc l'hypothèse de birégularité faite en début de paragraphe exclue ce cas de figure et il est possible de définir l'inverse de la courbure.

Définition II .2 On appelle rayon de courbure la quantité R définie par :

$$R = \frac{1}{\gamma}$$

Proposition II .3 Il existe des formules explicites pour calculer la courbure (en coordonnées polaires et cartésiennes). Dans le premier cas :

$$\gamma = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Dans le second :

$$\gamma = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Remarque. Courbure et rayon de courbure sont préservées par changement de paramétrage admissible. Ce sont des quantités intrinsèques au paramétrage.

Définition II .3 (Repère de Frenet) On associe à un point s un repère local $(M(s), T(s), N(s))$ appelé repère de Frenet où $T(s)$ est le vecteur tangent en s et $N(s)$ le vecteur $T(s)$ directement orthonormal à T .

Ces vecteurs sont liés par les formules de Frenet :

Proposition II .4

$$\begin{pmatrix} \frac{dT}{ds} \\ \frac{dN}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix}$$

Il existe un cercle particulier, associé à un arc birégulier ; c'est le cercle osculateur. Intuitivement, celui qui épouse le plus la forme de la courbe. Il se définit mathématiquement de la façon suivante :

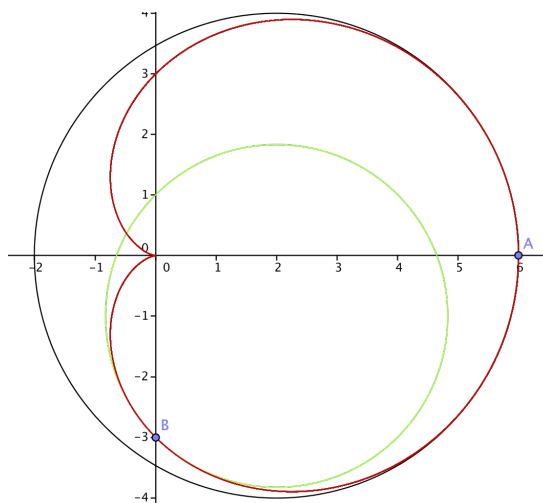
Définition II .4 (Cercle osculateur) On appelle C le centre de courbure en un point s défini par :

$$\overrightarrow{M(s)C(s)} = R\overrightarrow{N(s)}$$

Le cercle osculateur est alors celui centré en C et de rayon $|R|$.

Donnons quelques illustrations de cercles osculateurs.

Exemple. [Cas de la cardioïde] De nouveau, pour la cardioïde :



On peut visualiser ici les cercles osculateurs en A et B . Déterminons leurs équations par le calcul, on se limite au cas de A . Calculons tout d'abord la courbure en $A(\theta = 0)$:

$$\gamma(A) = \frac{5a^2}{(4a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

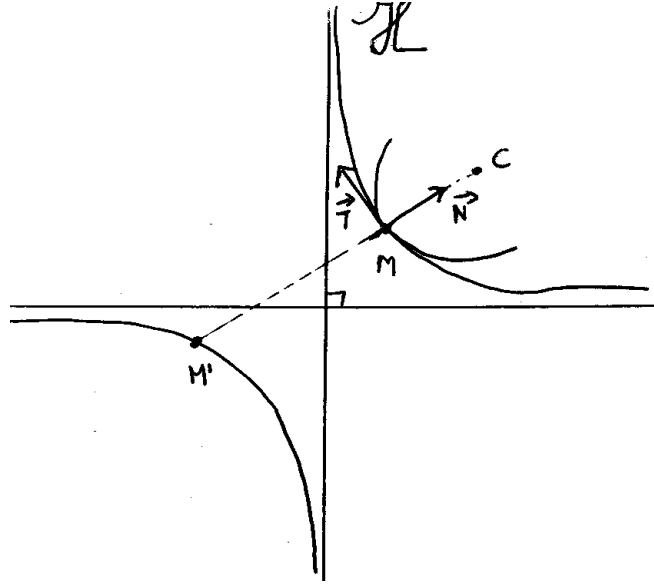
Ici le dessin est fait pour $a = 3$, d'où une courbure $\gamma = \frac{5}{24}$. On cherche ensuite le centre de courbure qui est le point C défini par les relations $x_C - 6 = -\frac{5}{24}$ et $y_C = 0$ soit le point d'abscisse $\frac{29}{24}$. Le cercle tracé est donc le cercle de centre $\left(\frac{29}{24}, 0\right)$ et de rayon $\frac{24}{5}$.

