Théorème de Lie-Kolchin

24 décembre 2012

Résumé

Tout sous-groupe connexe et résoluble de $Gl_n(\mathbb{C})$ est conjugué à un groupe de matrices triangulaires

Lemme 1. *Une famille de matrices de $GL_n(\mathbb{C})$ commutant deux à deux est simultanèment triangulable*

Démo : Par récurrence sur n ; un élément qui n'est pas une homothétie a des sous-espaces propres stables par les autres.

Lemme 2. *Si G est un sous-groupe connexe de $GL_n(\mathbb{C})$, son groupe dérivé l'est également.*

Démo : Notons $S_m = \{g_1...g_m/g_i \text{ commutateurs}\}$. Par continuité de $(g_1, g_2) \mapsto g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-2}$ et du produit, chaque S_m est connexe, et ils ont I_n en commun donc $\cup S_m = D(G)$ est connexe.

Démo du Théorème : On montre le résultat par récurrence sur n (il est vrai pour $n = 1$).

Si un sev V non trivial est stabilisé par tous les éléments de G, dans une base de V et d'un supplémentaire ceux-ci s'écrivent $\left(\begin{smallmatrix} g_1 & * \\ 0 & g_2 \end{smallmatrix}\right)$. L'image par le morphisme de groupe de G dans $GL(V)$ donné par $g \mapsto g_1$ est un sous groupe résoluble connexe de $GL(V)$, on a donc par récurrence une base de V où tous les g_1 sont triangulaires, de même pour les g_2, ce qui règle la question.

Montrons que, lorsqu'il n'y a pas de tel sev, alors $n = 1$. Raisonnons sur $\inf\{m/D^m(G) = I_n\}$.

Si $m = 1$, G est abélien, et d'après le premier lemme on dispose d'une base dans laquelle les éléments de G sont triangulaires : le premier vecteur est stable par G, donc est l'espace tout entier : $n = 1$.

Pour $m > 1$, notons $H = D^{m-1}(G)$. $H \lhd G$ et est commutatif - et donc triangulaire dans une certaine base. Soit V le sev engendré par les vecteurs qui sont propres pour tous les éléments de H (différent de $\{0\}$ car il contient le premier élément de la base), montrons qu'il est stable par G : si $h \in H$, $g \in G$ et v,

$$h(g(v)) = gg^{-1}hg(v)$$

$g^{-1}hg \in H$ donc $\exists \lambda$ tel que $g^{-1}hg(v) = \lambda v$ et ainsi $h(g(v)) = \lambda g(v)$, autrement dit $g(v) \in V\ \forall g \in G$. Puisqu'aucun sev non triavial n'est stable par G, $V = \mathbb{C}^n$ et H est diagonal dans une base adapté.

Montrons que H est dans le centre de G : soit $h \in H$, $g \in G$, $g^{-1}hg$ est une matrice diagonale ayant les mêmes valeurs propres que h, il n'y a qu'un nombre fini de telles matrices. Or par continuité de $g \mapsto g^{-1}hg$, l'orbite de h par conjugaison est connexe. Un ensemble fini connexe de $GL_n(\mathbb{C})$ ne peut être qu'un seul élément, autrement dit $< h > \lhd G$, et au final $H \subset Z(G)$.

En conséquence, un sous-espace propre d'un élément de H est stable par tout élément de g et donc égal à $\mathbb{C}^n$ tout entier, les éléments de H sont ainsi des homothéties $\lambda_h I_n$. Le déterminant d'un élément étant 1, les λ_h sont des racines $n^{ième}$ de l'unité. H est donc un sous-groupe fini et connexe, donc il est réduit à I_n, ce qui est une contradiction avec la minimalité de m.

Références

Chambert-Loir, "Algèbre Corporelle" (ou : "a field guide to algebra") p.98