Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov

Notations

- Posons $\tau_h f = f(\cdot + h)$ l'opérateur de translation d'une fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ par un vecteur h,
- notons $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact dans $\mathbb{R}^N$, et $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N) = \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 1 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et soit ω une partie ouverte et relativement compacte de Ω. Soit $\mathcal{F}$ un sous ensemble borné de $L^p(\Omega)$, où $1 \leq p < +\infty$. On suppose que :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ (\delta < d(\omega, \Omega^c)) \text{ de sorte que}$$

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \epsilon,\ \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}^N \text{ où } \|h\| < \delta \text{ et } f \in \mathcal{F}.$$

Alors, $\mathcal{F}_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$.

Démonstration : Sans perte de généralités, on peut supposer que Ω est borné. Pour $f \in \mathcal{F}$, on pose

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in \Omega \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et on note $\bar{\mathcal{F}} = \{\bar{f}, f \in \mathcal{F}\}$. $\mathcal{F}$ étant borné dans $L^p(\Omega)$, $\bar{\mathcal{F}}$ est alors borné dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. Ayant supposé Ω borné, le support de chaque élément de $\bar{\mathcal{F}}$ est compact (dans $\bar{\Omega}$) et $\bar{\mathcal{F}}$ est alors borné dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ par une constante notée C.

Considérons $(\rho_n)_{n\geq 1}$ une approximation de l'unité dans $\mathbb{R}^N$. La démonstration de ce théorème se découpe en trois étapes principales :

- Première étape : démontrons que, étant donné $\epsilon > 0$ fixé,

$$\|\rho_n * \bar{f} - \bar{f}\|_{L^p(\omega)} < \epsilon \text{ pour tout } \bar{f} \in \bar{\mathcal{F}} \text{ et } n > 1/\delta.$$

En effet, pour tout $x \in \omega$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} |\rho_n * \bar{f}(x) - \bar{f}(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)| \rho_n(y) \mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)| \rho_n(y)^{\frac{1}{p}} \rho_n(y)^{1-\frac{1}{p}} \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Puisque $\rho_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\bar{f} \in L^p(\mathbb{R}^N)$, on a $|\bar{f}(x-\cdot) - \bar{f}(x)|\rho_n^{\frac{1}{p}} \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $\rho_n^{1-\frac{1}{p}} \in L^q(\mathbb{R}^N)$ où $1/p + 1/q = 1$. Par l'inégalité de Hölder appliquée à la dernière intégrale, on obtient

$$|\rho_n * \bar{f}(x) - \bar{f}(x)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)|^p \rho_n(y) \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n^{q(1-\frac{1}{p})} \right)^{\frac{1}{q}}$$

et, en observant que $q(1-\frac{1}{p})=1$ et que ρ_n est une identité approchée, il vient

$$|\rho_n * \bar{f}(x) - \bar{f}(x)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)|^p \rho_n(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}.$$

En élevant cette dernière inégalité à la puissance p, on a

$$|\rho_n * \bar{f}(x) - \bar{f}(x)|^p \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)|^p \rho_n(y)\mathrm{d}y.$$

Finalement, en intégrant l'inégalité précédente sur ω et en utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\omega |\rho_n * \bar{f}(x) - \bar{f}(x)|^p &\leq \int_\omega \int_{B(0,\frac{1}{n})} |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)|^p \rho_n(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_{B(0,\frac{1}{n})} \rho_n(y) \int_\omega |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{B(0,\frac{1}{n})} \rho_n(y) \|\tau_y f - f\|^p_{L^p(\omega)}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Dès lors que $n > 1/\delta$, d'après les hypothèses de l'énoncé, on a bien

$$\|\rho_n * \bar{f} - \bar{f}\|_{L^p(\omega)} < \epsilon \text{ pour tout } \bar{f} \in \bar{\mathcal{F}}.$$

- Deuxième étape : démontrons que, pour chaque entier $n \geq 1$, la famille $\mathcal{H}_n := (\rho_n * \bar{\mathcal{F}})_{|\bar{\omega}}$ vérifie les hypothèses du théorème d'Ascoli, rappelé ci-dessous.

Théorème 2 (Ascoli)
Soit K un espace métrique compact, et E un espace vectoriel normé. Notons $\mathcal{C}(K,E)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans E. Soit G un sous ensemble de $\mathcal{C}(K,E)$.