On peut également citer une propriété remarquable de centre de courbure d'une hyperbole équilatère, qui est la suivante :

Proposition II .5 (Centre de courbure d'une hyperbole équilatère) Soient \mathcal{H} une hyperbole équilatère, M un point de \mathcal{H} , C le centre de courbure de \mathcal{H} en M , et M' le point d'intersection de la normale à \mathcal{H} en M avec l'autre branche de \mathcal{H} . Alors

$$\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MM'}$$

Remarque. C'est le fait que la constante de colinéarité entre ces deux vecteur variables soit constante (-2) qui est remarquable dans cette propriété. Cependant, elle ne fonctionne que lorsque l'hyperbole est équilatère, c'est-à-dire quand ces asymptotes sont orthogonales.



PREUVE. Il existe $a > 0$ tel que \mathcal{H} ait pour équation $xy = a$ dans un repère orthonormal bien choisi. On paramètre \mathcal{H} par $M(t) = \left(t, \frac{a}{t}\right)$. On a $\frac{dM}{dt} = \left(1, -\frac{a}{t^2}\right)$. On choisit un paramètre normal s tel que

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{t^4}} = \frac{\sqrt{t^4 + a^2}}{t^2}.$$

On pose $T = \frac{dM}{ds} = \left(\frac{t^2}{\sqrt{t^4 + a^2}}, -\frac{a}{\sqrt{t^4 + a^2}}\right)$ la tangente unitaire ainsi que le vecteur normal :

$$N = \left(\frac{a}{\sqrt{t^4 + a^2}}, \frac{t^2}{\sqrt{t^4 + a^2}}\right)$$

En dérivant T , on obtient $\frac{dT}{dt} = (2ta^2(t^4 + a^2)^{-\frac{3}{2}}, 2t^3a(t^4 + a^2)^{-\frac{3}{2}})$ et donc

$$\frac{dT}{ds} = (2t^3a^2(t^4 + a^2)^{-2}, 2t^5a(t^4 + a^2)^{-2}) = 2at^3(t^4 + a^2)^{-\frac{3}{2}}N.$$

On en déduit que la courbure est $\gamma = 2at^3(t^4 + a^2)^{-\frac{3}{2}}$ et

$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{\gamma}N = \frac{t^4 + a^2}{2at^3}(a, t^2).$$

La normale à \mathcal{H} en M a pour équation $(x - t) - \frac{a}{t^2}\left(y - \frac{a}{t}\right) = 0$. le point M' a pour coordonnées $\left(u, \frac{a}{u}\right)$. Il appartient à la normale donc $(u - t) - \frac{a}{t^2}\left(\frac{a}{u} - \frac{a}{t}\right) = 0$ et comme $u \neq t$, on en déduit $1 = -\frac{a^2}{t^3u}$ et donc $u = -\frac{a^2}{t^3}$. On en déduit que $M' = \left(-\frac{a^2}{t^3}, -\frac{t^3}{a}\right)$. On

obtient enfin

$$\overrightarrow{MM'} = \left(-\frac{a^2}{t^3}, -\frac{t^3}{a} \right) - \left(t, \frac{a}{t} \right) = -\frac{t^4 + a^2}{at^3} (a, t^2).$$

Ainsi $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MM'}$

□

Proposition II .6 *La courbure détermine une courbe à déplacement près.*

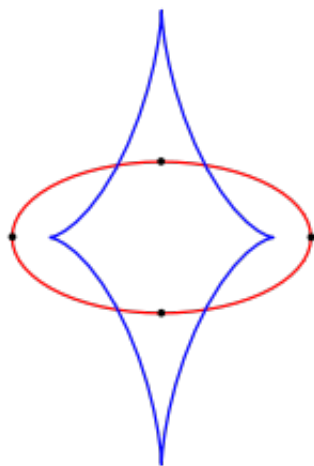
Exemple. Dans ces exemples, nous allons traiter les cas $\gamma = 1$ et $\gamma = -1$.

