Méthode de Laplace.

Référence : *Zuily-Queffelec, Analyse pour l'agrégation, p339*

Soit $F(t) = \displaystyle\int_a^b e^{t\varphi(x)} f(x)\mathrm{d}x$. Notons $I =]a;b[$.

Théorème. *On suppose :*
- $\int_I e^{t\varphi(x)}|f(x)|\mathrm{d}x < +\infty$ *;*
- φ *s'annule en un unique point* x_0 *qui est un maximum global (donc* $\varphi''(x_0) < 0$*) ;*
- $f(x_0) \neq 0$.

Alors $F(t) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2\pi}{-\varphi''(x_0)}} e^{t\varphi(x_0)} f(x_0) t^{-1/2}$.

Démonstration.
• Calculs préliminaires :

Par Taylor à reste intégral, $\varphi(x) = \varphi(x_0) + (x-x_0)^2\psi(x)$ avec $\psi \in \mathcal{C}(I) \cap \mathcal{C}^2(I \setminus \{x_0\})$ et $\psi(x_0) = \dfrac{1}{2}\varphi''(x_0)$.

Comme $\varphi''(x_0) < 0$, $\exists \eta$ tel que $\psi < 0$ sur $I_\eta =]x_0 - \eta; x_0 + \eta[\subseteq I$.

Soit $u(x) = (x-x_0)\sqrt{-\psi(x)}$. $u \in \mathcal{C}(I_\eta) \cap \mathcal{C}^2(I_\eta \setminus \{x_0\})$. On peut prolonger u de façon $\mathcal{C}^1$ sur I_η avec $u'(x_0) = \sqrt{-\dfrac{1}{2}\varphi''(x_0)}$. En effet, pour $x \neq x_0$, on a $\psi(x) = \dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{(x-x_0)^2}$. D'où

$$(x-x_0)\psi'(x) = \frac{\varphi'(x) - \varphi'(x_0)}{x - x_0} - 2\psi(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi

$$u'(x) = \sqrt{-\psi(x)} - (x-x_0)\frac{\psi'(x)}{2\sqrt{-\psi(x)}} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \sqrt{-\frac{\varphi''(x_0)}{2}}.$$

Il existe donc $\delta < \eta$ tel que $u'(x) > 0$ sur $I_\delta =]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$.

Soit enfin la fonction plateau θ telle que $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(I_\delta)$ et $\theta = 1$ sur $]x_0 - \frac{\delta}{2}; x_0 + \frac{\delta}{2}[$.

On écrit alors $F(t) = \displaystyle\int_a^b e^{t\varphi(x)} f(x)\theta(x)\mathrm{d}x + \int_a^b e^{t\varphi(x)} f(x)(1-\theta(x))\mathrm{d}x = F_1(t) + F_2(t)$.

• Étude de F_1 :

Grâce au support de θ, on peut écrire $F_1(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{t\varphi(x_0) + t(x-x_0)^2\psi(x)} f(x)(1-\theta(x))\mathrm{d}x$. On effectue de changement de variable $u = u(x)$ qui est licite sur $\mathtt{supp}(\theta)$ d'après les calculs préliminaires. Comme c'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, on peut écrire $x = g(u)$ avec $g(0) = x_0$ et $g'(0) = \left(-\frac{1}{2}\varphi''(x_0)\right)^{-1/2}$. D'où :

$$F_1(t) = e^{t\varphi(x_0)} \int_{\mathbb{R}} e^{-tu^2} h(u)\mathrm{d}u$$

où $h(u) = \theta(g(u))f(g(u))g'(u)$ est continue à support compact.

On effectue un second changement de variable $y = \sqrt{t}u$. On obtient

$$F_1(t) = e^{t\varphi(x_0)} t^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} h\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}y.$$

Or $e^{-y^2}h\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-y^2}h(0)$ car h est continue.

Et $\left|e^{-y^2}h\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right)\right| \leq e^{-y^2}\sup_{\mathbb{R}}|h| \in L^1$ car h est continue à support compact.

Par le théorème de Lebesgue, on a donc

$$\sqrt{t}e^{-t\varphi(x_0)}F_1(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\mathrm{d}y h(0) = \sqrt{\pi}h(0).$$

Or $h(0) = \theta(x_0)f(x_0)\left(-\frac{1}{2}\varphi''(x_0)\right)^{-1/2}$ et $\theta(x_0) = 1$. Donc

$$F_1(t) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{-\varphi''(x_0)}}e^{t\varphi(x_0)}f(x_0)t^{-1/2}.$$

• Étude de F_2 :

Sur le support de $1-\theta$, on a $|x-x_0| \geq \frac{\delta}{2}$. Comme $(\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0)$ et x_0 est un maximum, on a $\varphi'(x) > 0$ pour $x < x_0$ et $\varphi'(x) < 0$ pour $x > x_0$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
\varphi(x_0) - \varphi(x) & = & \varphi(x_0) - \varphi(x_0 - \frac{\delta}{2}) + \varphi(x_0 - \frac{\delta}{2}) - \varphi(x) \\
 & \geq & \varphi(x_0) - \varphi(x_0 - \frac{\delta}{2}) > 0 \texttt{ pour } x < x_0 - \frac{\delta}{2}; \\
\varphi(x_0) - \varphi(x) & = & \varphi(x_0) - \varphi(x_0 + \frac{\delta}{2}) + \varphi(x_0 + \frac{\delta}{2}) - \varphi(x) \\
 & \geq & \varphi(x_0) - \varphi(x_0 + \frac{\delta}{2}) > 0 \texttt{ pour } x > x_0 + \frac{\delta}{2}.
\end{array}$$

Donc $\forall x \in \texttt{supp}(1-\theta)$, $\varphi(x_0) - \varphi(x) \geq \mu > 0$.

Pour $t > 1$,

$$\begin{array}{rcl}
t\varphi(x) & = & \varphi(x) + (t-1)\varphi(x) \\
 & \leq & \varphi(x) + (t-1)\varphi(x_0) - \mu(t-1)
\end{array}$$

Donc $|F_2(t)| \leq e^{(t-1)\varphi(x_0)}e^{-\mu(t-1)}\displaystyle\int_a^b e^{\varphi(x)}|f(x)|\mathrm{d}x$. D'où $e^{-t\varphi(x_0)}|F_2(t)| \leq Me^{-t\mu}$ avec $M = e^{\mu}e^{-\varphi(x_0)}\int_a^b e^{\phi(x)}|f(x)|\mathrm{d}x < \infty$ par hypothèse. Ce terme décroit de manière exponentielle alors que pour F_1 on avait un décroissance en $t^{-1/2}$. Ainsi F_2 est négligeable davant F_1 pour t grand d'où le résultat escompté.

□

Application : Equivalent de Stirling.

On rappelle que $\Gamma(t+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{t\log(x)-x}\mathrm{d}x$. En posant $x = ty$, on obtient $\Gamma(t+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{t\log(y)-ty}t\mathrm{d}y = te^{t\log(t)}\int_0^{+\infty} e^{t(\log(y)-y)}\mathrm{d}y$. On a :

- $\int_0^{+\infty} e^{t(\log(y)-y)}\mathrm{d}y < \infty$;
- $\varphi'(y) = t\left(\frac{1}{y} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow y = 1$ et $\varphi''(1) = -1$;
- $f \equiv 1$.

D'où $\Gamma(t+1) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{t}}e^{-t}t^{t+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi t}e^{-t}t^t$.