Alors, G est relativement compacte dans $\mathcal{C}(K,E)$ si et seulement si les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :

(i) pour tout $x \in K$, $\{g(x), g \in G\}$ est relativement compacte dans E,

(ii) G est uniformément équicontinue, c'est à dire

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in K, \|x-y\| < \delta \Rightarrow \forall g \in G,\ \|g(x) - g(y)\| < \epsilon.$$

D'une part, pour $x \in \bar{\omega}$, on a

$$\begin{aligned}|\rho_n * \bar{f}(x)| &\leq \|\rho_n\|_\infty \|\bar{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C \cdot \|\rho_n\|_\infty\end{aligned}$$

et l'hypothèse (i) du théorème d'Ascoli est alors vérifiée.

D'autre part, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$ et $\bar{f} \in \bar{\mathcal{F}}$, on a

$$\begin{aligned} |(\rho_n * \bar{f})(x_1) - (\rho_n * \bar{f})(x_2)| &\leq \|x_1 - x_2\| \|\rho_n\|_{Lip} \|\bar{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C \|\rho_n\|_{Lip} \| \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

où

$$\|\rho_n\|_{Lip} = \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{\|\rho_n(z_1) - \rho_n(z_2)\|}{\|z_1 - z_2\|} < +\infty.$$

Il en résulte, d'après le théorème d'Ascoli, que la famille $\mathcal{H}_n$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(\bar{\omega}, \mathbb{C})$ et donc dans $L^p(\omega)$.

Troisième étape : Conclusion de la démonstration. Étant donné $\epsilon > 0$, on fixe $n > 1/\delta$ de sorte que

$$\|\rho_n * \bar{f} - f\|_{L^p(\omega)} < \frac{\epsilon}{2} \text{ pour tout } \bar{f} \in \bar{\mathcal{F}}.$$

La famille $\mathcal{H}_n$ étant relativement compacte dans l'espace complet $L^p(\omega)$, on peut recouvrir $\mathcal{H}_n$ par un nombre fini de boules de rayon $\epsilon/2$ dans $L^p(\omega)$, i.e

$$\mathcal{H}_n \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(f_i, \frac{\epsilon}{2})$$

où $f_1, ..., f_k \in L^p(\omega)$.
Pour $f \in \mathcal{F}_{|\omega}$, si $i \in \{1, ..., k\}$, en écrivant $f - f_i = f - \rho_n * \bar{f} + \rho_n * \bar{f} - f_i$, on obtient $\|f - f_i\|_{L^p(\omega)} < \epsilon$, d'où

$$\mathcal{F}_{|\omega} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(f_i, \epsilon)$$

ce qui prouve que $F_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$ (un ensemble précompact dans un espace complet étant compact). $\square$

Corollaire 1
Soit $G \in L^1(\mathbb{R}^N)$ une fonction fixée et soit $\mathcal{F} = G * \mathcal{B}$ où $\mathcal{B}$ désigne un sous ensemble borné de $L^p(\mathbb{R}^N)$, avec $1 \leq p < +\infty$.
Alors $\mathcal{F}_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$ pour tout ouvert borné ω de $\mathbb{R}^N$.

Démonstration : Si $u \in \mathcal{B}$, on a $G * u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et

$$\begin{aligned} \|G * u\|_p &\leq \|g\|_1 \|u\|_p \\ &\leq M \cdot \|g\|_1 \end{aligned}$$

pour une certaine constante M bornant $\mathcal{B}$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. Ainsi, $\mathcal{F}$ est borné dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.
De plus, si $f = G * u$ avec $u \in \mathcal{B}$, on a

$$\begin{aligned}\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \|(\tau_h G - G) * u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq M \cdot \|\tau_h G - G\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

On conclut grâce au lemme suivant :

Lemme 1 (Continuité de l'opérateur translation dans $L^q(\mathbb{R}^N)$)
Soit $G \in L^q(\mathbb{R}^N)$, où $1 \leq q < +\infty$. Alors

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h G - G\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = 0$$

Démonstration : Soit $\epsilon > 0$ donné. L'ensemble $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ étant dense dans $L^q(\mathbb{R}^N)$, il existe $G_1 \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ de sorte que $\|G - G_1\|_q < \epsilon$.
On a, pour tout $h \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}\|\tau_h G - G\|_q &\leq \|\tau_h G - \tau_h G_1\| + \|\tau_h G_1 - G_1\|_q + \|G_1 - G\|_q \\ &\leq 2\epsilon + \|\tau_h G_1 - G_1\|_q.\end{aligned}$$

D'autre part, l'utilisation du théorème de convergence dominée assure que

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h G_1 - G_1\|_q = 0.$$

Ainsi,

$$\limsup_{h \to 0} \|\tau_h G - G\|_q \leq 2\epsilon$$

et ce pour tout $\epsilon > 0$, ce qui prouve le lemme énoncé. $\square$

Références

H.Brézis, *Analyse fonctionnelle.*