II .3 Développées de courbes

On associe à un arc paramétré, une autre courbe que l'on appelle développée, définit comme suit :

Définition II .5 (Développée) *On appelle développée d'une courbe, l'ensemble de ses centres de courbure.*

Exemple. Dans la suite, les courbes de départ sont en bleu, et les développées en rouge. Voici la développée d'une ellipse :



Cette courbe porte un nom, on l'appelle l'astroïde et retrouvons son équation polaire. Une ellipse admet une représentation paramétrique de la forme : $t \mapsto (a \cos(t), b \sin(t))$ pour $t \in [0, 2\pi]$ où $a > 0$, $b > 0$. Calculons d'abord la courbure, donnée par la formule en coordonnées cartésiennes. Comme $x'(t) = -a \sin(t)$ et $y'(t) = b \cos(t)$, $x''(t) = -a \cos t$ et $y''(t) = -b \sin t$, après calculs on trouve :

$$\gamma = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

De plus, par définition :

$$T = \frac{1}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$$

Et :

$$N = \frac{1}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} b \sin t \\ -a \cos t \end{pmatrix}$$

Un centre de courbure C est défini par (en notant X et Y ses coordonnées) :

$$\begin{aligned} X - a \cos t &= \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab} \frac{1}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{1}{2}}} b \sin t \\ Y - b \sin t &= \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab} \frac{1}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{1}{2}}} (-a \cos t) \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} X - a \cos t &= \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)}{a} \sin t \\ Y - b \sin t &= -\frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)}{a} \cos t \end{aligned}$$

Après quelques applications de formules trigonométriques, on trouve :

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3(t) \\ Y(t) &= -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3(t) \end{aligned}$$

C'est l'expression paramétrique de l'astroïde.

La développée possède une propriété géométrique relativement importante; on peut en effet la voir comme l'enveloppe des normales à la courbe. Définissons au préalable toutes ces notions :

Définition II .6 (Enveloppe d'une famille de droites) On considère $(D_t)_t \in I$ une famille de droites de \mathbb{R}^2 . On appelle enveloppe de $(D_t)_t \in I$ toute courbe de \mathbb{R}^2 Γ telle que : la tangente en chaque point de Γ est une des droites de $(D_t)_t$ et inversement toute droite de $(D_t)_t$ est une tangente en un point de Γ . Il y a donc une correspondance bijective entre les éléments de la famille $(D_t)_t$ et les tangentes à la courbe.

Remarque. Il est naturel de se demander quand est-ce que la notion de développée existe. C'est le cas lorsque, si l'on note par $D_t : a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$ l'équation cartésienne de la

droite D_t , on a :

$$\forall t, \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

C'est facile d'obtenir cette condition en traduisant mathématiquement la définition, puis en effectuant une opération de dérivation/soustraction sur les lignes du système obtenu. En effet : nous avons d'une part que la tangente doit passer par le point associé au paramètre t :

$$a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0$$

D'autre part, le vecteur tangent à la courbe doit être orthogonal au vecteur normal de la tangente soit :

$$x'(t)a(t) + y'(t)b(t) + c(t) = 0 = -a'(t)x(t) - b'(t)y(t) + c(t) - c'(t)$$

Equivalent à :

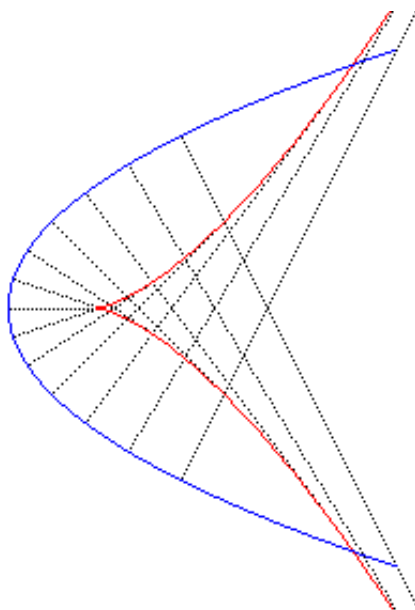
$$0 = a'(t)x(t)b'(t)y(t) - c(t) + c'(t)$$

D'où la condition d'existence de solutions, citée plus haut.

