

Sous groupes finis de $\mathcal{SO}(3)$

Théorème. Tout groupe fini de $\mathcal{SO}(3)$ est de l'un des cinq types suivants :

- Un groupe cyclique engendré par une rotation d'axe Δ et d'angle $2\pi/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
- Un groupe diédral D_n .
- \mathfrak{A}_4 .
- \mathfrak{S}_4 .
- \mathfrak{A}_5 .

Équation aux classes. Soit G un tel groupe (non trivial). On note n son ordre et e l'identité. Pour tout point $g \in G \setminus \{e\}$, g est une rotation d'axe Δ_g dont l'action naturelle sur la sphère unité admet alors deux points fixes, notés x_g et $x'_g = -x_g$. On appelle ces points des pôles de G et on note leur ensemble \mathcal{P} (qui est fini, de cardinal inférieur à $2n - 1$). Il est clair que si x est un pôle, $-x$ en est un aussi. L'ensemble des rotations de G d'axe $\mathbb{R}x$ s'identifie (via projection sur $\{x\}^\perp$ à un sous-groupe G_x de $\mathcal{SO}(2)$ et est donc cyclique. Notons n_x l'ordre de ce sous groupe.

Soit x un pôle de G . On note $\mathcal{O}(x)$ l'orbite de x sous G . Si $y \in \mathcal{O}(x)$, il existe $g_0 \in G$ qui envoie x sur y . Ainsi, $\forall g \in G, g \cdot x = x \Leftrightarrow g_0 g g_0^{-1} \cdot y = y$, ce qui montre que G_x est envoyé sur G_y par conjugaison. En particulier, y est un pôle et $|G_x| = |G_y|$. La relation orbite stabilisateur donne de plus $n = |G_x| |\mathcal{O}(x)|$.

On considère alors (comme dans la démonstration de la formule de Burnside), l'ensemble des couples (g, x) où $g \in G \setminus \{e\}$ et x est un pôle relatif à g . On va compter ces couples de deux manières différentes. La condition $g \neq e$ indique que pour g donné, il y a exactement deux pôles x de g . Le nombre A de tels couples vaut donc $A = 2(n - 1)$.

Par ailleurs, fixant un pôle x de G , il y a exactement $|G_x| - 1$ éléments de $G \setminus \{e\}$ qui fixent x . On a donc l'égalité

$$A = \sum_{x \in \mathcal{P}} (|G_x| - 1).$$

En notant \mathcal{C} l'ensemble des orbites des divers pôles et en utilisant la conservation de $|G_y|$ pour y parcourant une orbite C (qu'on note alors n_C), on obtient

$$A = \sum_{C \in \mathcal{C}} |C| (n_C - 1).$$

En égalant à l'autre calcul, on obtient $2(n - 1) = \sum_{C \in \mathcal{C}} |C| (n_C - 1)$, soit (avec $n = \sum_{C \in \mathcal{C}} |C|$)

$$2 - \frac{2}{n} = \sum_{C \in \mathcal{C}} \left(1 - \frac{1}{n_C}\right). \quad (1)$$

Discussion de l'équation aux classes. $n > 1$ donc $1 \leq 2 - \frac{2}{n} < 2$. Dans $\sum_{C \in \mathcal{C}} \left(1 - \frac{1}{n_C}\right)$, il y a donc au moins deux termes non nuls, et puisque $n_C \geq \frac{1}{2}$, au plus trois.

a) Cas de deux termes non nuls. (??) s'écrit alors

$$2 = \frac{n}{n_1} + \frac{n}{n_2}.$$

$\frac{n}{n_1}$ et $\frac{n}{n_2}$ sont des entiers non nuls donc $n_1 = n_2 = n$. Les deux orbites correspondantes sont donc réduites à un unique élément (x_1 et x_2). Ainsi, G laisse fixe l'axe (x_1, x_2) donc est un sous groupe de rotations d'axe (x_1, x_2) , donc est cyclique (car s'identifie à un sous groupe fini de $\mathcal{SO}(2)$).

b) Cas de trois termes non nuls. (??) s'écrit

$$1 + \frac{2}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$$

où on peut choisir $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3$. Comme $1 + \frac{2}{n} > 1$, il doit exister n_i tel que $n_i = 2$. Donc $n_1 = 2$ et $\frac{1}{n_2} + \frac{2}{n} = \frac{1}{n_3}$. On doit avoir $\frac{1}{2} + \frac{2}{n} > \frac{1}{2}$, ce qui impose $n_2 = 2$ ou $n_2 = 3$.

