Sous-groupes finis de $SO(3, \mathbb{R})$.

2013 – 2014

Théorème.
Tout sous-groupe fini de $SO(3)$ est isomorphe à l'un des groupes suivants : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, D_n, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5$.

Démonstration. Soit G un tel groupe d'ordre $n \geq 2$, G agit sur $\mathbb{S}^2$. Un élément de $G \setminus \{\text{id}\}$ est une rotation axiale donc possède 2 points fixes pour cette action, appelés pôles. On note X l'ensemble des pôles d'éléments de $G \setminus \{\text{id}\}$, on a $2 \leq |X| \leq 2(n-1)$.
X est stable par G car si x est un pôle de g, alors $h(x)$ est un pôle de hgh^{-1}. Par ailleurs, si $x \in X$, le stabilisateur G_x de x est, par restriction à $\text{vect}(x)^{\perp}$, un sous-groupe fini de $SO(2)$ donc est cyclique.

On considère l'action de G sur X, alors si r désigne le nombre d'orbites, la formule de Burnside donne

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix(g)}| = \frac{1}{n}(|X| + 2(n-1))$$

et puisque $2 \leq |X| \leq 2(n-1)$, on obtient $r = 2$ ou 3.

Supposons qu'il y ait deux orbites. Alors la formule de Burnside donne

$$2 = \frac{1}{n}(|X_1| + |X_2| + 2(n-1)),$$

d'où $|X_1| + |X_2| = 2$, *i.e.* $|X_1| = |X_2| = 1$. Il y a donc un pôle dans chaque orbite et donc tous les éléments de $G \setminus \{\text{id}\}$ admettent le même axe de rotation, donc G est cyclique.

Supposons désormais qu'il y ait trois orbites. En notant n_i le cardinal du stabilisateur d'un élément d'une orbite X_i, avec $n_1 \leq n_2 \leq n_3$, on a d'une part $n_i \geq 2$ et d'autre part la formule de Burnside donne

$$3 = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n_1} + \frac{n}{n_2} + \frac{n}{n_3} + 2(n-1)\right),$$

d'où

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 + \frac{2}{n}.$$

On en déduit $\frac{3}{n_1} > 1$, d'où $n_1 = 2$. D'où

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{n}. \tag{1}$$

Par conséquent, $\frac{2}{n_2} > \frac{1}{2}$ et donc $n_2 = 2$ ou 3.
Si $n_2 = 2$, alors $\frac{1}{n_3} = \frac{2}{n}$ et donc $n_3 = \frac{n}{2}$ et n est pair. Si $n_2 = 3$, alors $\frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{n}$, d'où $\frac{1}{n_3} > \frac{1}{6}$, donc $n_3 \in \{3, 4, 5\}$.

En résumé, la relation (1) donne les cas suivants :

1. $n_1 = n_2 = 2, n_3 = \frac{n}{2}$.
2. $n_1 = 2, n_2 = n_3 = 3$, alors $n = 12$.
3. $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 4$, alors $n = 24$.
4. $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 5$, alors $n = 60$.

Identifions la structure de G dans chacun des cas :

1. Si $n = 4$, alors $G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou $G \simeq D_2$.
   Supposons $n \neq 4$. Soit $z \in X_3$ et $x \in X_1$, alors $G_z = G_{-z}$ donc $|\mathrm{Orb}(-z)| = |\mathrm{Orb}(z)| = 2$ et donc $X_3 = \{z, -z\}$ puisque c'est la seule orbite de cardinal 2 ($n \neq 4$). Les rotations de G qui ne fixent pas z sont donc des rotations d'angle π dont les pôles sont dans le plan $\{z\}^\perp$, qui s'identifient à des symétries axiales dans ce plan. G s'identifie ainsi, par restriction à $\{z\}^\perp$, à un sous-groupe fini de $O(2)$.
   G_z est cyclique d'ordre $\frac{n}{2}$, soit g un générateur de G_z. Considérons
   $$P := (g^i(x))_{0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1},$$
   alors x n'est pas fixé par une rotation de G_z donc P forme un polygône régulier à $\frac{n}{2}$ côtés dans le plan $\{z\}^\perp$ et $|X_1| = \frac{n}{2}$ donc $P = X_1$.
   G agit sur P donc par égalité des cardinaux, $G \simeq D_{n/2}$.
2. L'action de G sur X_2 est fidèle car $|X_2| = 4$ et seule l'identité a un plan de points fixes dans $SO(3)$. D'où un morphisme injectif $G \to \mathfrak{S}_4$ et par cardinalité, $G \simeq \mathfrak{A}_4$.
3. On a $|X_2| = 8$ et si $z \in X_2$, alors $-z \in X_2$ car $|G_z| = |G_{-z}|$ et les orbites sont de cardinaux distincts. G permute donc les paires de points opposés de X_2, ce qui induit un morphisme $\varphi : G \to \mathfrak{S}_4$.
   Supposons que φ ne soit pas injectif et soit $g \in \ker\varphi$ non trivial. Alors g laisse stable les paires donc g^2 admet tout X_2 comme points fixes et donc $g^2 = \mathrm{id}$. Par ailleurs, les deux points fixes c et $-c$ de g ne sont pas dans X_2 car les stabilisateurs d'éléments de X_2 sont d'ordre divisant 3, donc si $z \in X_2$, $g(z) = -z$.
   Soit $h \in G$, alors $hgh^{-1} \in \ker\varphi$ est non trivial et donc g et hgh^{-1} ont même restriction à X_2 et donc $hgh^{-1}g^{-1}$ a 8 points fixes, donc $g = hgh^{-1}$. Or les points fixes de hgh^{-1} sont $h(c)$ et $h(-c)$ donc $\{c, -c\}$ est stable par G. Ceci n'est pas possible car il n'y a pas d'orbite de cardinal 2. Par conséquent, φ est injectif et par cardinalité, $G \simeq \mathfrak{S}_4$.

4. On a $|X_1| = 30$ et $n_1 = 2$, $|X_2| = 20$ et $n_2 = 3$, $|X_3| = 12$ et $n_3 = 5$. Les pôles opposés appartenant à la même orbite, les 30 pôles de X_1 fournissent 15 axes de rotation distincts et donc 15 sous-groupes d'ordre 2 qui sont conjugués entre eux comme stabilisateurs d'éléments d'une même orbite. On obtient de même 10 sous-groupes d'ordre 3 conjugués et 6 sous-groupes d'ordre 5 conjugués et on vérifie que ces sous-groupes sont les seuls sous-groupes de G par cardinalité.

   Montrons alors que G est simple. Soit H un sous-groupe distingué de G non trivial et distinct de G.

   Si $5 \mid |H|$, H contient les 24 éléments d'ordre 5 car il est distingué, donc $|H| = 30$ et donc H contient aussi les 15 éléments d'ordre 2, ce qui n'est pas possible.

   Si $2 \mid |H|$, alors H contient les 15 éléments d'ordre 2 donc $|H| \geq 16$, donc $|H| \in \{20, 30\}$, donc $5 \mid |H|$ ce qui n'est pas possible.

   Finalement $|H| = 3$, or H doit contenir les 20 éléments d'ordre 3, ce qui n'est pas possible.

   Donc G est simple et $|G| = 60$ donc $G \simeq \mathfrak{A}_5$.

□

Références

[1] Felix Ulmer, *Théorie des groupes*, Ellipses, 2012, p.138.

[2] Jean-Pierre Ramis, André Warusfel, François Moulin, *Algèbre et géométrie*, De boeck, 2010.