Passons à la propriété fondamentale de la développée.

Proposition II .7 (Lien développée/enveloppe) *La développée est en fait l'enveloppe des normales*

Exemple. On passe ensuite comme second exemple au cas de la parabole.



On va chercher sa développée en l'exprimant comme enveloppe des normales. Une expression cartésienne de l'hyperbole est, dans un repère bien choisi c'est-à-dire celui dont la directrice est l'axe ($x = \frac{1}{2}$), $y^2 = 2px$, une paramétrisation est (en voyant y comme un paramètre) : $t \mapsto \left(\frac{t^2}{2p}, t \right)$. Le vecteur tangent unitaire est ainsi :

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{t}{p}\right)^2}} \begin{pmatrix} \frac{t}{p} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le normal unitaire est :

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{t}{p}\right)^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{t}{p} \end{pmatrix}$$

On en déduit une équation de la normale en t :

$$\frac{t}{p}x + y = \frac{t^3}{2p^2} + t$$

Pour déterminer une enveloppe, on doit résoudre :

$$\begin{cases} \frac{t}{p}x + y = \frac{t^3}{2p^2} \\ \frac{1}{p} = \frac{3t^2}{2p^2} + 1 \end{cases}$$

D'où l'équation de la courbe en résolvant le système :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3t^2}{2p} + p \\ y(t) = \frac{-t^3}{p^2} \end{cases}$$

C'est la courbe représentée en rouge.

III Courbes gauches

III .1 Extension des notions définies dans \mathbb{R}^2 .

Les notions suivantes ont été définies en toute généralité dans le premier paragraphe ; trajectoire, régularité, birégularité, abscisse curviligne, vecteur tangent unitaire (en terme de dérivées). Par exemple, l'abscisse curviligne d'un arc du type $t \in I \mapsto (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ est $s'(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$.

III .2 Propriétés métriques, repère de Frenet–Serret

Maintenant, on ne dispose plus de la paramétrisation du vecteur tangent unitaire par l'angle. Il est donc indispensable de changer la définition de courbure. La motivation principale restant de caractériser les courbes à déplacement près à l'aide de diverses grandeurs (courbure dans le cas de \mathbb{R}^2), dans \mathbb{R}^3 nous allons rajouter une nouvelle grandeur appelée torsion. Mais comment définir la courbure alors ? Rappelons les formules de Frenet dans \mathbb{R}^2 :

$$\begin{pmatrix} \frac{dT}{ds} \\ \frac{dN}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix}$$

En particulier, nous avons : $\frac{dT}{ds} = \gamma N$. Comme N est de norme 1 :

$$\gamma = \left\| \frac{dT}{ds} \right\|$$

C'est cette définition que nous allons utiliser dans \mathbb{R}^3 . Notons que \mathbb{R}^2 possède une orientation naturelle, alors que \mathbb{R}^3 non. Ainsi, la courbure dans \mathbb{R}^2 est une grandeur algébrique. Dans \mathbb{R}^3 , elle est tout le temps positive.

Définition III .1 On appelle courbure γ , le réel $\left\| \frac{dT}{ds} \right\|$. De la même façon on définit le rayon de courbure $R := \frac{1}{\gamma}$.

Définition III .2 (Repère de Frenet-Serret) On appelle vecteur binormal noté B le vecteur défini par : $B = T \wedge N$. C'est par définition du produit vectoriel le vecteur directement orthonormal à T et N . Alors le repère local (T, N, B) forme un trièdre direct appelé repère de Frenet-Serret.

Remarque. Le vecteur binormal B est également de norme 1 puisque T et N le sont.

Remarque. Dans \mathbb{R}^3 , une courbe peut se "déformer" selon deux directions. Dans le plan cette "déformation" était entièrement déterminée par la courbure. Dans \mathbb{R}^3 , il faut rajouter une nouvelle grandeur appelée torsion.