- Si $n_1 = n_2 = 2$. La relation ci-dessus donne $n = 2n_3$. L'orbite correspondant à n_3 , notée C_3 , a donc $\frac{n}{n_3} = 2$ éléments (diamétralement opposés car fixés par exactement $n/2$ éléments de G , éléments qui s'identifient à un sous groupe d'ordre $n/2$ de $\mathcal{SO}(2)$, noté H), notés N et S . Les deux orbites correspondant à n_1 et n_2 ont toutes deux $\frac{n}{2}$ pôles, pôles qui sont nécessairement situés dans le plan orthogonal à (NS) (car $\{N, S\}$ est invariant sous G). En outre, les $n/2$ pôles de C_1 décrivent dans $(NS)^\perp$ un polygone régulier sous l'action de H . Par cardinalité, $C_1 = \mathcal{O}(x)$ sous H , avec x pôle de C_1 quelconque. Ce polygone, comme orbite sous G , est donc globalement invariant par G . Ainsi, G peut être vu comme sous groupe de $D_{n/2}$. Par cardinalité, $G \simeq D_{n/2}$.
- Si $n_1 = 2$ et $n_2 = 3$. (??) s'écrit $\frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{n}$ avec $n_3 \geq 3$. Il y a alors trois possibilités :
 - $n_3 = 3$ donc $n = 12$. Sous G , on dispose donc de deux orbites de quatre pôles fixés chacun par trois éléments de G (C_2 et C_3), et une orbite de 6 pôles fixés par 2 éléments (C_1). Les éléments non triviaux de G sont donc d'ordre 2 ou 3. Comme les points de C_1 sont diamétralement opposés (deux points opposés sont fixés par les mêmes éléments), C_1 correspond à 3 sous groupes d'ordre 2 de G . Notant $C_2 = \{a, b, c, d\}$, l'action de G sur C_2 induit un morphisme de G dans \mathfrak{S}_4 , injectif car si g fixe quatre points, c'est l'identité. Or, l'unique sous-groupe de \mathfrak{S}_4 d'ordre 12 est \mathfrak{A}_4 , ce qui montre que $G \simeq \mathfrak{A}_4$.
 - $n_3 = 4$ donc $n = 24$. Sous G , on a une orbite C_1 de 12 points fixés par 2 éléments, une orbite C_2 de 8 points fixés par 3 éléments et une orbite C_3 de 6 points fixés par 4 éléments. Les 8 pôles de C_2 sont deux à deux diamétralement opposés (fixés par le même nombre d'éléments) donc C_2 contient 4 paires de points opposés. G agit permute ces paires puisqu'il fixe C_2 , ce qui induit un morphisme de G dans \mathfrak{S}_4 . Ce morphisme est injectif car si g fixe les quatre paires, il laisse globalement invariante quatre droites de l'espace qui engendrent au moins un plan. Il induit donc une homothétie sur ledit plan. Comme $g \in \mathcal{SO}(3)$, la complétion d'une base orthogonale du plan en une base directe orthogonale de l'espace montre (via l'écriture canonique de g) que g est l'identité. Ainsi, $G = \mathfrak{S}_4$.
 - $n_3 = 5$ donc $n = 60$. Sous G , on dispose d'une orbite C_1 de 30 points fixés par 2 éléments, d'une orbite C_2 de 20 points fixés par 3 éléments et d'une orbite C_3 de 12 points fixés par 5 éléments. Les éléments de G non triviaux sont donc d'ordre 2, 3 ou 5. Comme les pôles d'une même orbite sont deux à deux diamétralement opposés, C_1 fournit 15 sous groupes d'ordre 2, C_2 , 10 sous groupes d'ordre 3 et C_3 , 6 sous groupes d'ordre 5 (tous de la forme G_x). Or, puisque tout sous groupe cyclique correspond à un pôle, les seuls groupes cycliques sont ceux-là, et deux sous groupes cyclique quelconques s'intersectent trivialement. Montrons alors que G est simple. Soit H un sous groupe distingué de G non réduit à $\{e\}$. Soit $x \in H$ non neutre. Tous les conjugués de x sont dans H donc, si x est d'ordre 2, H contient au moins 16 éléments, si x est d'ordre 3, 21 et si x est d'ordre 5, 25. Puisque $|H|$ divise $|G|$, H contient au moins 30 éléments, donc au moins deux éléments d'ordre distinct, donc a plus de 30 éléments. Finalement, $H = G$ et G est simple. Comme il n'existe qu'un groupe simple d'ordre 60, $G = \mathfrak{A}_5$.