Surjectivité de l'exponentielle matricielle

On montre que la fonction $\exp : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

1. On commence par le :

   Lemme. *Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe de G contenant un voisinage de e. Alors H est ouvert et fermé, en particulier H contient la composante connexe de e.*

   Preuve. Si V est un voisinage de e dans H et si $h \in H$, alors hV est un voisinage de h dans H et donc H est ouvert. L'égalité
   $$H^c = \bigcup_{g \notin H} gH$$
   montre que H^c est ouvert en tant que réunion d'ouverts, et donc que H est fermé, ce qui conclut. □

2. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. L'application
   $$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}[M] &\longrightarrow \mathbb{C}[M]^\times \\ X &\longmapsto \exp(X) \end{aligned}$$
   est bien définie (il y a plusieurs choses à dire ici) et est un morphisme de groupes. Montrons que φ est de classe $\mathcal{C}^1$.
   $$\begin{aligned} \varphi(X+H) &= \exp(X+H) \\ &= \exp(X)\exp(H) \\ &= \exp(X)\,(I + H + \circ(\|H\|)) \\ &= \varphi(X) + \exp(X)H + \circ(\|H\|). \end{aligned}$$
   Donc φ est différentiable en tout $X \in \mathbb{C}[M]$ et $D\varphi_X$ s'identifie à la multiplication par $\exp(X)$. L'égalité
   $$|||D\varphi_X - D\varphi_Y||| = \|\exp(X) - \exp(Y)\|$$
   montre que $D\varphi$ est continue, donc φ est bien de classe $\mathcal{C}^1$.
   La différentielle de φ en 0 est l'identité donc, d'après le théorème d'inversion locale, φ réalise un difféomorphisme entre un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}[M]$ et un voisinage de I dans $\mathbb{C}[M]^\times$. Si $\mathbb{C}[M]^\times$ est connexe, le lemme nous permet alors d'affirmer que le morphisme φ est surjectif. En particulier, si $M \in GL_n(\mathbb{C})$ alors il existe une matrice X telle que $\exp(X) = M$.

3. Il nous suffit donc de prouver que que $\mathbb{C}[M]^\times$ est connexe par arcs. Soient $A, B \in \mathbb{C}[M]^\times$. $P(z) = \det(zA + (1-z)B)$ est un polynôme non nul, donc l'ensemble de ses racines $\mathcal{N}$ est fini. $\mathbb{C} - \mathcal{N}$ est connexe par arcs donc il existe un chemin γ dans $\mathbb{C} - \mathcal{N}$ reliant 0 à 1. Le chemin $\gamma(t)A + (1-\gamma(t))B$ relie alors B à A dans $\mathbb{C}[M]^\times$.