Définition III .3 On appelle torsion notée τ le scalaire défini par :

$$\tau = \left\langle B, \frac{dN}{ds} \right\rangle$$

C'est une grandeur algébrique.

Proposition III .1 (Formules de Frenet-Serret) On obtient de nouvelles formules de Frenet, où τ est une nouvelle grandeur appelée torsion, à laquelle on associe $R_T = \frac{1}{\tau}$ le rayon de torsion.

$$\begin{pmatrix} \frac{dT}{ds} \\ \frac{dN}{ds} \\ \frac{dB}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ -\gamma & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

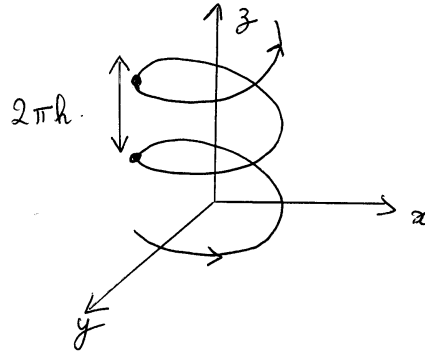
Comment définir l'analogie du cercle osculateur pour \mathbb{R}^2 ? On peut définir différents types de plans en un point. Le plan normal (orienté selon N et orthogonal à T), le plan tangent (orienté selon T et orthogonal à N), ou bien le plan osculateur, qui est celui ayant un "point de contact" maximal avec la courbe :

Définition III .4 On appelle plan osculateur en $M(s)$ le plan passant par M et dirigé par $f'(s)$ et $f''(s)$.

III .3 Exemple : cas de l'hélice à pas constant

L'hélice peut être caractérisée comme une courbe dont il existe un vecteur, tel que l'angle entre ce vecteur et le vecteur tangent reste constant en n'importe quel point de la courbe... (justification infra). Mais on peut donner une représentation paramétrique, soient $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $h \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{cases} x(t) = r \cos t \\ y(t) = r \sin t \\ z(t) = ht \end{cases}$$



Remarquons déjà que la caractérisation précédente est vérifiée. Le vecteur en question est \vec{k} (vecteur directeur de l'axe cote). Pour montrer que l'angle entre T et \vec{k} est constant, il suffit de calculer la quantité $\frac{\langle \vec{k}, T \rangle}{\|\vec{k}\| \cdot \|T\|}$. Le numérateur est la troisième composante de T , c'est

$\frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}$. Le dénominateur est la norme de T , soit 1, donc le quotient est constant !

Calculons rayon de courbure et rayon de torsion, le vecteur tangent unitaire est (en un point t) :

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}}(-r \sin(t), r \cos(t), h)$$

De plus, par la formule de dérivée d'une composée, on a (T désigne le vecteur tangent unitaire ci-dessus) :

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= \frac{\frac{dT}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \\ &= (r^2 + h^2)^{-1}(-r \cos(t), -r \sin(t), 0) \end{aligned}$$

De plus, $N = \frac{1}{r}(-r \cos(t), -r \sin(t), 0)$, donc $\frac{dT}{ds} = r(r^2 + h^2)^{-1} N$. Le rayon de courbure est donc :

$$R = \frac{r^2 + h^2}{r}$$

On fait de-même pour le rayon de torsion R_T . On calcule le vecteur binormal :

$$B = T \wedge N = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}}(-h \sin t, h \cos t, -r)$$

De plus, $\frac{dN}{ds} = \frac{\frac{dN}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}}(\sin t, -\cos t, 0)$. Calculons $\langle \frac{dN}{ds}, B \rangle = \frac{h}{r^2 + h^2}$. Cette

quantité est précisément la torsion d'après les formules de Frenet. Donc le rayon de torsion

est :

$$R_T = \frac{r^2 + h^2}{h}$$

Références

- [1] Jean-Marie MONIER
Cours - Tome 7 Géométrie, Cours et 400 exercices corrigés
Edition DUNOD
- [2] Bernard GOSTIAUX
Cours de Mathématiques Spéciales - Géométrie : arcs et nappes
PUF