

101 – Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Question.

Nombre de matrices de $\mathcal{M}_7(\mathbb{F}_{13})$ de rang 3 ?

Réponse.

Une matrice M est de rang 3 si et seulement si M est équivalente à

$$J_3 := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & 0 & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

On regarde l'action de $(GL_7(\mathbb{F}_{13}))^2$ sur $\mathcal{M}_7(\mathbb{F}_{13})$ suivante : $(P, Q) \cdot M = PMQ^{-1}$.
Alors

$$|\text{Orb}(J_3)| = \frac{|(GL_7(\mathbb{F}_{13}))^2|}{|\text{Stab}(J_3)|}.$$

Or $(P, Q) \in \text{Stab}(J_3) \iff J_3Q = PJ_3$. En écrivant P et Q par blocs et en regardant les choix possibles on peut dénombrer le nombre d'éléments du stabilisateur de J_3 .

Question.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2q$ avec q impair. On désigne par D_n le groupe diédral, montrer que D_n est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times D_q$.

Réponse.

$\langle r^q \rangle$ est distingué dans D_n et $\langle r^2, s \rangle$ aussi car $[D_n : \langle r^2, s \rangle] = 2$. De plus, $\langle r^q \rangle \cap \langle r^2, s \rangle = \{e\}$ car q est impair.

Par ailleurs, $|\langle r^q \rangle| \times |\langle r^2, s \rangle| = 2n = |D_n|$ et $\langle r^2, s \rangle$ est isomorphe à D_q , d'où le résultat.

Question auxiliaire. Quels sont les p -Sylows de D_n dans ce cas ?

Réponse.

$2n = 2^2q$ et $2 \wedge q = 1$ donc les 2-Sylows sont d'ordre 4. Il n'y a pas d'éléments d'ordre 4 donc ils sont isomorphes à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ce sont les $\langle r^q, r^i s \rangle$ pour i fixé. Les autres p -Sylows sont formés de rotations (ils sont de cardinal impair donc ne contiennent pas de symétrie).

Question.

Exemple d'anneau qui admet un commutant non commutatif?

Réponse.

Le commutant de I_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question.

Démontrer la formule de Burnside.

Réponse.

On note $F := \{(g, x) \in G \times X \mid g \cdot x = x\}$.

Alors $|F| = \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$ et $|F| = \sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)|$, d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| &= \sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)| \\ &= \sum_{\omega_x} \sum_{y \in \omega_x} |\text{Stab}(y)| \\ &= \sum_{\omega_x} |\omega_x| |\text{Stab}(x)| \\ &= \sum_{\omega_x} |G| \\ &= |G| \times |X/G| \end{aligned}$$

où $|X/G|$ désigne le nombre d'orbites et ω_x l'orbite de x .

Question.

Que dire des actions libres et transitives?

Réponse.

Pour $x \in X$,

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow X \\ g &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

est bijectif donc $|G| = |X|$.

On peut donner comme exemple les espaces affines, ou l'action de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ sur les racines primitives n -ièmes de l'unité.

Question.

Montrer que le groupe des homographies agit simplement 3-transitivement sur $\mathbb{P}(\mathbb{C})$.

Réponse.

L'homographie $z \mapsto \frac{z-\alpha}{z-\gamma} \times \frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}$ envoie (α, β, γ) sur $(0, 1, \infty)$. On peut montrer que c'est la seule.